一、原函数的概念

定义　设$f(x)$是定义在空间 I上的函数，若存在函数$F(x)$对任何$x \in I$均有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx$$

则称函数$F(x)$为 $f(x)$在区间 I 上的原函数.

例如,

因为$(\sin x)' = \cos x$, 故$\sin x$是$\cos x$的一个原函数;

因为$(x^2)' = 2x$, 故 x^2是 $2x$ 的一个原函数;

因为$(x^2 + 1)' = 2x$, 故$x^2 + 1$是$2x$的一个原函数;

　　……

从上述后面两个例子可见: 一个函数的原函数不是唯一的.

结束放映

事实上，若$F(x)$为$f(x)$在区间I上的原函数，即有

$F'(x)=f(x)$ ⟹ $[F(x)+C]'=f(x)$ （C为任意常数）.

从而$F(x)+C$也是$f(x)$在区间I上的原函数.

一个函数的任意二个原函数之间相差一个常数.

事实上，设$F(x)$和$G(x)$都是$f(x)$的原函数，则

$$[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$$

⟹ $F(x)-G(x)=C$ （C为任意常数）.

由此知道，若$F(x)$为$f(x)$在区间I上的原函数，则

结束放映

函数 $f(x)$ 的全体原函数为 $F(x)+C$（C 为任意常数）.

原函数的存在性将在下一章讨论，这里先介绍一个结论:

区间 I 上的连续函数一定有原函数.

注：求函数 $f(x)$ 的原函数实质上就是问它是由什么函数求导得来的. 而一旦求得 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，则其全体原函数为 $F(x)+C$（C 为任意常数）.

结束放映

二、不定积分的概念

定义 在某区间 I 上的函数 $f(x)$, 若存在原函数，则称 $f(x)$ 为可积函数，并将 $f(x)$ 的全体原函数记为

$$\int f(x)dx$$

称它是函数 $f(x)$ 在区间 I 内的**不定积分**，其中 $\int$ 称为**积分符号**，$f(x)$ 称为**被积函数**，x 称为**积分变量**.

由定义知，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C\text{ 称为积分常数})$$

结束放映

注: 由定义知，求函数 $f(x)$ 的不定积分,就是求 $f(x)$ 的全体原函数，在 $\int f(x)dx$ 中，积分号 $\int$ 表示对函数 $f(x)$ 实行求原函数的运算，故求不定积分的运算实质上就是求导(或求微积分)运算的逆运算.

结束放映

例1 问 $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)$与$\int f'(x)dx$是否相等?

解 不相等.

设 $F'(x)=f(x)$, 则

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=\frac{d}{dx}(F(x)+C)$$

$$=F'(x)+0=f(x)$$

而由不定积分定义

$$\int f'(x)dx=f(x)+C$$

所以 $$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)\neq\int f'(x)dx.$$

结束放映

例2 求下列不定积分

$$(1)\int x^3dx; \quad (2)\int \frac{1}{x^2}dx;$$

解 (1) 因为 $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$，所以 $\frac{x^4}{4}$ 是 x^3 的一个原函数，

从而 $$\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C \quad (C\text{为任意常数}).$$

(2) 因为 $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$，所以 $-\frac{1}{x}$ 是 $\frac{1}{x^2}$ 的一个原函数，

从而 $$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C \quad (C\text{为任意常数}).$$

结束放映

例3 已知曲线 $y=f(x)$ 在任一点 x 处的切线斜率为 $2x$，且曲线通过点 $(1,2)$，求此曲线的方程.

解 根据题意知 $f'(x)=2x$，即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数，从而

$$f(x)=\int 2x\,dx=x^2+C$$

积分曲线族

现在要上述积分曲线族中选出通过点 $(1,2)$ 的那条曲线. 由曲线通过点 $(1,2)$ 得

$$2=1^2+C \Longrightarrow C=1$$

故所求曲线方程为 $y=x^2+1$.

结束放映

三、微分运算与积分运算的关系

由不定积分的定义知，若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数，即 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$

则 $f(x)$ 在区间 I 内的不定积分为

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

易见 $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的原函数，所以

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x) \text{或} d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx,$$

结束放映

又由于$F(x)$是$F'(x)$ 的原函数, 所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C.$$

从上可见微分运算与积分运算是互逆的.

两个运算连在一起时, $d\int$完全抵消, $\int d$抵消后差一常数.

结束放映

基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C$ (k是常数)

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \; (\mu \neq -1)$

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

结束放映

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(12) $\int e^x dx = e^x + C$

(13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

四、不定积分的性质

利用导数运算法则和不定积分的定义，可得下列运算性质：

性质1 两函数代数和的不定积分，等于它们各自积分的代数和.

即 $$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

证 $$\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]' = \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int g(x)dx\right]'$$

$$= f(x) \pm g(x)$$ 证毕.

注：此性质可推广到有限多个函数之和的情形.

结束放映

性质2 求不定积分时，

非零常数因子可提到积分号外面.

即 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k \neq 0);$

证 $\left[k\int f(x)dx\right]' = k\left[\int f(x)dx\right]' = kf(x) = \left[\int kf(x)dx\right]'$

证毕.

结束放映

五、直接积分法

从前面的例题知道，利用不定积分的定义来计算不定积分是非常不方便的．为解决不定积分的计算问题，这里我们先介绍一种利用不定积分的运算性质和积分基本公式，直接求出不定积分的方法，即直接积分法.

例如， 计算不定积分 $\int (x^2+2x-7)dx.$

$$\int (x^2+2x-7)dx = \int x^2dx + \int 2xdx - \int 7dx$$

不定积分性质

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 - 7x + C$$

积分基本公式

结束放映

例5 求不定积分$\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx.$

解 $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{4}{3}}dx$

$$= \frac{1}{-\frac{4}{3}+1}x^{-\frac{4}{3}+1} + C$$

$$= -3x^{-\frac{1}{3}} + C.$$

结束放映

例6 求不定积分 $\int 2^x e^x dx.$

解 $\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx$

$$= \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{1+\ln 2} + C.$$

结束放映

例7 求不定积分$\int\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)dx.$

解 $\int\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)dx=\int\frac{x}{2}dx+\int\frac{2}{x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int xdx+2\int\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^2}{4}+2\ln|x|+C.$$

结束放映

例8 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \arcsin x + C.$$

结束放映

例9 求不定积分 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx.$

解 $$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx$$

$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{1+x^2}dx$$

$$= \int \left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \int x^2dx - \int 1dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.$$

结束放映

例10 求下列不定积分:

$$(1)\int \tan^2 x dx; \qquad (2)\int \sin^2\frac{x}{2}dx.$$

解 (1) $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1)dx$

$$= \int \sec^2 x dx - \int 1 dx$$

$$= \tan x - x + C;$$

(2) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x - \sin x) + C.$$

结束放映