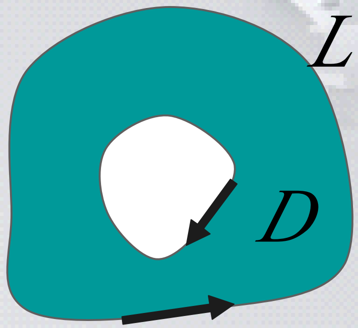
第三节 格林公式及其应用

一、格林公式

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

*三、全微分方程

一、 格林公式



区域 D 分类 $\begin{cases} \text{单连通区域 (无“洞”区域)} \\ \text{多连通区域 (有“洞”区域)} \end{cases}$

域 D 边界 L 的正向：域的内部靠左

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \quad \text{(格林公式)}$$

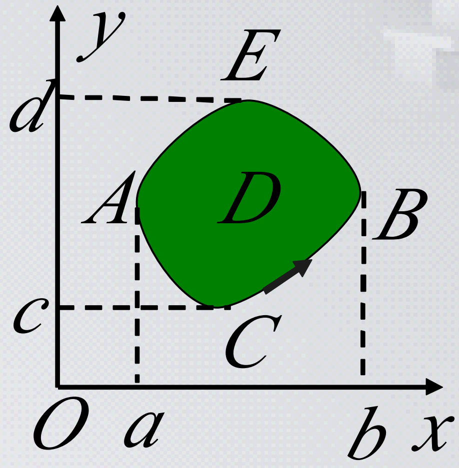
或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明：1) 若D既是X-型区域，又是Y-型区域，且

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



则 $$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overset{\frown}{CAE}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{EAC}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

即 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad ①$$

同理可证

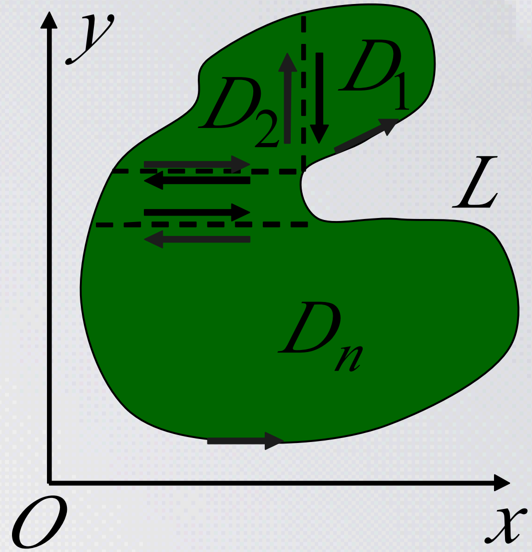
$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad ②$$

①、②两式相加得:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

2) 若D不满足以上条件，则可通过加辅助线将其分割

为有限个上述形式的区域，如图



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial D_k} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \qquad (\partial D_k\text{表示}D_k\text{的正向边界})$$

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

证毕

格林公式 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

推论: 正向闭曲线 *L* 所围区域 *D* 的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

例如, 椭圆 $L: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 所围面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = \pi ab$$

例1. 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

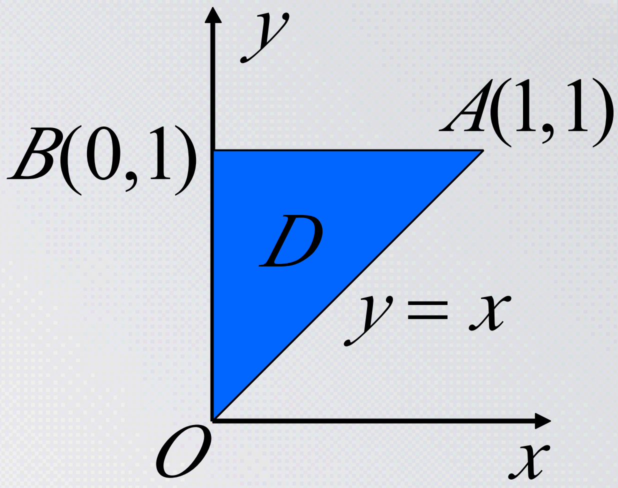
证: 令 $P = 2xy,\ Q = x^2$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

利用格林公式 , 得

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

例2. 计算 $\iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy$, 其中 D 是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭域 .



解: 令 $P=0,\ Q=xe^{-y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$$

利用格林公式 , 有

$$\iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy=\oint_{\partial D} xe^{-y^2}\,dy$$

$$=\int_{\overline{OA}} xe^{-y^2}\,dy=\int_0^1 ye^{-y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

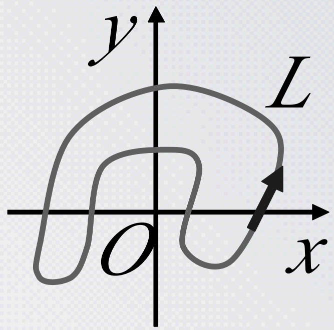
例**3.** 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解: 令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$

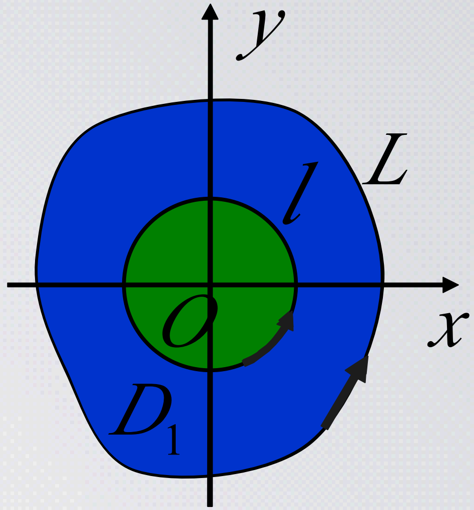
则当$x^2+y^2\neq 0$时, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

设 L 所围区域为D, 当$(0,0)\notin D$时, 由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$$



当$(0,0)\in D$时, 在D内作圆周 $l: x^2+y^2=r^2$, 取逆时针方向, 记L和l^-所围的区域为 D_1, 对区域D_1应用格林公式, 得



$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\oint_{L\cup l^-} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\therefore\quad \oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta=2\pi$$

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定理2. 设 D 是单连通域，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

(1) 沿 D 中任意光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

(2) 对 D 中任一分段光滑曲线 L，曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与起止点有关.

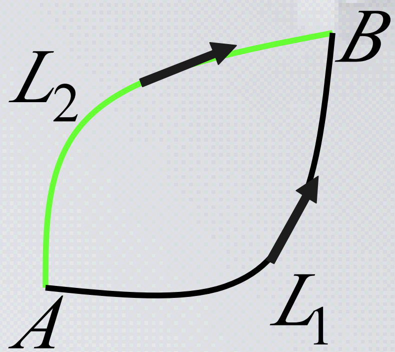
(3) $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 D 内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，即

$$\mathrm{d}u(x,y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)

设 L_1, L_2 为D 内任意两条由A 到B 的有向分段光滑曲线, 则



$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_2^-} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{L_1\cup L_2^-} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0 \qquad \text{(根据条件(1))}$$

$$\therefore \int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

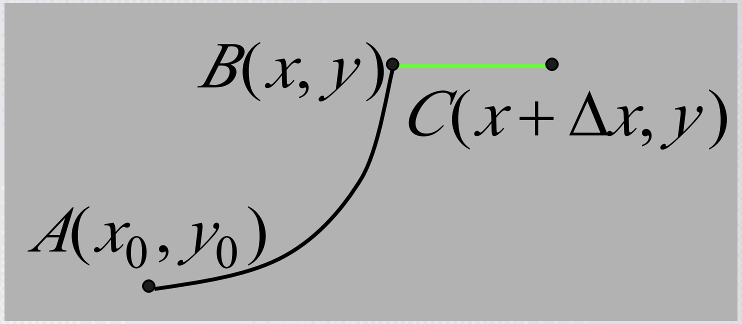
说明: 积分与路径无关时, 曲线积分可记为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

证明 (2) $\Rightarrow$ (3)

在D内取定点$A(x_0, y_0)$和任一点$B(x, y)$, 因曲线积分与路径无关, 有函数

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$



则 $$\Delta_x u=u(x+\Delta x,y)-u(x,y)$$

$$=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,\mathrm{d}x$$

$$=P(x+\theta\,\Delta x,y)\Delta x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\,\Delta x,y)=P(x,y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$, 因此有 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

证明 (3) $\Rightarrow$ (4)

设存在函数 $u(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

则
$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

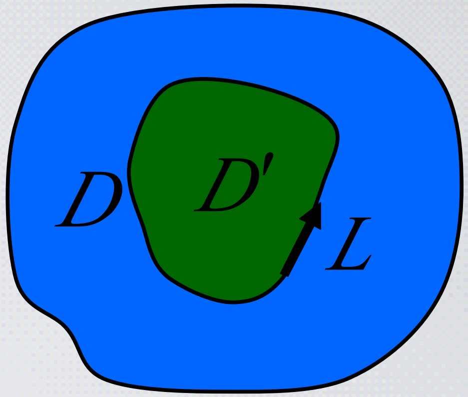
P, Q 在 D 内具有连续的偏导数, 所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

从而在D内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

证明 (4) $\Rightarrow$ (1)

设L为D中任一分段光滑闭曲线, 所围区域为 $D' \subset D$ (如图) , 因此在 D' 上

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$



利用格林公式 , 得

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{D'} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

证毕

---

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(1) 沿D中任意光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

说明：根据定理2，若在某区域D内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则

1) 计算曲线积分时，可选择方便的积分路径；

2) 求曲线积分时，可利用格林公式简化计算，

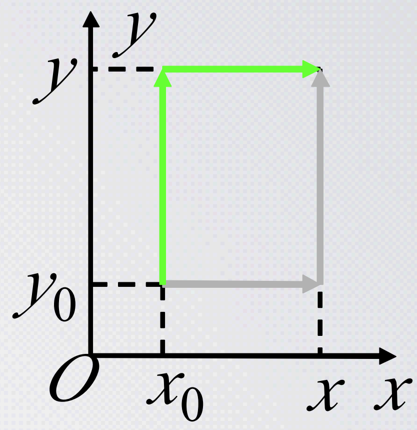
若积分路径不是闭曲线，可添加辅助线；

3) 可用积分法求 $\mathrm{d}\,u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 在域 D 内的原函数：

取定点 $(x_0,y_0)\in D$ 及动点 $(x,y)\in D$，则原函数为

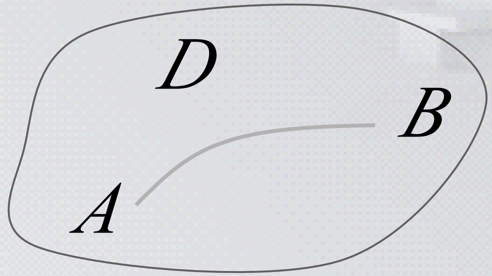
$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$$



或 $$u(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x$$

4) 若已知 $\mathrm{d}\,u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, 则对$D$内任一分段光滑曲线 $\overset{\frown}{AB}$, 有



$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_A^B P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_A^B \mathrm{d}\,u = u\Big|_A^B = u(B) - u(A)$$

注: 此式称为曲线积分的基本公式.

它类似于微积分基本公式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}F(x) \qquad (\text{其中 } F'(x) = f(x)\,)$$

$$= F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

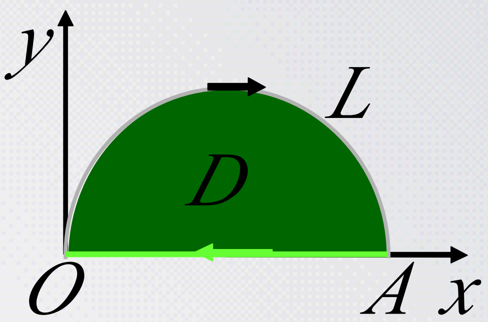
例4. 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(4,0)$.

解: 为了使用格林公式, 添加辅助线段 $\overline{AO}$,它与L 所围区域为D, 则

$$原式=\oint_{L\cup\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$$

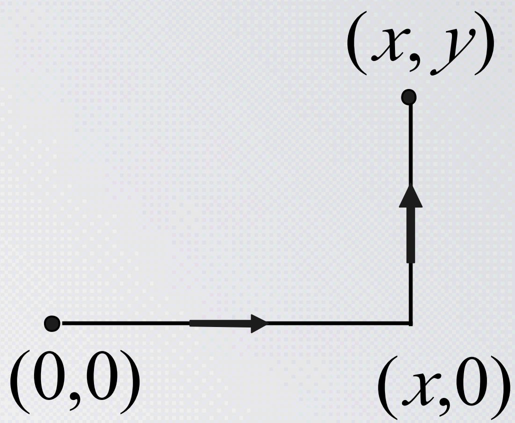


例5. 验证 $xy^2\,\mathrm{d}x + x^2 y\,\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分, 并求出这个函数.

证: 设 $P = xy^2$, $Q = x^2 y$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

由定理2 可知, 存在函数 $u(x, y)$ 使

$$\mathrm{d}u = xy^2\,\mathrm{d}x + x^2 y\,\mathrm{d}y$$

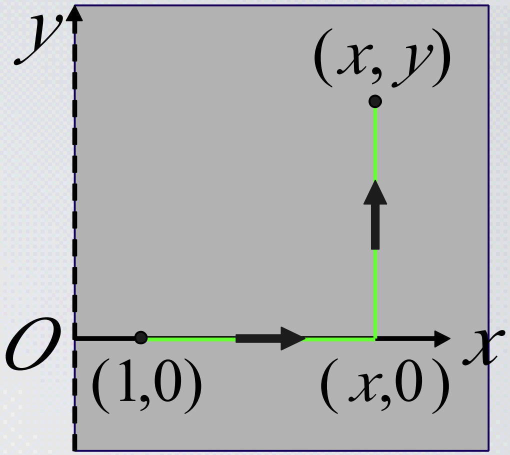


$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\,\mathrm{d}x + x^2 y\,\mathrm{d}y$$

$$= 0 + \int_0^y x^2 y\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^y x^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}x^2 y^2$$

例6. 验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面 ($x>0$) 内存在原函数 , 并求出它.



证: 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial y}\quad (x>0)$$

由定理 2 可知存在原函数

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=0+x\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}\qquad (x>0)$$

或

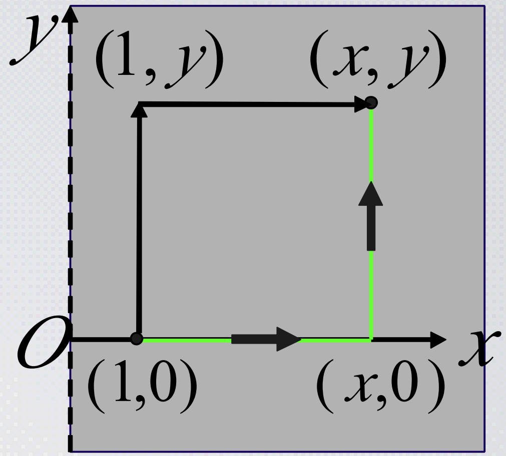
$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}-y\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\arctan y+\arctan\frac{1}{y}-\arctan\frac{x}{y}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}$$

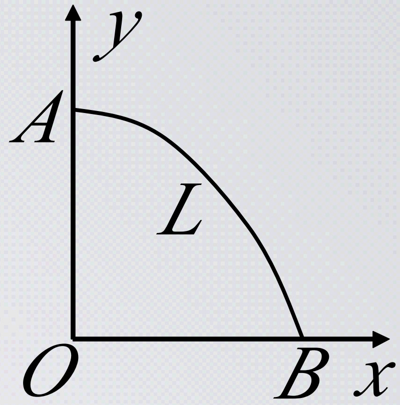
$$=\arctan\frac{y}{x}\quad(x>0)$$



例7. 设质点在力场 $\vec{F}=\frac{k}{r^2}(y,-x)$ 作用下沿曲线 L:

$y=\frac{\pi}{2}\cos x$ 由 $A(0,\frac{\pi}{2})$ 移动到 $B(\frac{\pi}{2},0)$, 求力场所作的功 W

(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$).



解: $W=\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_L \frac{k}{r^2}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$

令 $P=\frac{ky}{r^2},\ Q=-\frac{kx}{r^2}$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{k(x^2-y^2)}{r^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x^2+y^2\neq 0)$$

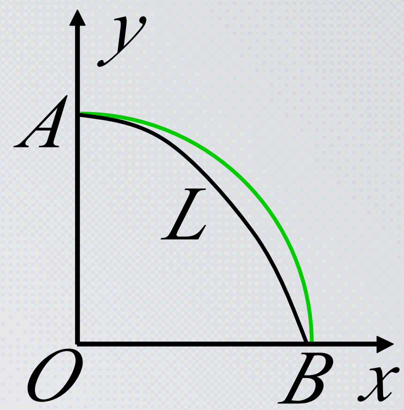
可见, 在不含原点的单连通区域内积分与路径无关.

取圆弧 $\overset{\frown}{AB}$: $x=\frac{\pi}{2}\cos\theta,\ y=\frac{\pi}{2}\sin\theta\ \ (\theta:\frac{\pi}{2}\to 0)$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$$

$$=k\int_{\pi/2}^{0}-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}k$$



思考: 积分路径是否可以取 $\overline{AO}\cup\overline{OB}$? 为什么?

注意, 本题只在不含原点的单连通区域内积分与路径无关!

*三、全微分方程

若存在 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

则称
$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \qquad ③$$
为全微分方程.

判别： P,Q 在某单连通域D内有连续一阶偏导数, 则

$$③\text{为全微分方程} \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad (x,y)\in D$$

求解步骤:

1. 求原函数 $u(x,y)$

   方法1　凑微分法;

   方法2　利用积分与路径无关的条件.

2. 由 $\mathrm{d}u=0$ 知通解为 $u(x,y)=C$.

例8. 求解

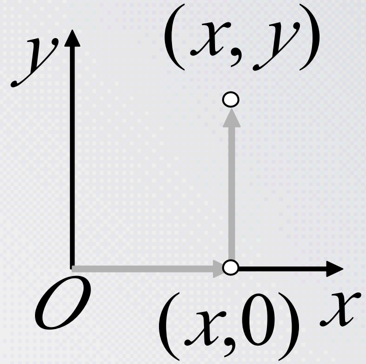
$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解: 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 故这是全微分方程.

法1 取 $x_0=0,\ y_0=0$, 则有

$$u(x,y)=\int_0^x 5x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$



因此方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

法2 此全微分方程的通解为 $u(x,y)=C$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4+3xy^2-y^3 \quad ④$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+y^2 \quad ⑤$$

由④得 $u(x,y)=\int(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+\varphi(y)$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\varphi(y),\quad \varphi(y)\text{待定}$$

两边对 y 求导得 $\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+\varphi'(y)$

与⑤比较得 $\varphi'(y)=y^2$，取 $\varphi(y)=\frac{1}{3}y^3$

因此方程的通解为 $x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$

例9. 求解 $(x+\frac{y}{x^2})\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\mathrm{d}y=0$

解: $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\therefore$ 这是一个全微分方程 .

用凑微分法求通解. 将方程改写为

$$x\mathrm{d}x-\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

即 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)-\mathrm{d}(\frac{y}{x})=0$, 或 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x})=0$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x}=C$