第六节 高斯公式 *通量与散度

Green 公式 $\xrightarrow{\text{推广}}$ Gauss 公式

一、高斯公式

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

*三、通量与散度

一、高斯 (Gauss) 公式

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \oint\!\!\!\oint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{(Gauss 公式)}$$

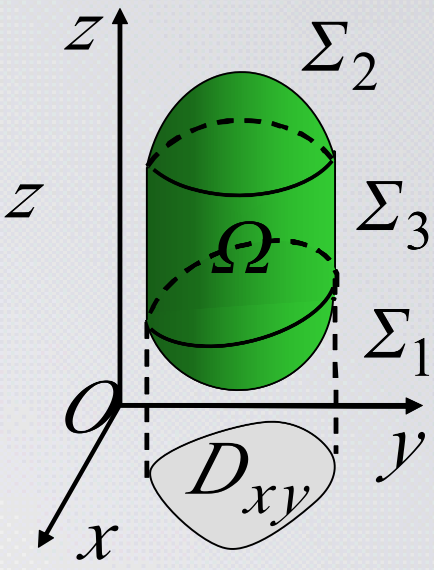
下面先证:

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明：设 $\Omega: z_1(x,y) \le z(x,y) \le z_2(x,y)$，$(x,y) \in D_{xy}$

称为XY-型区域，$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, $\Sigma_1: z = z_1(x,y)$,

$\Sigma_2: z = z_2(x,y)$, 则



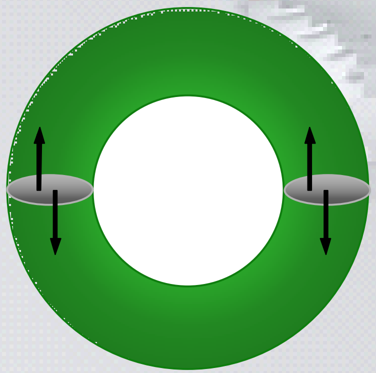
$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{xy}} \{ R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)) \} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_3} \right) R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



若 Ω 不是 XY–型区域，则可引进辅助面将其分割成若干个 XY–型区域，在辅助面正反两侧面积分正负抵消，故上式仍成立 .

类似可证 $\iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

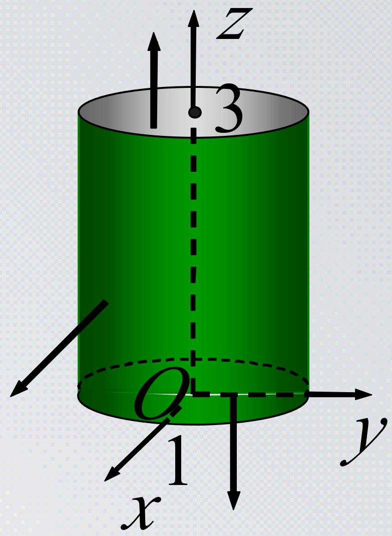
三式相加，即得所证 Gauss 公式：

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例**1.** 用Gauss 公式计算$\oiint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中Σ为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

解: 这里 $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$



利用Gauss 公式, 得

$$\text{原式}=\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

利用质心公式, 注意 $\bar{y}=0,\bar{z}=\frac{3}{2}$

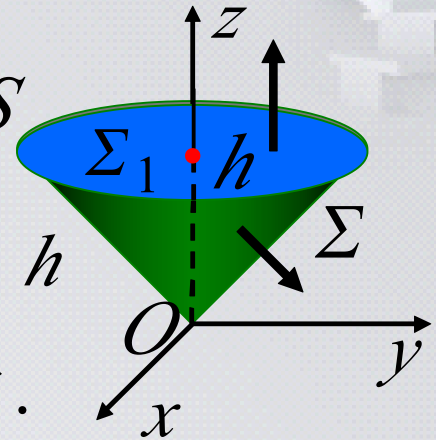
$$=(0-\frac{3}{2})\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$$

思考: 若 Σ 改为内侧, 结果有何变化?

若 Σ 为圆柱侧面(取外侧) , 如何计算?

例**2.** 利用Gauss 公式计算积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$



其中Σ为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于$z=0$及 $z=h$ 之间部分的下侧, α,β,γ 为法向量的方向角.

解: 作辅助面

$$\Sigma_1: z=h,\ \ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2,\ \text{取上侧}$$

记Σ,Σ_1所围区域为Ω，则

$$\boxed{\text{在 }\Sigma_1\text{ 上 }\alpha=\beta=\tfrac{\pi}{2},\gamma=0}$$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

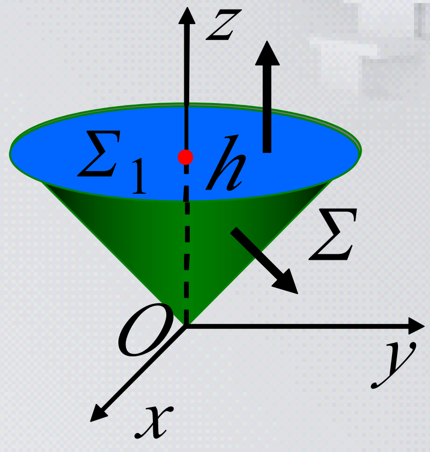
$$I = 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iint_{D_{xy}} h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$\Big\downarrow$ 利用质心公式, 注意 $\bar{x}=\bar{y}=0$

$$= 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \pi h^4$$

先二后一

$$= 2\int_0^h z\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z - \pi h^4 = -\tfrac{1}{2}\pi h^4$$

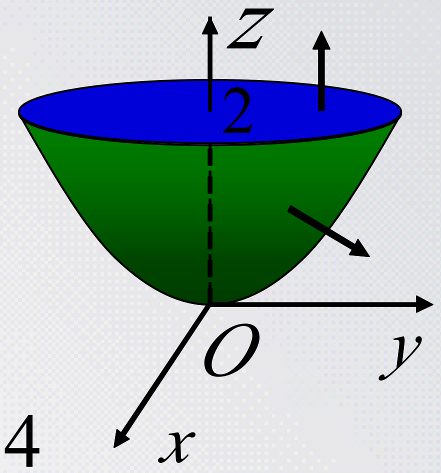


思考: 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

$\Sigma : z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.

提示: 作取上侧的辅助面 $\Sigma_1 : z=2,$

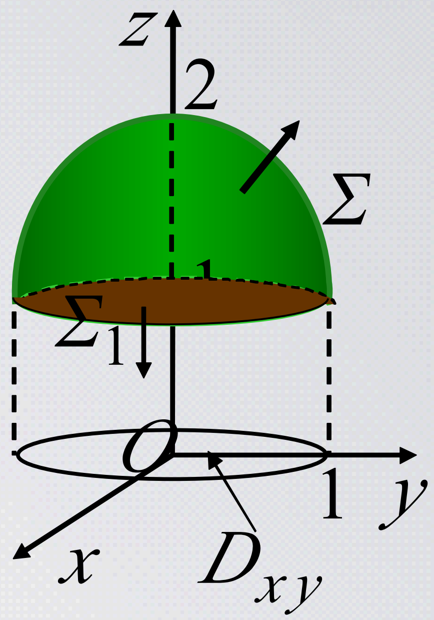
$$(x,y)\in D_{xy} : x^2+y^2 \le 4$$



例**3.** 设Σ为曲面$z=2-x^2-y^2$, $1\le z\le 2$ 取上侧, 求

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\underline{-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

解: 作取下侧的辅助面



$$\Sigma_1: z=1 \quad (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$$

$$I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

用柱坐标

用极坐标

$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

例4. 设函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$在闭区域Ω上具有一阶和二阶连续偏导数, 证明格林(Green)第一公式

$$P=u\frac{\partial v}{\partial x}\quad Q=u\frac{\partial v}{\partial y}\quad R=u\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\iiint_\Omega u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_\Sigma u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中Σ是整个Ω边界面的外侧.

注意: 高斯公式 $\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证:令 $P=u\frac{\partial v}{\partial x}$, $Q=u\frac{\partial v}{\partial y}$, $R=u\frac{\partial v}{\partial z}$, 由高斯公式得

$$\iiint_{\Omega}\left[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\oiint_{\Sigma} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\oiint_{\Sigma} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

移项即得所证公式.

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

1. 连通区域的类型　设有空间区域 G,

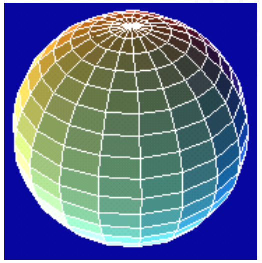
• 若 G 内任一闭曲面所围成的区域全属于 G, 则称 G 为空间二维单连通域 ;

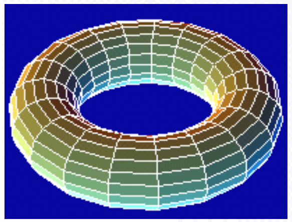
• 若 G 内任一闭曲线总可以张一片全属于 G 的曲面, 则称 G 为空间一维单连通域 .

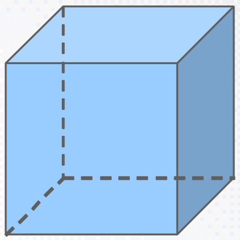
例如, 球面所围区域既是一维也是二维单连通区域 ;

环面所围区域是二维但不是一维单连通区域 ;

立方体中挖去一个小球所成的区域是一维但不是二维单连通区域 .







2. 闭曲面积分为零的充要条件

定理2. 设 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在空间二维单连通域 G 内具有连续一阶偏导数, Σ 为 G 内任一闭曲面, 则

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ①$$

的充要条件是:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad (x,y,z) \in G \qquad ②$$

证: “充分性”. 根据高斯公式可知②是①的充分条件.

“必要性”. 用反证法. 已知①成立, 假设存在 $M_0 \in G$, 使

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0} \neq 0$$

因P, Q, R在G内具有连续一阶偏导数，则存在邻域$U(M_0)\subset G$, 使在$U(M_0)$上,

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\neq 0$$

设$U(M_0)$的边界为Σ'取外侧, 则由 $\boxed{\text{高斯公式}}$ 得

$$\iint_{\Sigma'} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{U(M_0)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\neq 0$$

与①矛盾，故假设不真. 因此条件②是必要的.

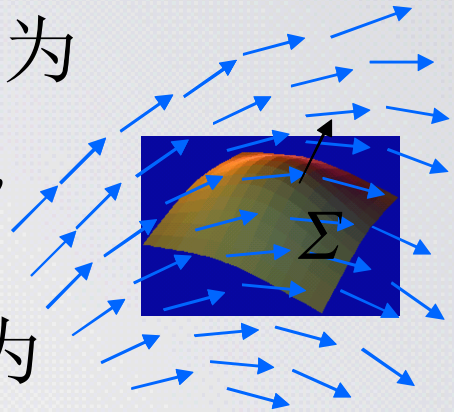
*三、通量与散度

引例. 设稳定流动的不可压缩流体的密度为1, 速度场为

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

设Σ为场中任一有向曲面, 则由对坐标的曲面积分的物理意义可知, 单位时间通过曲面Σ的流量为

$$\Phi=\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



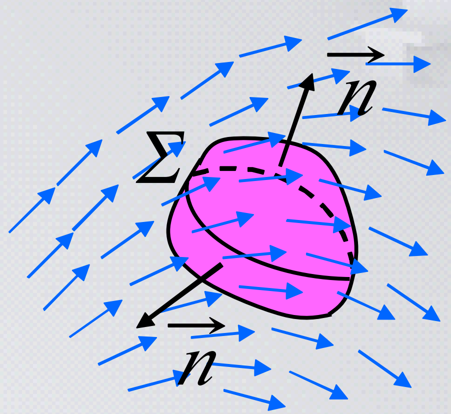
由两类曲面积分的关系, 流量还可表示为

$$\Phi=\iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_\Sigma \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

若Σ为方向向外的闭曲面，则单位时间通过Σ的流量为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



当$\Phi > 0$时，说明流入Σ的流体质量少于流出的，表明Σ内有泉；

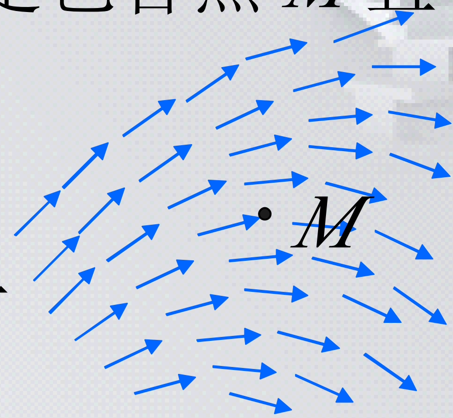
当$\Phi < 0$时，说明流入Σ的流体质量多于流出的，表明Σ内有洞；

当$\Phi = 0$时，说明流入与流出Σ的流体质量相等 .

根据高斯公式，流量也可表为

$$\Phi = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad ③$$

为了揭示场内任意点M处的特性, 设Σ是包含点 M 且方向向外的任一闭曲面 , 记Σ所围域为Ω, 在③式两边同除以Ω的体积 V, 并令Ω 以任意方式缩小至点 M(记作$\Omega \to M$), 则有



$$\lim_{\Omega \to M} \frac{\Phi}{V} = \lim_{\Omega \to M} \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$= \lim_{\Omega \to M} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{(\xi,\eta,\zeta)} \quad ((\xi,\eta,\zeta) \in \Omega)$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_M$$

此式反应了流速场在点M的特点: 其值为正,负或 0, 分别反映在该点有流体涌出, 吸入, 或没有任何变化.

定义: 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P, Q, R 具有连续一阶偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面,其单位法向量 $\vec{n}$, 则称 $\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\,S$为向量场 $\vec{A}$通过有向曲面 Σ 的通量(流量) .

在场中点 $M(x, y, z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\xlongequal{\text{记作}}\operatorname{div}\vec{A}$$

称为向量场 $\vec{A}$ 在点 M 的散度.

显然 $\operatorname{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}$

说明: 由引例可知, 散度是通量对体积的变化率, 且

$\operatorname{div}\vec{A} > 0$ 表明该点处有正源,

$\operatorname{div}\vec{A} < 0$ 表明该点处有负源,

$\operatorname{div}\vec{A} = 0$ 表明该点处无源,

散度绝对值的大小反映了源的强度.

若向量场 $\vec{A}$ 处处有 $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, 则称 $\vec{A}$ 为无源场.

例如, 匀速场 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (其中 v_x, v_y, v_z 为常数),

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

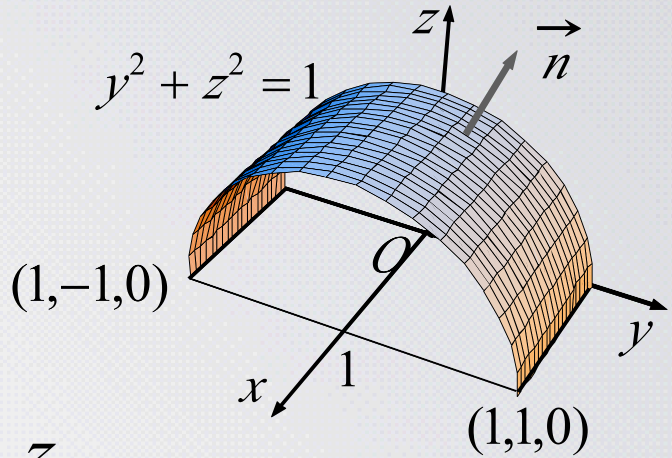
故它是无源场.

例5. 求向量场 $\vec{A}=yz\vec{j}+z^2\vec{k}$ 穿过曲面 Σ 流向上侧的通量，其中 Σ 为柱面 $y^2+z^2=1\ (z\geq 0)$ 被平面 $x=0$ 及 $x=1$ 截下的有限部分.

解: 记 $f(x,y)=y^2+z^2$，则 Σ 上侧的法向量为

$$\vec{n}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$=y\vec{j}+z\vec{k}$$



在 Σ 上 $\vec{A}\cdot\vec{n}=y^2z+z^3=z(y^2+z^2)=z$

故所求通量为

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\cancel{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-y^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2$$

例6. 置于原点, 电量为 q 的点电荷产生的场强为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}=\frac{q}{r^3}(x,y,z) \qquad (\vec{r}\neq\vec{0})$$

求 $\operatorname{div}\vec{E}$.

解: $\operatorname{div}\vec{E}=q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]$

$$=q\left[\frac{r^2-3x^2}{r^5}+\frac{r^2-3y^2}{r^5}+\frac{r^2-3z^2}{r^5}\right]$$

$$=0 \qquad (r\neq 0)$$

计算结果与仅原点有点电荷的事实相符.