



一、无穷限的广义积分

定义1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 如果极限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

存在, 则称此极限为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的**广义积分**
(又称为**无穷积分**, 下同), 记为 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

$$\text{即 } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx;$$

此时, 就说广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 若极限

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \text{ 不存在, 则称广义积分 } \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

发散.



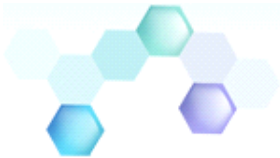
类似地，可定义广义积分

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

定义2 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上广义积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

其中 a 为任意实数，当上式右端两个积分都收敛时，称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 是收敛的，否则，称其是发散的。



若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 记

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x), \quad F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

则广义积分可表示为(如果极限存在)

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty).$$



例1 计算无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

解 对任意的 $b > 0$, 有

$$\int_0^b e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^b = -e^{-b} - (-1) = 1 - e^{-b}$$

于是 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = 1 - 0 = 1$

因此 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = 1$

或 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$



例2 判断无穷积分 $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ 的收敛性.

解 对任意 $b > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^b \sin x dx &= -\cos x \Big|_0^b \\ &= -\cos b + (\cos 0) = 1 - \cos b\end{aligned}$$

因为 $\lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - \cos b)$ 不存在, 故由定义知无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx \text{ 发散.}$$



例3 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

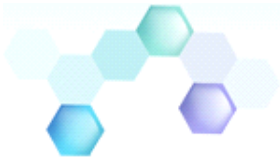
解
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan x]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^b$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan a + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$



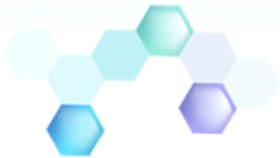
例4 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 的敛散性.

证 (1) $p=1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty$;

$$(2) p \neq 1, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1 \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

因此, 当 $p > 1$ 时, 题设广义积分收敛, 其值为 $\frac{1}{p-1}$;

当 $p \leq 1$ 时, 题设广义积分发散.



例5 计算广义积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$.

解 原式 $= -\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^b \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\cos \frac{1}{x} \right]_{\frac{2}{\pi}}^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\cos \frac{1}{b} - \cos \frac{\pi}{2} \right] = 1.$$