# 第八章 二重积分

# 第一节 二重积分的概念与性质

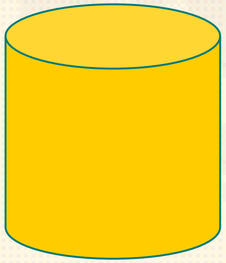
一、问题的提出

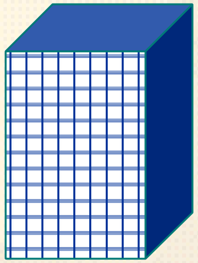
二、二重积分的概念

三、二重积分的性质

# 一、问题的提出

## 1．曲顶柱体的体积

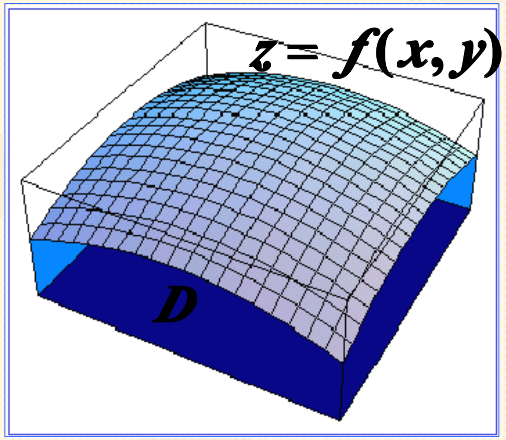




柱体体积

=底面积×高

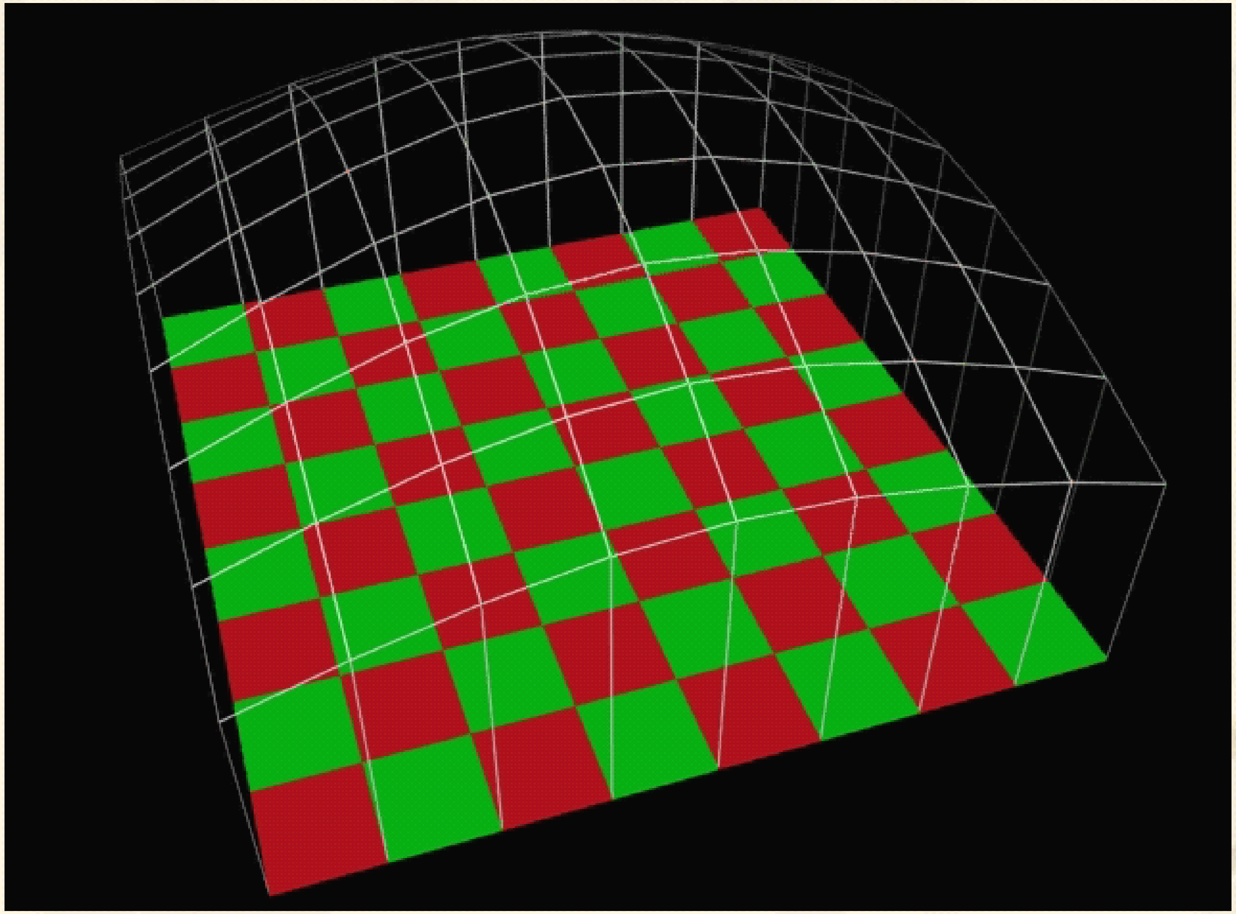
**特点：**平顶.




曲顶柱体体积=?

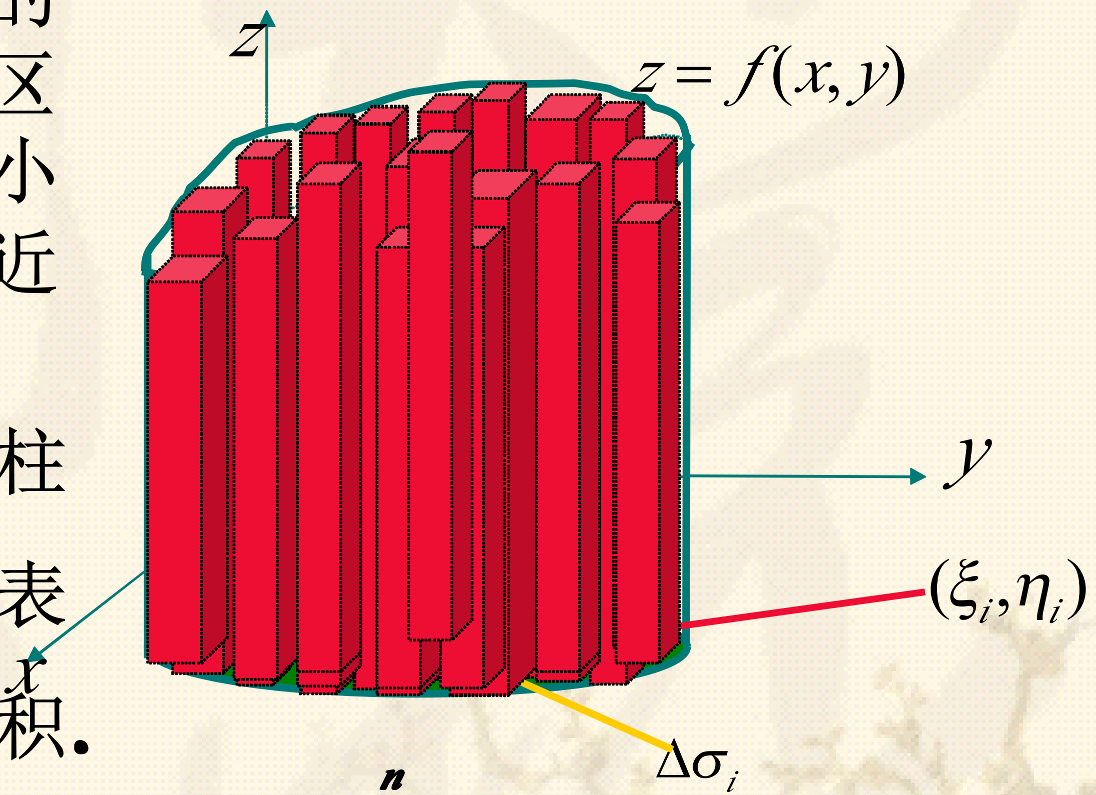
**特点：**曲顶

求曲顶柱体的体积采用 “分割、近似、求和、取极限”的方法，先看动画演示.



曲顶柱体体积的计算步骤是：

先分割曲顶柱体的底，并取典型小区域 $\Delta\sigma_i$，求对应小曲顶柱体体积的近似值.




用若干个小平顶柱体体积之和近似表示曲顶柱体的体积.

曲顶柱体的体积 $V=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

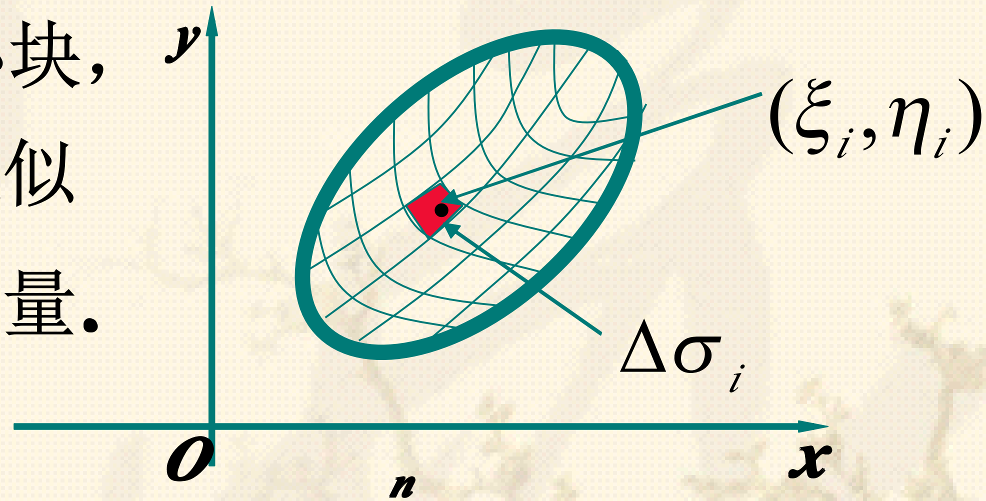
## 2．求平面薄片的质量

设有一平面薄片，占有　　面上的闭区域　，在点　　　　处的面密度为　　　　　　，假定　　　在　上连续，平面薄片的质量为多少？

将薄片分割成若干小块，

取典型小块，将其近似

看作均匀薄片，求质量.




所有小块质量之和

近似等于薄片总质量

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

# 二、二重积分的概念

**定义**　设　　　　是有界闭区域$D$上的有界函数，

$)\Delta\sigma_i$　　　　$(i=1,2,\cdots,n)$

将闭区域$D$任意分成$n$个小闭区域　　　，

$\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，其中　　表示第$i$个小闭区域，

也表示它的面积，在每个　　上任取一点　　　　，

作乘积　　　　　　　，　　　　　　　　，

并作和　　　　　　　，

如果当各小闭区域的直径中的最大值 趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数在闭区域 $D$ 上的二重积分，

记为 $= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ ，

即 .

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积元素

积分和

## 对二重积分定义的说明：

**(1)**在二重积分的定义中，对闭区域的划分是任意的.

**(2)**当　　　　在闭区域上连续时，定义中和式的极限必存在，即二重积分必存在.

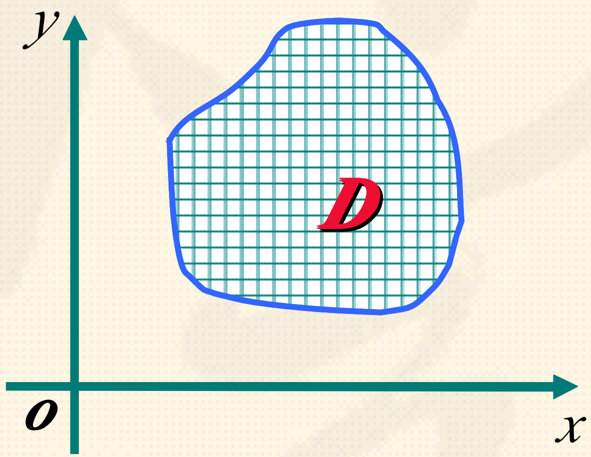
$f\ ($

## 二重积分的几何意义：

当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积.

当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值.

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域$D$,




则面积元素为

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故二重积分可写为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

# 三、二重积分的性质

**性质 1** 设 $\alpha$、$\beta$ 为常数，则

$$\iint_D [\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)] \mathrm{d}\sigma$$

$$= \alpha \iint_D f(x,y) \mathrm{d}\sigma \pm \beta \iint_D g(x,y) \mathrm{d}\sigma.$$

**性质2** 对积分区域具有可加性 ( $D = D_1 + D_2$ )

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

**性质3** 若 $\sigma$为$D$的面积, 则 $\sigma = \iint_D 1\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma.$

**性质4** 若在$D$上 $f(x,y) \le g(x,y)$, 则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

特殊地 $\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$

**性质5** 设 、 分别是 在闭区域 $D$ 上的最大值和最小值， 为 $D$ 的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

（二重积分估值不等式）

**性质6** 设函数 在闭区域 上连续， 为 的面积，则在 $D$ 上至少存在一点 使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

（二重积分中值定理）

**例 1** 不作计算，估计 的值，

其中 是椭圆闭区域： .

**解** 区域 $D$ 的面积 $ab\pi$ ，

在 上 $\because 0 \leq, \; x^2 +$

$$\therefore 1 = e^0 \leq e^{x^2+y^2} \leq e^{a^2},$$

由性质 6 知 $\sigma \leq \iint\limits_D e^{(x^2+y^2)} \mathrm{d}\sigma \leq \sigma \cdot e^{a^2}$,

$$ab\pi \leq \iint\limits_D e^{(x^2+y^2)} \mathrm{d}\sigma \leq ab\pi e^{a^2}.$$

例 2　估计 的值，

其中 D: .

解　$\because f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$，区域面积 ，

在 上 的最大值 $M=\dfrac{1}{4}\quad (x=y=0)$

$f(x,y)$ 的最小值 $m=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{1}{5}\quad (x=1,y=2)$

故 $\dfrac{2}{5}\le I\le \Rightarrow 0.4\le I\le 0.5.$

**例 3** 判断 的符号.

**解** 当 $r \le$ 时, $0 < x^2 + y^2 \le (|x| + |y|)^2 \le 1$,

故 $\ln(x^2 + y^2)$

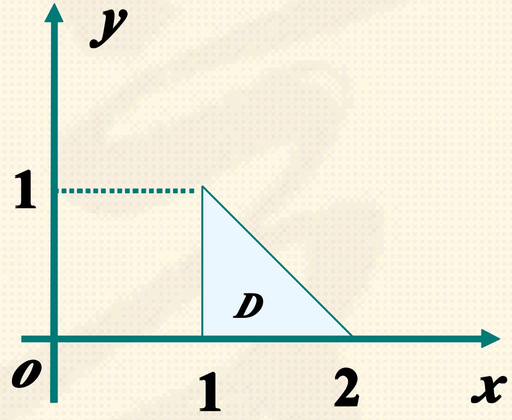
又当 $|x|$ 时, $\ln(x^2 + y^2) < 0$,

于是 .

**例 4** 比较积分 与

的大小，其中 **D** 是三角形闭区域，三顶点各为**(1,0), (1,1), (2,0).**

**解** 三角形斜边方程 $x + y = 2$




在 **D** 内有 $1 \le x, +$

故 $\ln(x + y)$

于是 $\ln(x + y) > [\ln(x +$

因此 .