一、定积分的定义

定义　设 $f(x)$在 $[a,b]$ 上有界, 在 $[a,b]$中任意插入若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 把区间 $[a,b]$ 分割成 n个小区间, 各小区间的长度依次为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,(i = 1,2,\cdots,n)$, 在各小区间上任取一点$\xi_i(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$,作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$, 并求和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, 记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 如果不论对 $[a,b]$ 怎样的分法, 也不论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$上点 ξ_i 怎样的取法, 只

结束放映

要当$\lambda \to 0$时, 和 S总趋于确定的极限 I, 我们称这个极限 I为函数 $f(x)$在区间 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$叫做被积函数, $f(x)dx$叫做被积表达式, x叫做积分变量, $[a,b]$叫做积分区间, a与 b 分别叫做积分上限和积分下限.

结束放映

积分和

定义 $$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

几点说明:

(1) 积分值仅与被积函数及积分区间有关, 而与积分变量的字母无关, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

(2) 定义中区间的分法和 ξ_i 的取法是任意的.

(3) 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分存在时, 称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

结束放映

定积分存在定理

定理1 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

定理2 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

结束放映

定积分的物理意义

变速直线运动的路程

设某物体作直线运动, 已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上 t 的一个连续函数, 且 $v(t) \geq 0$, 求物体在这段时间内所经过的路程 s.

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \Delta t_i = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

结束放映

变力沿直线所作功

设某物体在变力$\vec{F}$作用下沿x轴由a移动到b $(b>a)$,设$\vec{F}$的方向与位移方向相同, 力$\vec{F}$的大小随x而变化，且可表为x的连续函数 $F=F(x)$.

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b F(x)dx.$$

结束放映

例1 利用定积分的定义计算积分$\int_0^1 x^2 dx$.

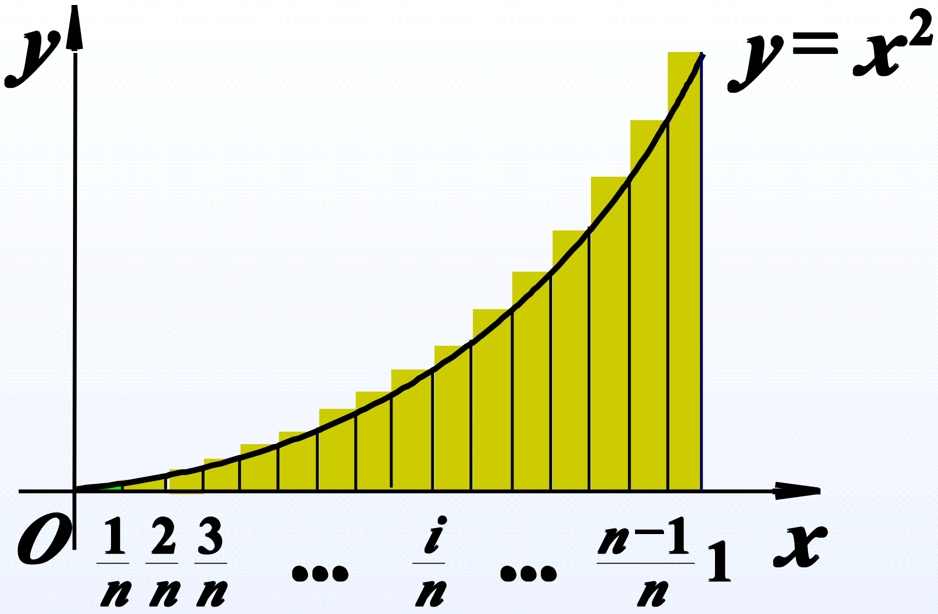
解 因函数 $f(x)=x^2$ 在$[0,1]$上连续，故可积. 从而定积分的值与对区间$[0,1]$的分法及ξ_i的取法无关. 为便于计算，将$[0,1]$ n等分，如图，则

$$\lambda=\Delta x_i=\frac{1}{n}.$$

于是，

$$\lambda\to 0 \iff n\to\infty;$$

取每个小区间的右端点为ξ_i，则



结束放映

$$\xi_i = \frac{i}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

故 $$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

二、定积分的性质

补充规定：(1)当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=0$;

(2)当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$

在性质讨论中，假设定积分都存在，且不考虑上下限的大小.

性质1 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx$

$$=\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

证 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

结束放映

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

注：此性质可以推广到有限多个函数作和的情况.

性质2 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ （k为常数).

证 $\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$

$$=\lim_{\lambda\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=k\int_a^b f(x)dx.$$

结束放映

性质3　设 $a<c<b$,则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

补充：不论 a,b,c 的相对位置如何, 上式总成立.

例　当 $a<b<c$ 时, 有

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx,$$

则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

注：上述性质表明定积分对于积分区间具有可加性.

性质4　$\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a$

结束放映

性质5 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a<b).$$

证 $\because f(x)\geq 0, \quad \therefore f(\xi_i)\geq 0 \ (i=1,2,\cdots,n).$

又 $\Delta x_i \geq 0$, 故 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0,$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0.$$

推论1 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a<b).$$

结束放映

证 由题设知 $g(x)-f(x)\ge 0,$

$$\therefore \quad \int_a^b [g(x)-f(x)]dx \ge 0,$$

即 $$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0,$$

推论得证.

推论2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad (a<b).$

证 $\because \quad -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$

$$\therefore \quad -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

即 $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

注意: $|f(x)|$在区间$[a,b]$上的可积性是显然的.

结束放映

例2 比较积分值 $\int_0^{-2} e^x dx$ 和 $\int_0^{-2} x dx$ 的大小.

解 令 $f(x) = e^x - x,\ x \in [-2, 0]$

$\because$ $$f(x) > 0,$$

$\therefore$ $$\int_{-2}^{0} (e^x - x)\, dx > 0,$$

$\therefore$ $$\int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x\, dx,$$

于是 $$\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x\, dx.$$

结束放映

性质6 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

证 $\because \quad m \le f(x) \le M,$

$$\therefore \quad \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx,$$

即 $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

此性质可用于估计积分值的大致范围

结束放映

例3　估计积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx$的值.

解　$f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x},\ x\in[0,\pi],$

因为 $0\le\sin^3 x\le 1,$ 所以

$$\frac{1}{4}\le\frac{1}{3+\sin^3 x}\le\frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{4}dx\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3}dx$$

于是　$$\frac{\pi}{4}\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx\le\frac{\pi}{3}.$$

结束放映

性质7 (定积分中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ, 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b).$$

积分中值公式

证 $\because m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$

$$\therefore m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

结束放映

由闭区间上连续函数的介值定理的推论, 在区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ, 使

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

即 $$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\quad(a\le\xi\le b).$$

注: 由上述几何解释易见, 数值 $\frac{1}{b-a}\int f(x)dx$ 表示连续曲线 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均高度, 我们称其为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

结束放映