一、无穷限的广义积分

定义1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分(又称为无穷积分，下同)，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

即 $$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx;$$

此时，就说广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，若极限 $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 不存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

结束放映

类似地，可定义广义积分

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

定义2 函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上广义积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

其中a为任意实数，当上式右端两个积分都收敛时，称广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$是收敛的，否则，称其是发散的.

结束放映

若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，记

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x),\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则广义积分可表示为(如果极限存在)

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty).$$

结束放映

例1 计算无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx.$

解 对任意的 $b>0$, 有

$$\int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^b - e^{-b} - (-1) = 1 - e^{-b}$$

于是 $$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}(1-e^{-b}) = 1-0=1$$

因此 $$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = 1$$

或 $$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1.$$

结束放映

例2 判断无穷积分 $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ 的收敛性.

解 对任意 $b > 0$,

$$\int_0^b \sin x dx = -\cos x \Big|_0^b$$

$$= -\cos b + (\cos 0) = 1 - \cos b$$

因为 $\lim\limits_{b \to +\infty}(1 - \cos b)$ 不存在，故由定义知无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx \text{ 发散.}$$

结束放映

例3 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan x\right]_{a}^{0}+\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan x\right]_{0}^{b}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

结束放映

例4 讨论广义积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}dx$ 的敛散性.

证 (1) $p=1$, $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_{1}^{+\infty}=+\infty;$

(2) $p\neq1$, $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}dx=\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_{1}^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \frac{1}{p-1}, & p>1\end{cases}$

因此，当 $p>1$ 时，题设广义积分收敛，其值为 $\frac{1}{p-1}$;

当 $p\leq1$ 时，题设广义积分发散.

结束放映

例5 计算广义积分$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx.$

解 原式$=-\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{b}\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)=-\lim_{b\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{b}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{b}-\cos\frac{\pi}{2}\right]=1.$$

结束放映