



## 一、积分上限函数

**定义** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续,  $x$  为  $[a, b]$  上的变量, 则

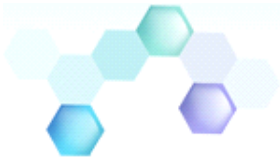
$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

变上限定积分

是为定义在区间  $[a, b]$  上的函数, 称其为**积分上限函数**.

**注:** 
$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^x f(t) dt$$

注意等式左边作为积分变量的  $x$  与作为积分上限  $x$  的区别.

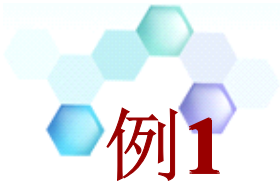


## 积分上限函数的导数

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 定义积分上限

函数  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$  (1)

则  $\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b).$



**例1** 求  $\frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \cos^2 t dt \right]$ .

**解**  $\frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \cos^2 t dt \right] = \cos^2 x$ .

**例2** 求  $\frac{d}{dx} \left[ \int_1^{x^3} e^{t^2} dt \right]$ .

**解** 这里  $\int_1^{x^3} e^{t^2} dt$  是  $x^3$  的函数, 因而是  $x$  的复合函数, 令  $x^3 = u$ , 则  $\Phi(u) = \int_1^u e^{t^2} dt$ , 根据复合函数求导公式, 有



有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^3} e^{t^2} dt\right] &= \frac{d}{du}\left[\int_1^u e^{t^2} dt\right] \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \Phi'(u) \cdot 3x^2 \\ &= e^{u^2} \cdot 3x^2 \\ &= 3x^2 e^{x^6}.\end{aligned}$$



## 原函数存在定理

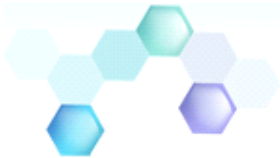
**定理** 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续, 则积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

就是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数.

**重要意义:**

- (1) 肯定了连续函数的原函数是存在的;
- (2) 初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.



## 二、牛顿—莱布尼茨公式

**定理** 若  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

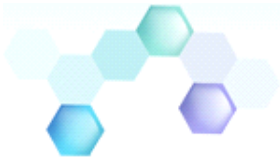
牛顿—莱布尼茨公式

**证** 已知  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数,

又  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  也是  $f(x)$  的一个原函数,

$$\therefore F(x) - \Phi(x) = C, \quad x \in [a, b]$$

令  $x = a$  得  $F(a) - \Phi(a) = C,$



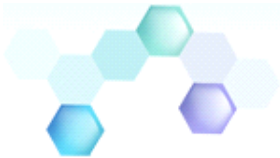
$$\because \Phi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0, \quad \therefore F(a) = C,$$

故  $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ , 令  $x = b$  得到

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{证毕.}$$

上述公式也常记作


$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$



## 牛顿—莱布尼茨公式

**注:**根据上节的补充规定可知,当  $a > b$  时,该公式仍成立. 牛顿—莱布尼茨公式又称为微积分基本公式,它表明:一个连续函数在区间  $[a, b]$  上的定积分等于它的任意一个原函数在区间  $[a, b]$  上的增量,求定积分的问题就转化为求原函数的问题.



 **例3** 求  $\int_0^1 x^2 dx$ .

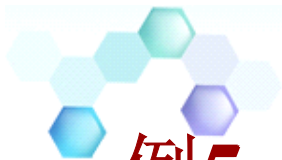
**解**  $\frac{x^3}{3}$  是  $x^2$  的一个原函数, 由牛顿-莱布尼茨公式得:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

**例4** 求  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$ .

**解** 当  $x < 0$  时,  $\frac{1}{x}$  的一个原函数是  $\ln |x|$ ,

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$



**例5** 计算  $\int_0^1 |2x-1| dx$ .

**解** 因为  $|2x-1| = \begin{cases} 1-2x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 |2x-1| dx &= \int_0^{1/2} (1-2x) dx + \int_{1/2}^1 (2x-1) dx \\ &= (x-x^2) \Big|_0^{1/2} + (x^2-x) \Big|_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



### 三、定积分的换元积分法

**定理** 假设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 函数  $x = \varphi(t)$

满足条件:

(1)  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b;$

(2)  $\varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上具有连续导数, 且其值域不超出  $[a, b]$ ,

$$\text{则有 } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$



**注：** 当  $\alpha > \beta$  时, 换元公式仍成立. **应用换元公式时应注意**

**(1)** 用  $x = \varphi(t)$  把变量  $x$  换成新变量  $t$  时, 积分限也相应的改变;

**(2)** 求出  $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$  的一个原函数  $\Phi(t)$  后, 不必象计算不定积分那样再要把  $\Phi(t)$  变换成原变量  $x$  的函数, 而只要把新变量  $t$  的上、下限分别代入  $\Phi(t)$  然后相减就行了.



**例6** 求定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$ .

**解** 令  $t = \cos x$ , 则  $dt = -\sin x dx$ ,

$$x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow t = 0, \quad x = 0 \longrightarrow t = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = -\int_1^0 t^5 dt = \int_0^1 t^5 dt = \left. \frac{t^6}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

**注:** 本例中, 如果不明显写出新变量  $t$ , 则定积分的上、下限就不要变, 重新计算如下:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d(\cos x) \\ &= -\left. \frac{\cos^6 x}{6} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(0 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$



**例7** 求定积分  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$  ( $a > 0$ ).

$x$	$0$	$a$
$t$	$0$	$\pi/2$

**解** 令  $x = a \sin t$ , 则  $dx = a \cos t dt$

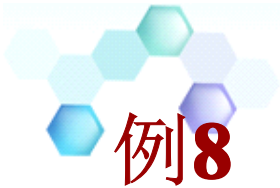
$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a |\cos t| = a \cos t,$$

由换元积分公式得

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}.$$



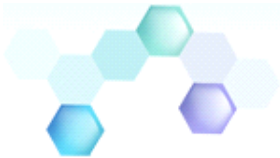
**例8**

求定积分  $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$ .

**解** 令  $t = \sqrt{2x+1}$ , 则  $x = \frac{t^2-1}{2}$ ,  $dx = t dt$ ,

当  $x=0$  时  $t=1$ , 当  $x=4$  时  $t=3$ ,

$$\begin{aligned} \text{从而 } \int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx &= \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2} + 2}{t} t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 (t^2 + 3) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} t^3 + 3t \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{27}{3} + 9 \right) - \left( \frac{1}{3} + 3 \right) \right] = \frac{22}{3}. \end{aligned}$$



## 四、定积分的分部积分法

设函数  $u(x)$ 、 $v(x)$  在区间  $[a, b]$  上具有连续导数，  
则有

$$(uv)' = u'v + uv',$$

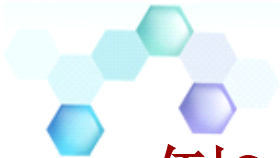
$$\int_a^b (uv)' dx = [uv]_a^b,$$

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx,$$

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

定积分的分部积分公式





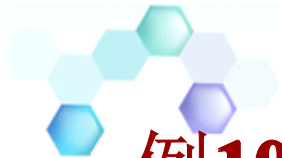
**例9** 求定积分  $\int_1^3 \ln x dx$ .

**解**  $\int_1^3 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^3 - \int_1^3 x d(\ln x)$

$$= (3 \ln 3 - 0) - \int_1^3 x \frac{1}{x} dx = 3 \ln 3 - \int_1^3 dx$$

$$= 3 \ln 3 - x \Big|_1^3 = 3 \ln 3 - (3 - 1)$$

$$= 3 \ln 3 - 2.$$



**例10** 求定积分  $\int_0^1 xe^{-x} dx$ .

**解**  $\int_0^1 xe^{-x} dx = \int_0^1 x d(e^{-x})$

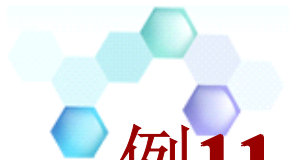
$$= -(xe^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx)$$

$$= -[(e^{-1} - 0) + \int_0^1 e^{-x} d(-x)]$$

$$= -(e^{-1} + e^{-x} \Big|_0^1)$$

$$= -(e^{-1} + (e^{-1} - 1))$$

$$= 1 - 2e^{-1}.$$



**例11** 计算  $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$ .

**解** 令  $u = \arcsin x$ ,  $dv = dx$ ,

则  $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $v = x$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\ &= \frac{\pi}{12} + \left[ \sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{aligned}$$