第四节 对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念与性质

二、对面积的曲面积分的计算法

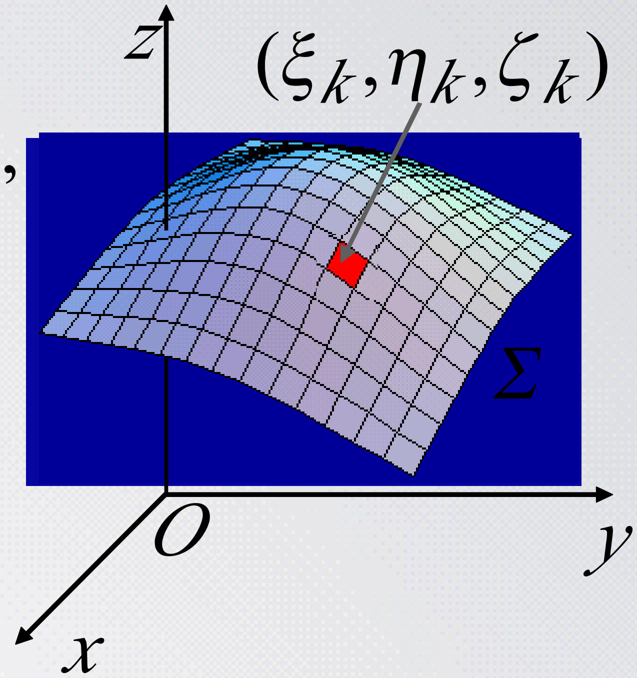
一、对面积的曲面积分的概念与性质

引例：设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x, y, z)$，求质量 M.

类似求平面薄板质量的思想，采用

"大化小，常代变，近似和，求极限"

的方法，可得



$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k$$

其中，λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

定义：设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对Σ 做任意分割和局部区域任意取点, “乘积和式极限”

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分 或第一类曲面积分. 其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

曲面面积为 $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似.

- 积分的存在性. 若$f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上连续, 则对面积的曲面积分存在.
- 对积分域的可加性. 若Σ是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1,Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

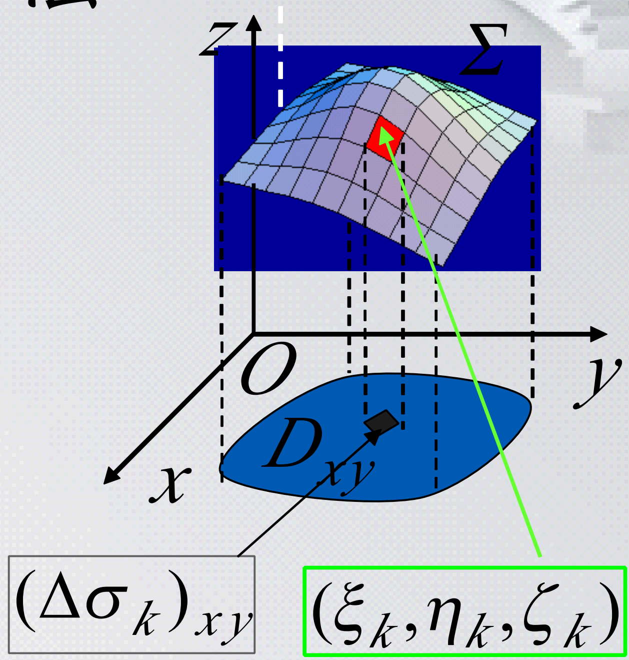
- 线性性质. 设k_1,k_2为常数,则

$$\iint_{\Sigma}[k_1 f(x,y,z)\pm k_2 g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S$$
$$=k_1\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S\pm k_2\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

二、对面积的曲面积分的计算法

定理：设有光滑曲面

$$\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$



$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分

$\iint_\Sigma f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$ 存在, 且有

$$\iint_\Sigma f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明: 由定义知

$$\iint_\Sigma f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$$

目录 上页 下页 返回 结束

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1+z_x^{\ 2}(x,y)+z_y^{\ 2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \sqrt{1+z_x^{\ 2}(\xi_k',\eta_k')+z_y^{\ 2}(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$\therefore \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot$$

$$\sqrt{1+z_x^{\ 2}(\xi_k',\eta_k')+z_y^{\ 2}(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \qquad (\Sigma\text{ 光滑})$$

$$\sqrt{1+z_x^{\ 2}(\xi_k,\eta_k)+z_y^{\ 2}(\xi_k,\eta_k)}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,\ z(x,y)\ )\sqrt{1+z_x^{\ 2}(x,y)+z_y^{\ 2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明:

1) 如果曲面方程为

$$x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$$

或 $$y = y(x, z), (x, z) \in D_{xz}$$

可有类似的公式.

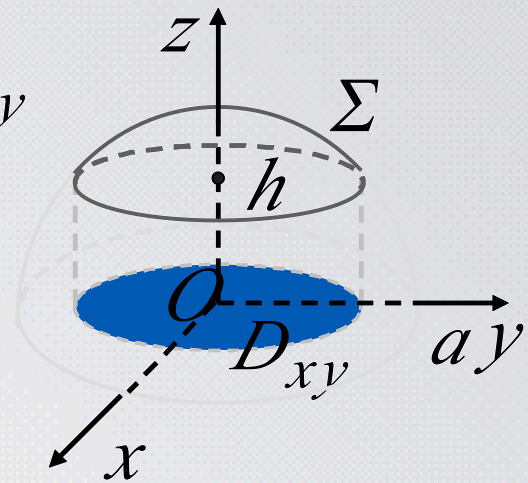
2) 若曲面为参数方程, 只要求出在参数意义下$\mathrm{d}S$的表达式 , 也可将对面积的曲面积分转化为对参数的二重积分.

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \dfrac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

解: $\Sigma : z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\;, (x,y)\in D_{xy}$

$$D_{xy}: x^2+y^2 \le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$



$$\therefore \iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z} = \iint_{D_{xy}} \frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2} = a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{r\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

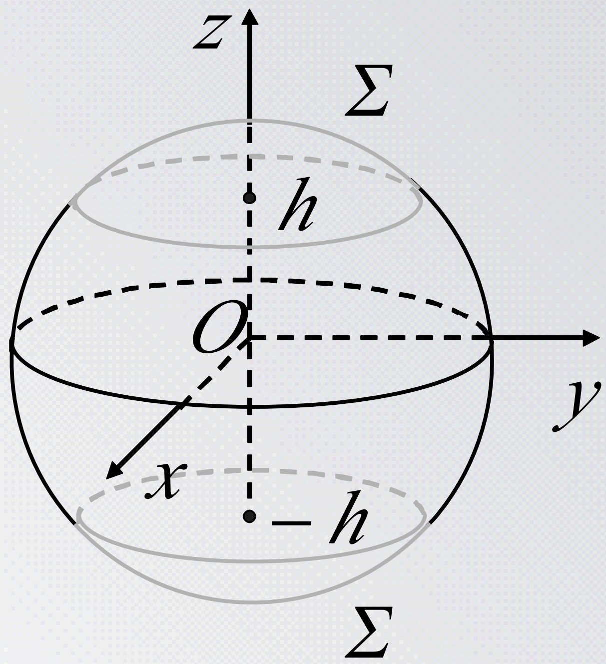
$$= 2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}} = 2\pi a \ln\frac{a}{h}$$

思考:

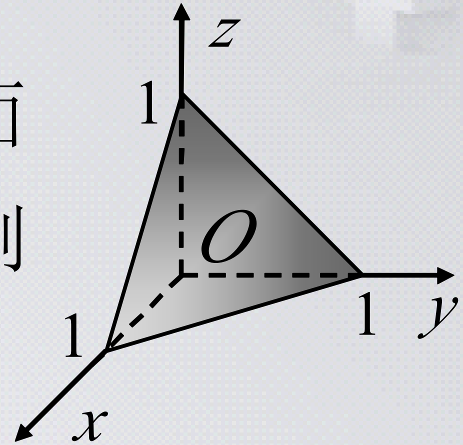
若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分，则

$$\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{z} = (\quad 0 \quad)$$

$$\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{|z|} = (\ 4\pi a \ln\frac{a}{h}\ )$$



例**2.** 计算$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别表示Σ在平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 上的部分, 则

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4}\right) xyz\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

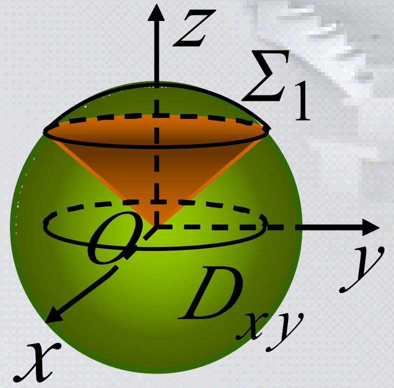
$$\Sigma_4 : z = 1-x-y, \quad (x,y) \in D_{xy} : \begin{cases} 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}/120$$

目录 上页 下页 返回 结束

例3. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{当} z\geq\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & \text{当} z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$



计算 $I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$

解: 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的交线为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2,\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}a.$

设Σ_1为上半球面夹于锥面间的部分,它在 xOy 面上的投影域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq\frac{1}{2}a^2\}$,则

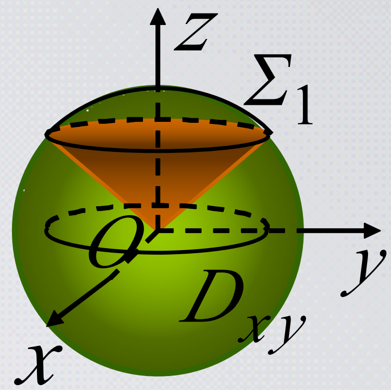
$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$I = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a} \frac{a\,r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{6}\pi a^4 (8 - 5\sqrt{2})$$



思考: 若例3 中被积函数改为

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{当} \left| z \right| \ge \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0, & \text{当} \left| z \right| < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

计算结果如何 ?

例4. 求半径为R的均匀半球壳 Σ 的重心.

解： 设 Σ 的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\ (x,y)\in D_{xy}$

利用对称性可知重心的坐标 $\bar{x}=\bar{y}=0$,而

$$\bar{z}=\frac{\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma \mathrm{d}S}$$

用球面坐标

$z=R\cos\varphi$

$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}$$

思考题： 例 3 是否可用球面坐标计算 ?

例5. 计算$I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\lambda-z}\ (\lambda>R),\ \Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2.$

解: 取球面坐标系, 则 $z=R\cos\varphi,$

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\varphi}{\lambda-R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi R\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\lambda-R\cos\varphi)}{\lambda-R\cos\varphi}$$

$$=2\pi R\ln\frac{\lambda+R}{\lambda-R}$$

例6. 计算 $I=\oiint_\Sigma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$.

解: 显然球心为 $(1,1,1)$, 半径为 $\sqrt{3}$

利用对称性可知 $\oiint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma y^2\,\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma z^2\,\mathrm{d}S$

$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}\oiint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\oiint_\Sigma (x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$\oiint_\Sigma x\,\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma y\,\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma z\,\mathrm{d}S$$

$$=4\oiint_\Sigma x\,\mathrm{d}S=4\cdot\bar{x}\cdot\oiint_\Sigma \mathrm{d}S$$

$$=4\cdot 1\cdot 4\pi(\sqrt{3})^2=48\pi$$

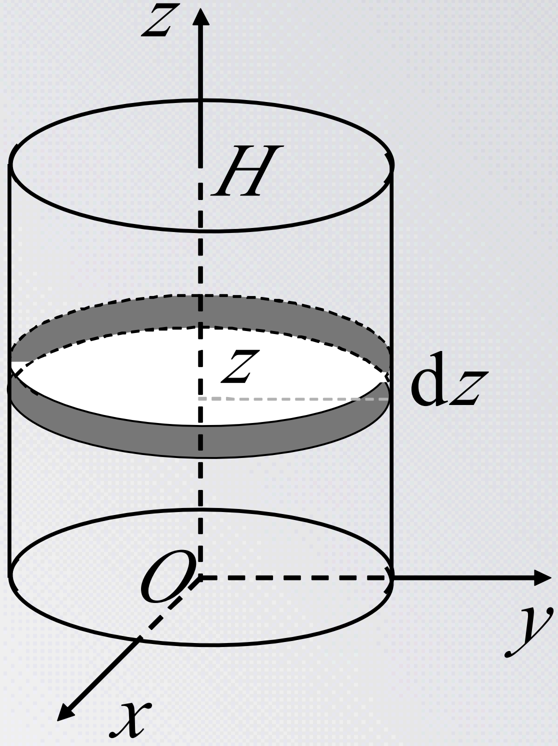
利用重心公式

$$\bar{x}=\oiint_\Sigma x\,\mathrm{d}S\Big/\oiint_\Sigma \mathrm{d}S$$

例7. 计算$I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是介于平面

$z=0,\ z=H$之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

分析：若将曲面分为前后(或左右)两片，则计算较繁.



解：取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S=2\pi R\mathrm{d}z$$

则

$$I=\int_0^H\frac{2\pi R\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

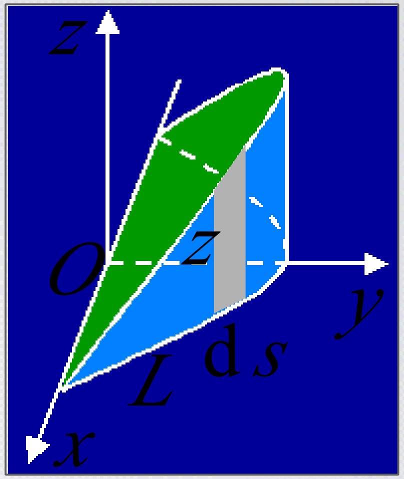
$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

例8. 求椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 位于 xOy 面上方及平面 $z=y$ 下方那部分柱面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的侧面积 S.

解: $S=\iint_\Sigma \mathrm{d}S$

$L: x=\sqrt{5}\cos t,\ y=3\sin t\ \ (0\le t\le \pi)$

取 $\mathrm{d}S=z\,\mathrm{d}s$

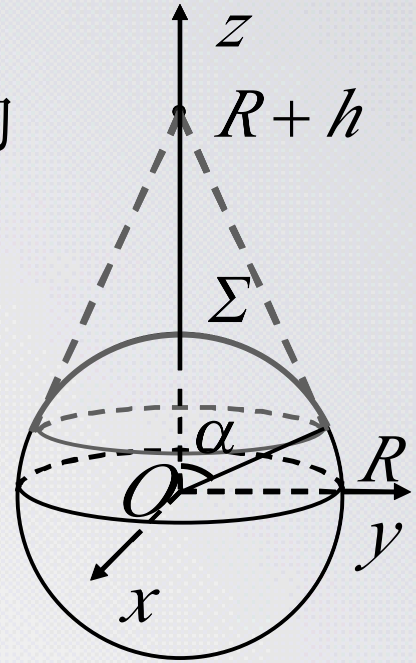


$$=\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_L y\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^\pi 3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=-3\int_0^\pi\sqrt{5+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}\cos t=9+\frac{15}{4}\ln 5$$

例**9.** 设有一颗地球同步轨道通讯卫星，距地面高度 $h=36000\text{ km}$，运行的角速度与地球自转角速度相同，试计算该通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比.（地球半径 $R=6400\text{ km}$）



解： 建立坐标系如图，记覆盖曲面 Σ 的半顶角为 α，利用球面坐标系，则

$$\mathrm{d}S = R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

卫星覆盖面积为

$$A=\iint_\Sigma \mathrm{d}S = R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

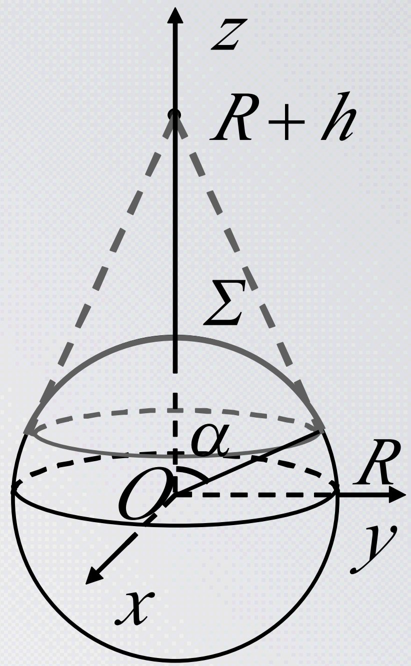
$$=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi R^2\frac{h}{R+h}$$

$$\cos\alpha=\frac{R}{R+h}$$

故通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比为

$$\frac{A}{4\pi R^2} = \frac{h}{2(R+h)}$$

$$= \frac{36\cdot 10^6}{2(36+6.4)\cdot 10^6} \approx 40.5\,\%$$



由以上结果可知, 卫星覆盖了地球 $1/3$ 以上的面积, 故使用三颗相隔 $2\pi/3$ 角度的通讯卫星就几乎可以覆盖地球全表面.

说明: 此题也可用二重积分求 A.