一、第一类换元法(凑微分法)

问题 $\int e^{2x}dx \overset{?}{=} e^{2x} + C$

观察 从公式 $\int e^{u}du = e^{u} + C$,令 $u = 2x$,则有

$$\int e^{2x}d(2x) = e^{2x} + C \longrightarrow \int e^{2x}dx \neq e^{2x} + C$$

解法 可将微分 dx 凑成 $\frac{1}{2}d(2x)$ 的形式,即

$$dx = \frac{1}{2}d(2x)$$

$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) \underline{\underline{u = 2x}} \frac{1}{2}\int e^{u}du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

结束放映

一般地,设$f(u)$具有原函数$F(u)$,即

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

则 $$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

$$\underset{\text{换元}}{\overset{\varphi(x)=u}{=\!=\!=}} \int f(u)du = F(u) + C$$

$$\underset{\text{回代}}{\overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=}} F[\varphi(x)] + C,$$

结束放映

部分常用的凑微分公式:

(1) $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$; (2) $x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1})$;

(3) $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = d(\sqrt{x})$; (4) $\frac{1}{x^2} dx = -d(\frac{1}{x})$;

(5) $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$; (6) $e^x dx = d(e^x)$;

(7) $\cos x dx = d(\sin x)$.

结束放映

例 1 求不定积分 $\int (2x+1)^{10} dx.$

解 利用凑微分公式 $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$, 所以

$$\int (2x+1)^{10} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{10} (2x+1)' dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (2x+1)^{10} d(2x+1)$$

$$\underline{\underline{\overset{2x+1=u}{\text{换元}}}} \ \frac{1}{2} \int u^{10} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{11}}{11} + C$$

$$\underline{\underline{\overset{u=2x+1}{\text{回代}}}} \ \frac{1}{22} (2x+1)^{11} + C.$$

例 2 求不定积分 $\int \frac{1}{3+2x}dx.$

解 $\int \frac{1}{3+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}\cdot(3+2x)'dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}d(3+2x)$$

$$\overset{3+2x=u}{\underset{换元}{=\!=\!=}} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$\overset{u=3+2x}{\underset{回代}{=\!=\!=}} \frac{1}{2}\ln|3+2x| + C.$$

注： 一般情形：

$$\int f(ax+b)\,dx \overset{ax+b=u}{=\!=\!=} \frac{1}{a}\int f(u)\,du.$$

结束放映

例 3 计算不定积分 $\int xe^{x^2}dx.$

解 $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'dx$

$= \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)$

$\xlongequal[\text{换元}]{x^2=u} \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C$

$\xlongequal[\text{回代}]{u=x^2} \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$

注：一般情形：

$$\int xf(x^2)dx \xlongequal{x^2=u} \frac{1}{2}\int f(u)du.$$

结束放映

例 4 求不定积分 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$

解 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx = \int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)$$

$$\overset{1+2\ln x=u}{\underset{\text{换元}}{=\!=\!=}} \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$\overset{u=1+2\ln x}{\underset{\text{回代}}{=\!=\!=}} \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x| + C.$$

注：一般情形：$f(\ln x)\frac{1}{x}dx = f(\ln x)d(\ln x).$

结束放映

例 5　求不定积分 $\int \sin 2x dx$.

解法一　原式 $= \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$;

解法二　原式 $= 2\int \sin x \cos x dx = 2\int \sin x d(\sin x)$

$= (\sin x)^2 + C$;

解法三　原式 $= 2\int \sin x \cos x dx = -2\int \cos x d(\cos x)$

$= -(\cos x)^2 + C$.

注: 一般情形:

$$f(\sin x)\cos x dx = f(\sin x) d(\sin x);$$

$$f(\cos x)\sin x dx = -f(\cos x) d(\cos x).$$

例 6　求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}dx.$

解　原式

$$=\int \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}}{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1})}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int \sqrt{2x+3}dx-\frac{1}{4}\int \sqrt{2x-1}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int \sqrt{2x+3}d(2x+3)-\frac{1}{8}\int \sqrt{2x-1}d(2x-1)$$

$$=\frac{1}{12}(\sqrt{2x+3})^3-\frac{1}{12}(\sqrt{2x-1})^3+C.$$

注：利用平方差公式进行根式有理化是化简积分计算的常用手段之一.

结束放映

二、第二类换元法

问题 $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx = ?$

方法 通过变量替换引入新的积分变量.

例如,令 $x=\sin t$,则 $dx=\cos t\,dt$,

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx=\int(\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt$$

$$=\int \sin^5 t\cos^2 t\,dt=\cdots\cdots$$

用"凑微分"即可求出结果

结束放映

定理 2 设 $x=\varphi(t)$是单调可导函数,且$\varphi'(t)\neq 0$,

又设$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$具有原函数$F(t)$,则

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$=F(t)+C=F[\psi(x)]+C$$

其中$\psi(x)$是$x=\varphi(t)$的反函数.

证 因为$F(t)$为$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数,令

$$G(x)=F[\psi(x)],$$

则 $$G'(x)=\frac{dF}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

结束放映

$$= f[\varphi(t)] = f(x),$$

即 $G(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.证毕.

注：从定理 **2** 可见,第二类换元积分法与第一类换元积分法的换元与回代过程正好相反.

结束放映

例7 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

方法 当被积函数含有两种或两种以上的根式 $\sqrt[k]{x}$, $\cdots$, $\sqrt[l]{x}$ 时，可令 $x=t^n$ (n 为各根指数的最小公倍数).

解 令 $x=t^6$ $\longrightarrow$ $dx=6t^5dt$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx=\int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt=\int \frac{6t^2}{1+t^2}dt$$

$$=6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=6\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=6[t-\arctan t]+C$$

$$=6[\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}]+C.$$

结束放映

例 8 求不定积分 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$.

解 设 $x=a\sin t$, 则 $dx=a\cos t\,dt$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

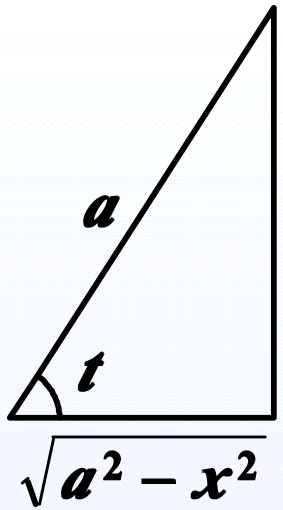
$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$$

于是 $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]+C$

$$=\frac{a^2}{2}[t+\sin t\cdot\cos t]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}[t+\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\arcsin\frac{x}{a}\right]+C$$



结束放映

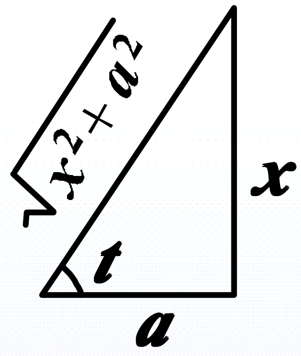
例 9　求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \ (a>0)$.

解　令 $x = a\tan t \Rightarrow dx = a\sec^2 t dt,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t dt$$

$$= \int \sec t dt$$

$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$



$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

结束放映

三、分部积分公式

问题 $\int xe^x dx = ?$

思路 利用两个函数乘积的求导公式,设函数

$u=u(x)$和$v=v(x)$具有连续导数,则

$$(uv)' = u'v + uv'$$

移项得 $$uv' = (uv)' - u'v$$

两边积分得 $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

或 $$\int udv = uv - \int vdu$$

分部积分公式

求解关键 如何将所给积分$\int f(x)dx$化为$\int udv$

结束放映

形式,并使它更容易计算,主要采用凑微分法,

例如, $\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx$

$$\int \underset{udv}{x de^x} = \underset{uv}{xe^x} - \int \underset{vdu}{e^x dx}$$

$$= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

利用分部积分法计算不定积分, 选择好 u、v 非常关键, 选择不当将使积分的计算变得更加复杂,

结束放映

例如, $\int xe^x dx = \int e^x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2} de^x$

$udv \qquad uv \qquad vdu$

$$= \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$$

更复杂

下面将通过例题介绍分部积分法的应用.

结束放映

有关分部积分公式的几点说明

1. 有些函数的积分需要连续多次应用分部积分法;

2. 有些函数的积分在连续两次应用分部积分法后出现了原来的积分式，这时通过解方程可得到所求不定积分;

3. 一般来说，下列类型的被积函数常考虑应用分部积分法，其中 m,n 都是正整数.

$x^n\sin mx \quad x^n\cos mx \quad x^{nx}\sin mx \quad x^{nx}\cos mx$

$x^n e^{mx} \quad x^n(\ln x) \quad x^n\arcsin mx$

$x^n\arccos mx \quad x^n\arctan mx$ 等.

例 10 求不定积分 $\int x\cos x dx$.

解一 令 $u=\cos x, xdx=d\left(\frac{x^2}{2}\right)=dv$,

$$\int x\cos x dx=\int \cos x d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\cos x+\int \frac{x^2}{2}\sin x dx,$$

显然, u,v' 选择不当, 积分更难进行.

解二 令 $u=x, \cos x dx=d\sin x=dv$,

$$\int x\cos x dx=\int x d\sin x$$

$$=x\sin x-\int \sin x dx$$

$$=x\sin x+\cos x+C.$$

结束放映

例 11 求不定积分$\int x^2 e^x dx$.

解 $u = x^2, e^x dx = de^x = dv$

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x$$

$$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2\int x de^x$$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$$

小结 若被积函数是幂函数(指数为正整数)和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 可设幂函数为u, 使其幂降一次.

结束放映

例 12 求不定积分 $\int x\arctan x dx$.

解 令 $u=\arctan x, xdx=d\left(\frac{x^2}{2}\right)=dv,$

$$\int x\arctan x dx=\int \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}d(\arctan x)$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

结束放映

例 13　求不定积分 $\int x^3 \ln x dx$.

解　令 $u=\ln x, x^3dx=d\left(\frac{x^4}{4}\right)=dv$,

$$\int x^3 \ln x dx=\int \ln x d\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C.$$

小结　若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积,可设对数函数或反三角函数为 u. 而将幂函数凑微分进入微分号，使得应用分部积分公式后，对数函数或反三角函数消失.

结束放映

例 14 求不定积分 $\int e^x \sin dx$.

解 $\int e^x \sin dx = \int \sin de^x$

$= e^x \sin x - \int e^x d(\sin x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$

$= e^x \sin x - \int \cos x de^x$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d\cos x)$

$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$

$\therefore \int e^x \sin dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

结束放映

例 15　求不定积分 $\int e^{\sqrt{x}}dx.$

解　令 $t=\sqrt{x}$, 则 $x=t^2$, $dx=2tdt$, 于是

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int e^t tdt$$
$$=2\int tde^t$$
$$=2te^t-2\int e^t dt$$
$$=2te^t-2e^t+C$$
$$=2e^t(t-1)+C$$
$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

结束放映