一、积分上限函数

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, x 为 $[a,b]$ 上的变量, 则

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

变上限定积分

是为定义在区间 $[a,b]$ 上的函数, 称其为积分上限函数.

注:
$$\int_a^x f(x)dx=\int_a^x f(t)dt$$

注意等式左边作为积分变量的 x 与作为积分上限 x 的区别.

结束放映

积分上限函数的导数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 定义积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b] \qquad (1)$$

则 $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\quad (a\le x\le b).$

结束放映

例1 求 $\dfrac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos^2 t dt\right]$.

解 $\dfrac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos^2 t dt\right] = \cos^2 x.$

例2 求 $\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^{x^3} e^{t^2} dt\right]$.

解 这里 $\int_1^{x^3} e^{t^2} dt$ 是 x^3 的函数, 因而是 x 的复合函数, 令 $x^3 = u$, 则 $\Phi(u) = \int_1^u e^{t^2} dt$, 根据复合函数求导公式, 有

结束放映

有

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^3} e^{t^2}dt\right]=\frac{d}{du}\left[\int_1^{u} e^{t^2}dt\right]\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\Phi'(u)\cdot 3x^2$$

$$=e^{u^2}\cdot 3x^2$$

$$=3x^2e^{x^6}\cdot$$

结束放映

原函数存在定理

定理 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 则积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

重要意义:

(1) 肯定了连续函数的原函数是存在的;

(2) 初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

结束放映

二、牛顿－莱布尼茨公式

定理 若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

牛顿－莱布尼茨公式

证 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,

又 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数,

$$\therefore\ F(x) - \Phi(x) = C,\quad x \in [a,b]$$

令 $x = a$ 得 $F(a) - \Phi(a) = C,$

结束放映

$$\because \ \Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0, \quad \therefore \ F(a)=C,$$

故 $\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$, 令 $x=b$ 得到

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \quad \text{证毕.}$$

上述公式也常记作

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

结束放映

牛顿—莱布尼茨公式

注:根据上节的补充规定可知,当 $a>b$ 时,该公式仍成立. 牛顿—莱布尼茨公式又称为微积分基本公式,它表明:一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它的任意一个原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量,求定积分的问题就转化为求原函数的问题.

结束放映

例3 求$\int_0^1 x^2 dx.$

解 $\dfrac{x^3}{3}$是x^2的一个原函数，由牛顿-莱布尼茨公式得：

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

例4 求$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx.$

解 当$x < 0$时，$\dfrac{1}{x}$的一个原函数是 $\ln|x|$,

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln|x|\Big|_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

结束放映

例5 计算 $\int_0^1 |2x-1|\,dx.$

解 因为 $|2x-1| = \begin{cases} 1-2x, & x \le \dfrac{1}{2} \\ 2x-1, & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

所以

$$\int_0^1 |2x-1|\,dx = \int_1^{1/2} (1-2x)\,dx + \int_{1/2}^1 (2x-1)\,dx$$

$$= (x-x^2)\Big|_0^{1/2} + (x^2-x)\Big|_{1/2}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

结束放映

三、定积分的换元积分法

定理　假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件:

(1) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数, 且其值域不超出 $[a,b]$,

则有 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$

结束放映

注：当$\alpha > \beta$时，换元公式仍成立. 应用换元公式时应注意

(1)用$x=\varphi(t)$把变量x换成新变量t时，积分限也相应的改变;

(2)求出$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数$\Phi(t)$后，不必象计算不定积分那样再要把$\Phi(t)$变换成原变量x的函数，而只要把新变量t的上、下限分别代入$\Phi(t)$然后相减就行了.

结束放映

例6 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx.$

解 令 $t=\cos x$, 则 $dt=-\sin x dx$,

$$x=\frac{\pi}{2} \longrightarrow t=0, \qquad x=0 \longrightarrow t=1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx=-\int_1^0 t^5 dt=\int_0^1 t^5 dt=\left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1=\frac{1}{6}.$$

注: 本例中，如果不明显写出新变量 t, 则定积分的上、下限就不要变，重新计算如下:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d(\cos x)$$

$$=-\left.\frac{\cos^6 x}{6}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(0-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}.$$

结束放映

例7 求定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$.

x	0	a
t	0	$\pi/2$

解 令 $x=a\sin t$, 则 $dx=a\cos t\,dt$

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a|\cos t|=a\cos t,$$

由换元积分公式得

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}.$$

结束放映

例8 求定积分 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx.$

解 令 $t=\sqrt{2x+1}$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$， $dx=tdt$，

当 $x=0$时 $t=1$， 当 $x=4$时 $t=3$，

从而 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}tdt$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Bigg|_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{27}{3}+9\right)-\left(\frac{1}{3}+3\right)\right]=\frac{22}{3}.$$

结束放映

四、定积分的分部积分法

设函数 $u(x)$、$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$\int_a^b (uv)'dx = [uv]\Big|_a^b,$$

$$[uv]\Big|_a^b = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx,$$

$$\int_a^b udv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

定积分的分部积分公式

结束放映

例9 求定积分 $\int_1^3 \ln x dx$.

解 $\int_1^3 \ln x dx = x\ln x\big|_1^3 - \int_1^3 x d(\ln x)$

$$= (3\ln 3 - 0) - \int_1^3 x\frac{1}{x}dx = 3\ln 3 - \int_1^3 dx$$

$$= 3\ln 3 - x\big|_1^3 = 3\ln 3 - (3-1)$$

$$= 3\ln 3 - 2.$$

例10 求定积分 $\int_0^1 xe^{-x}dx.$

解 $\int_0^1 xe^{-x}dx = \int_0^1 xd(e^{-x})$

$$= -(xe^{-x}|_0^1 - \int_0^1 e^{-x}dx)$$

$$= -[(e^{-1} - 0) + \int_0^1 e^{-x}d(-x)]$$

$$= -(e^{-1} + e^{-x}|_0^1)$$

$$= -(e^{-1} + (e^{-1} - 1)]$$

$$= 1 - 2e^{-1}.$$

结束放映

例11 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx.$

解 令 $u=\arcsin x,\quad dv=dx,$

则 $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad v=x,$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = [x\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$$

$$=\frac{\pi}{12}+[\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$

结束放映