第五节 函数的幂级数展开式的应用

一、近似计算

二、计算定积分

三、微分方程的幂级数解法

一、近似计算

$\because\ A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$

$\therefore\ A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$

误差 $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$

两类问题:

1.给定项数,求近似值并估计精度;

2.给出精度,确定项数.

关键: 通过估计余项,确定精度或项数.

常用方法:

1.若余项是交错级数,则可用余项的首项来解决;

2.若不是交错级数,则放大余项中的各项,使之成为等比级数或其它易求和的级数,从而求出其和.

例1 计算e的近似值,使其误差不超过 10^{-5}.

解 $\because e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$

令 $x = 1,$ 得 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$

余项:

$$r_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots=\frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{n+2}+\cdots)$$

$$\le\frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots)=\frac{1}{n\cdot n!}$$

欲使 $r_{n+1}\le 10^{-5}$,只要 $\frac{1}{n\cdot n!}\le 10^{-5}$,

即 $n\cdot n!\ge 10^5$, 而 $8\cdot 8!=322560>10^5$,

$$\therefore e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{8!}\approx 2.71828$$

例2 利用$\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$计算$\sin 9^0$的近似值，并估计误差.

解 $$\sin 9^0 = \sin\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3,$$

$$|r_4| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120}(0.2)^5 < \frac{1}{300000} < 10^{-5},$$

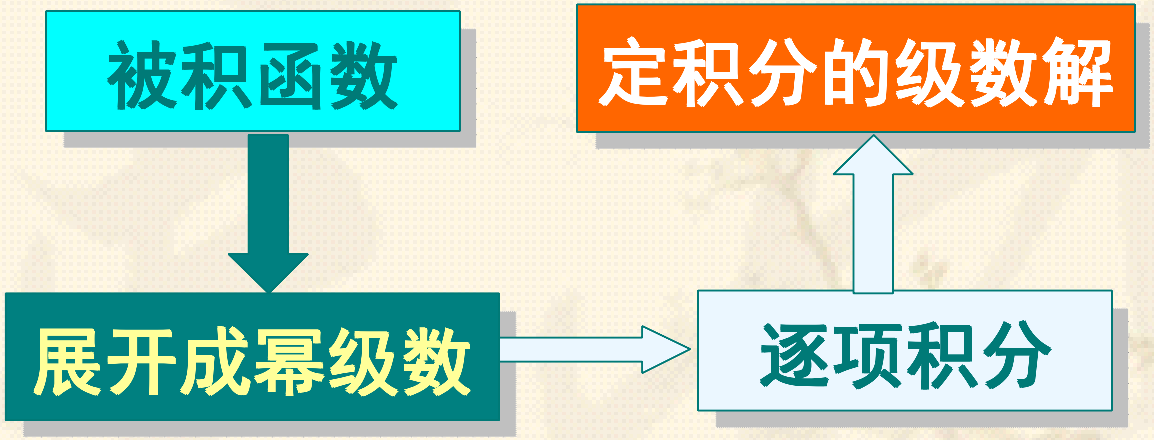
$$\therefore \sin 9^0 \approx 0.157079 - 0.000646 \approx 0.156433$$

其误差不超过10^{-5}.

二、计算定积分

例如函数 $e^{-x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}$，原函数不能用初等函数表示，难以计算其定积分.

解法



例3 计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的近似值，精确到10^{-4}.

解 $\because \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \cdots$$

收敛的交错级数

第四项 $\frac{1}{7\cdot 7!} < \frac{1}{3000} < 10^{-4}$,

取前三项作为积分的近似值,得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} \approx 0.9461$$

三、微分方程的幂级数解法

求一阶微分方程的初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 的解

其中 $f(x,y)$ 是 $(x-x_0),(y-y_0)$ 的多项式

$$f(x,y) = a_{00} + a_{10}(x-x_0) + a_{01}(y-y_0) + \cdots$$
$$+ a_{lm}(x-x_0)^l(y-y_0)^m$$

设所求解 y 可展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数

$$y = y_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

代入方程中得一恒等式,比较等式两端 $x-x_0$ 的同次幂系数,求出 $a_1, a_2, \cdots$ 即可

例4　求方程$y' = x + y^2$满足$y|_{x=0} = 0$的特解.

解　这时$x_0 = 0, y_0 = 0$,故设

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

把y及y'的幂级数展开式代入原 方程,得

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots$$

$$= x + (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)^2$$

$$= x + a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_2) x^4 + \cdots$$

比较系数得

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{20}, \cdots$$

得解　$y = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5 + \cdots$