



## 一、原函数的概念

**定义** 设  $f(x)$  是定义在空间  $I$  上的函数, 若存在函数  $F(x)$  对任何  $x \in I$  均有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx$$

则称函数  $F(x)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  上的**原函数**.

例如,

因为  $(\sin x)' = \cos x$ , 故  $\sin x$  是  $\cos x$  的一个原函数;

因为  $(x^2)' = 2x$ , 故  $x^2$  是  $2x$  的一个原函数;

因为  $(x^2 + 1)' = 2x$ , 故  $x^2 + 1$  是  $2x$  的一个原函数;

.....

从上述后面两个例子可见: **一个函数的原函数不是唯一的.**



事实上, 若  $F(x)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  上的原函数, 即有  $F'(x) = f(x) \Rightarrow [F(x) + C]' = f(x)$  ( $C$  为任意常数).

从而  $F(x) + C$  也是  $f(x)$  在区间  $I$  上的原函数.

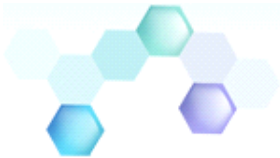
一个函数的任意二个原函数之间相差一个常数.

事实上, 设  $F(x)$  和  $G(x)$  都是  $f(x)$  的原函数, 则

$$[F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

由此知道, 若  $F(x)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  上的原函数, 则

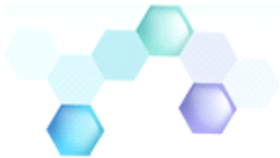


函数  $f(x)$  的全体原函数为  $F(x) + C$  ( $C$  为任意常数).

原函数的存在性将在下一章讨论, 这里先介绍一个结论:

区间  $I$  上的连续函数一定有原函数.

注: 求函数  $f(x)$  的原函数实质上就是问它是由什么函数求导得来的. 而一旦求得  $f(x)$  的一个原函数  $F(x)$ , 则其全体原函数为  $F(x) + C$  ( $C$  为任意常数).



## 二、不定积分的概念

**定义** 在某区间  $I$  上的函数  $f(x)$ , 若存在原函数, 则称  $f(x)$  为可积函数, 并将  $f(x)$  的全体原函数记为

$$\int f(x)dx$$

称它是函数  $f(x)$  在区间  $I$  内的**不定积分**, 其中  $\int$  称为**积分符号**,  $f(x)$  称为**被积函数**,  $x$  称为**积分变量**.

由定义知, 若  $F(x)$  为  $f(x)$  的原函数, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \text{ 称为积分常数})$$



**注:**由定义知, 求函数  $f(x)$  的不定积分, 就是求  $f(x)$  的全体原函数, 在  $\int f(x)dx$  中, 积分号  $\int$  表示对函数  $f(x)$  实行求原函数的运算, 故求不定积分的运算实质上就是求导(或求微积分)运算的逆运算.



**例1** 问  $\frac{d}{dx} \left( \int f(x) dx \right)$  与  $\int f'(x) dx$  是否相等?

**解** 不相等.

设  $F'(x) = f(x)$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \int f(x) dx \right) &= \frac{d}{dx} (F(x) + C) \\ &= F'(x) + 0 = f(x) \end{aligned}$$

而由不定积分定义

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

所以  $\frac{d}{dx} \left( \int f(x) dx \right) \neq \int f'(x) dx.$





**例2** 求下列不定积分

$$(1) \int x^3 dx; \quad (2) \int \frac{1}{x^2} dx;$$

**解** (1) 因为  $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$ , 所以  $\frac{x^4}{4}$  是  $x^3$  的一个原函数,

从而  $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$  ( $C$  为任意常数).

(2) 因为  $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ , 所以  $-\frac{1}{x}$  是  $\frac{1}{x^2}$  的一个原函数,

从而  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$  ( $C$  为任意常数).



**例3** 已知曲线  $y = f(x)$  在任一点  $x$  处的切线斜率为  $2x$ ，且曲线通过点  $(1, 2)$ ，求此曲线的方程。

**解** 根据题意知  $f'(x) = 2x$ ，即  $f(x)$  是  $2x$  的一个原函数，从而

$$f(x) = \int 2x dx = x^2 + C$$

积分曲线族

现在要上述积分曲线族中选出通过点  $(1, 2)$  的那条曲线。由曲线通过点  $(1, 2)$  得

$$2 = 1^2 + C \longrightarrow C = 1$$

故所求曲线方程为  $y = x^2 + 1$ 。





### 三、微分运算与积分运算的关系

由不定积分的定义知, 若  $F(x)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  上的原函数, 即  $F'(x) = f(x)$  或  $dF(x) = f(x)dx$  则  $f(x)$  在区间  $I$  内的不定积分为

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

易见  $\int f(x)dx$  是  $f(x)$  的原函数, 所以

$$\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x) \text{ 或 } d[\int f(x)dx] = f(x)dx,$$

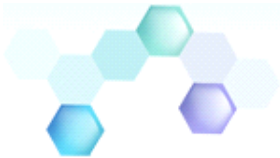


又由于 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数, 所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C.$$

从上可见微分运算与积分运算是互逆的.

两个运算连在一起时,  $d\int$  完全抵消,  $\int d$  抵消后差一常数.



## 基本积分表

$$(1) \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 是常数})$$

$$(2) \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$$

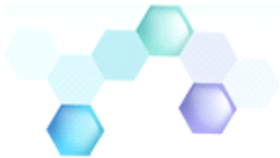
$$(3) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$(4) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$(5) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C$$



$$(8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$(11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$(12) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(13) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$



## 四、不定积分的性质

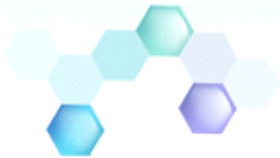
利用导数运算法则和不定积分的定义, 可得下列运算性质:

**性质1** 两函数代数和的不定积分, 等于它们各自积分的代数和.

$$\text{即 } \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \left[ \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right] &= \left[ \int f(x) dx \right] \pm \left[ \int g(x) dx \right] \\ &= f(x) \pm g(x) \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

**注:** 此性质可推广到有限多个函数之和的情形.



**性质2** 求不定积分时,

非零常数因子可提到积分号外面.

$$\text{即 } \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0);$$

$$\text{证 } \left[ k \int f(x)dx \right]' = k \left[ \int f(x)dx \right]' = kf(x) = \left[ \int kf(x)dx \right]'$$

证毕.





## 五、直接积分法

从前面的例题知道，利用不定积分的定义来计算不定积分是非常不方便的。为解决不定积分的计算问题，这里我们先介绍一种利用不定积分的运算性质和积分基本公式，直接求出不定积分的方法，即**直接积分法**。

例如，计算不定积分  $\int (x^2+2x-7)dx$ 。

$$\begin{aligned}\int (x^2+2x-7)dx &= \int x^2 dx + \int 2x dx - \int 7 dx \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 - 7x + C\end{aligned}$$

**不定积分性质**

**积分基本公式**

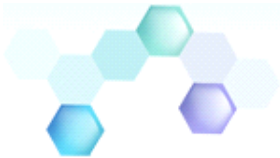


**例5** 求不定积分  $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x}} dx$ .

**解**  $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{4}{3}} dx$

$$= \frac{1}{-\frac{4}{3}+1} x^{-\frac{4}{3}+1} + C$$

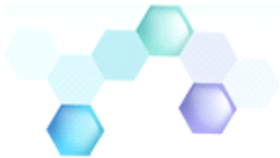
$$= -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$



**例6** 求不定积分  $\int 2^x e^x dx$ .

**解** 
$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx$$

$$= \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{1 + \ln 2} + C.$$



**例7** 求不定积分  $\int \left( \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right) dx$ .

**解**

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right) dx &= \int \frac{x}{2} dx + \int \frac{2}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{4} + 2 \ln |x| + C. \end{aligned}$$



**例8** 求不定积分  $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$ .

**解**

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx &= \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arcsin x + C. \end{aligned}$$



**例9**

求不定积分  $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$ .

**解** 
$$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx$$

$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{1+x^2} dx$$

$$= \int \left( x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \int x^2 dx - \int 1 dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.$$





**例10** 求下列不定积分:

$$(1) \int \tan^2 x dx; \quad (2) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

**解**

$$\begin{aligned} (1) \int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \sec^2 x dx - \int 1 dx \\ &= \tan x - x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int dx - \int \cos x dx \right] \\ &= \frac{1}{2} (x - \sin x) + C. \end{aligned}$$