

第五节

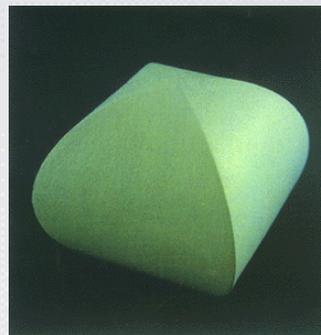
对坐标的曲面积分

- 一、有向曲面及曲面元素的投影
- 二、对坐标的曲面积分的概念与性质
- 三、对坐标的曲面积分的计算法
- 四、两类曲面积分的联系



一、有向曲面及曲面元素的投影

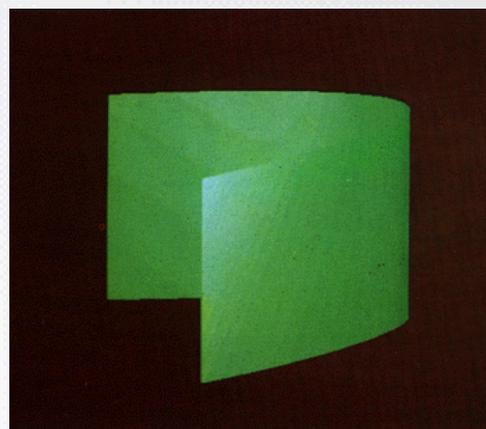
- 曲面分类 $\left\{ \begin{array}{l} \text{双侧曲面} \\ \text{单侧曲面} \end{array} \right.$



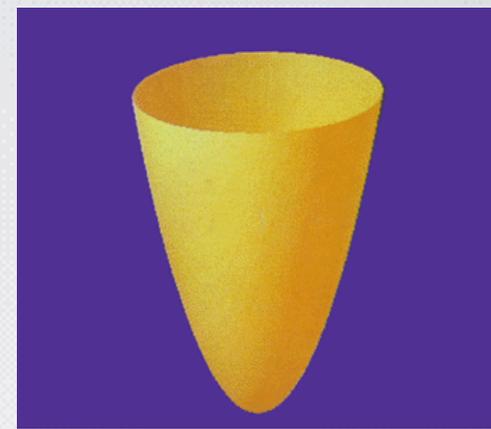
曲面分内侧和外侧



莫比乌斯带
(单侧曲面的典型)



曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

• 指定了侧的曲面叫有向曲面，其方向用法向量指向表示：

方向余弦	$\cos \alpha$	$\cos \beta$	$\cos \gamma$	封闭曲面
侧的规定	> 0 为前侧	> 0 为右侧	> 0 为上侧	外侧
	< 0 为后侧	< 0 为左侧	< 0 为下侧	内侧

• 设 Σ 为有向曲面，其面元 ΔS 在 xOy 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$ ， $(\Delta S)_{xy}$ 的面积为 $(\Delta \sigma)_{xy} \geq 0$ ，则规定

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta \sigma)_{xy}, & \text{当 } \cos \gamma > 0 \text{ 时} \\ -(\Delta \sigma)_{xy}, & \text{当 } \cos \gamma < 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \cos \gamma \equiv 0 \text{ 时} \end{cases}$$

类似可规定
 $(\Delta S)_{yz}, (\Delta S)_{zx}$

二、对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

求单位时间流过有向曲面 Σ 的流量 Φ .

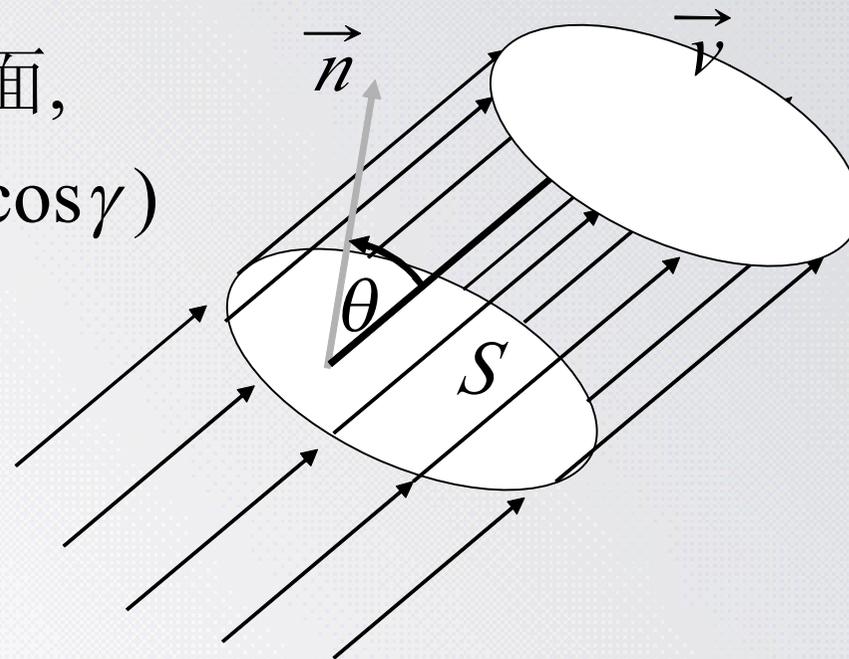
分析: 若 Σ 是面积为 S 的平面,

法向量: $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

流速为常向量: \vec{v}

则流量

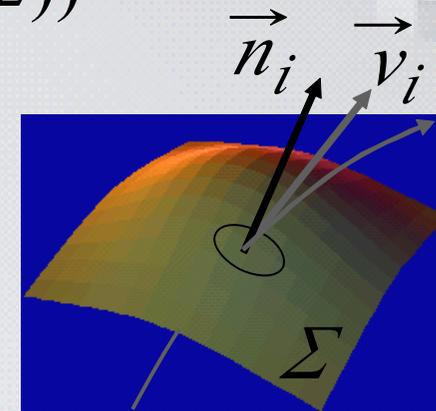
$$\begin{aligned}\Phi &= S \cdot |\vec{v}| \cos\theta \\ &= S \vec{v} \cdot \vec{n}\end{aligned}$$



对一般的有向曲面 Σ , 对稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

用“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

进行分析可得 $\Phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i$



设 $\vec{n}_i = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i)$, 则

$$\begin{aligned} \Phi &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i \\ &\quad + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i] \Delta S_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx} \\ &\quad + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}] \end{aligned}$$

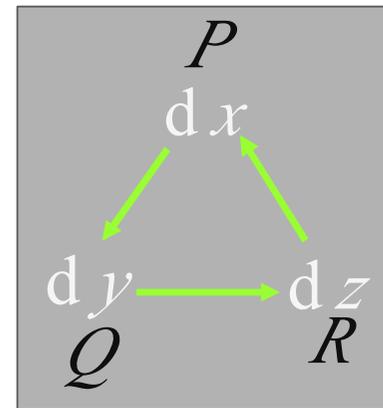
2. 定义: 设 Σ 为光滑的有向曲面, 在 Σ 上定义了一个向量场 $\vec{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, 若对 Σ 的任意分割和在局部面元上任意取点, 下列极限都存在

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

则称此极限为向量场 \vec{A} 在有向曲面上对坐标的曲面积分, 或第二类曲面积分. 记作

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

P, Q, R 叫做被积函数; Σ 叫做积分曲面.



$\iint_{\Sigma} P dy dz$ 称为 P 在有向曲面 Σ 上对 y, z 的曲面积分;

$\iint_{\Sigma} Q dz dx$ 称为 Q 在有向曲面 Σ 上对 z, x 的曲面积分;

$\iint_{\Sigma} R dx dy$ 称为 R 在有向曲面 Σ 上对 x, y 的曲面积分.

引例中, 流过有向曲面 Σ 的流体的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

若记 Σ 正侧的单位法向量为 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

令 $\vec{dS} = \vec{n} dS = (dy dz, dz dx, dx dy)$

$$\vec{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

则对坐标的曲面积分也常写成如下向量形式



$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

3. 性质

(1) 若 $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$, 且 Σ_i 之间无公共内点, 则

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

(2) 用 Σ^- 表示 Σ 的反向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^-} \vec{A} \cdot \vec{dS} = -\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS}$$



三、对坐标的曲面积分的算法

定理：设光滑曲面 $\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧， $R(x, y, z)$ 是 Σ 上的连续函数，则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy$$

证：
$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \, dx \, dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

$$\left. \begin{array}{l} \because \Sigma \text{ 取上侧, } \therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy} \\ \zeta_i = z(\xi_i, \eta_i) \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) (\Delta \sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy$$

说明：如果积分曲面 Σ 取下侧，则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

- 若 $\Sigma : x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz$$

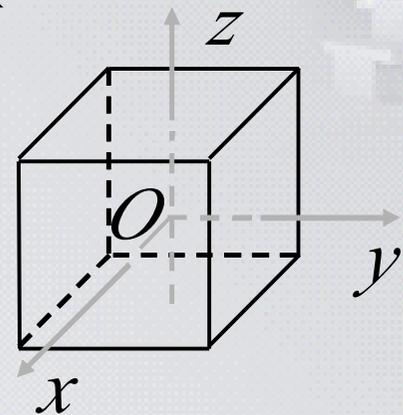
(前正后负)

- 若 $\Sigma : y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z) dz dx$$

(右正左负)

例1. 计算 $\iint_{\Sigma} (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (z+x)dxdy$
 其中 Σ 是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解: 利用对称性.

$$\text{原式} = 3 \iint_{\Sigma} (z+x) dx dy$$

Σ 的顶部 $\Sigma_1 : z = \frac{a}{2} (|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2})$ 取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2 : z = -\frac{a}{2} (|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2})$ 取下侧

$$= 3 \left[\iint_{\Sigma_1} (z+x) dx dy + \iint_{\Sigma_2} (z+x) dx dy \right]$$

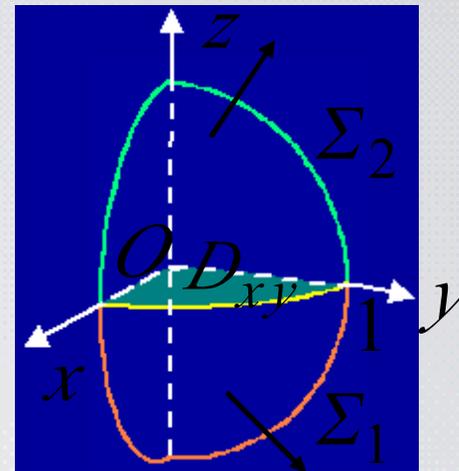
$$= 3 \left[\iint_{D_{xy}} \left(\frac{a}{2} + x \right) dx dy - \iint_{D_{xy}} \left(-\frac{a}{2} + x \right) dx dy \right]$$

$$= 3a \iint_{D_{xy}} dx dy = 3a^3$$

例2. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在第一和第八卦限部分.

思考: 下述解法是否正确:

$$\text{根据对称性 } \iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy \neq 0$$

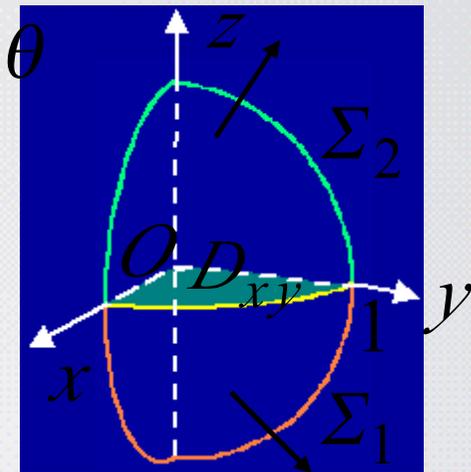


解: 把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$(x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy &= \iint_{\Sigma_1} xyz \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_2} xyz \, dx \, dy \\
&= -\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2}) \, dx \, dy \\
&\quad + \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} r^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-r^2} \, r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} \, dr \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$



例3. 设 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 计算

$$I = \iint_S \frac{2dydz}{x\cos^2 x} + \frac{dzdx}{\cos^2 y} - \frac{dxdy}{z\cos^2 z}$$

解: 利用轮换对称性, 有

$$\iint_S \frac{2dydz}{x\cos^2 x} = \iint_S \frac{2dxdy}{z\cos^2 z}, \quad \iint_S \frac{dzdx}{\cos^2 y} = \iint_S \frac{dxdy}{\cos^2 z} = 0$$

$$\therefore I = \iint_S \frac{dxdy}{z\cos^2 z} = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2} \cos^2 \sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2} \cos^2 \sqrt{1-r^2}} = -4\pi \int_0^1 \frac{d\sqrt{1-r^2}}{\cos^2 \sqrt{1-r^2}}$$

$$= 4\pi \tan 1$$

四、两类曲面积分的联系

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx} \right. \\ & \quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} \right] \end{aligned}$$

↓ 曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$\begin{aligned} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i \right. \\ & \quad \left. + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i \right] \Delta S_i \\ &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \end{aligned}$$



$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

$$= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{令 } \vec{A} = (P, Q, R), \vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ \vec{dS} = \vec{n} dS = (dydz, dzdx, dxdy) \end{array} \right.$$

向量形式 $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \vec{A} \cdot \vec{n} \text{ (} \vec{A} \text{ 在 } \vec{n} \text{ 上的投影)} \\ = \iint_{\Sigma} A_n dS \end{array} \right.$$

例4. 位于原点电量为 q 的点电荷产生的电场为

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r} = \frac{q}{r^3} (x, y, z) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

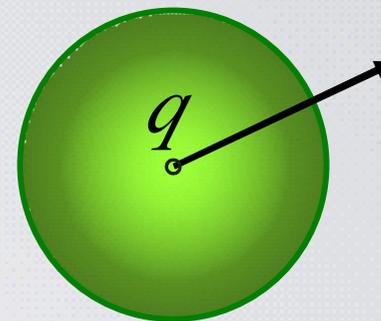
求 \vec{E} 通过球面 $\Sigma: r = R$ 外侧的电通量 Φ .

解: $\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS}$

$$= \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dS$$

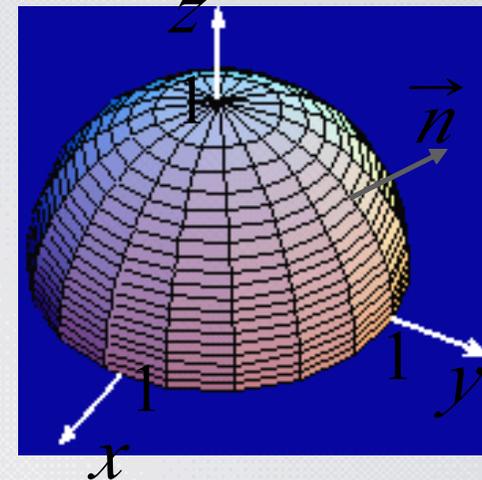
$$= \iint_{\Sigma} \frac{q}{r^2} dS = \frac{q}{R^2} \iint_{\Sigma} dS$$

$$= 4\pi q$$

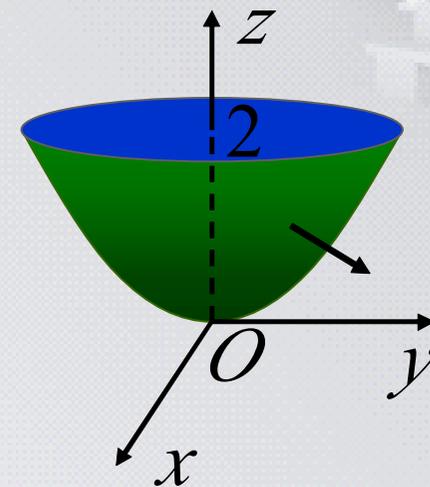


例5. 设 $\Sigma : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I = \iint_{\Sigma} z^2 \cos \gamma \, dS$.

解:
$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} z^2 \cos \gamma \, dS \\ &= \iint_{\Sigma} z^2 \, dx \, dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



例6. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$, 其中 Σ 旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz \\ &= \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \cos \alpha dS \\ &= \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = \iint_{\Sigma} [(z^2 + x)(-x) - z] dx dy$$

将 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 代入, 得

$$\text{原式} = - \iint_{D_{xy}} \left\{ \left[\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + x \right] (-x) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} r^2 \right) r dr$$

$$= 8\pi$$

