第十一章
曲线积分与曲面积分

积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区　间	平面域	空间域	曲线弧	曲面域

曲线积分 $\begin{cases} \text{对弧长的曲线积分} \\ \text{对坐标的曲线积分} \end{cases}$

曲面积分 $\begin{cases} \text{对面积的曲面积分} \\ \text{对坐标的曲面积分} \end{cases}$

第一节
对弧长的曲线积分

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

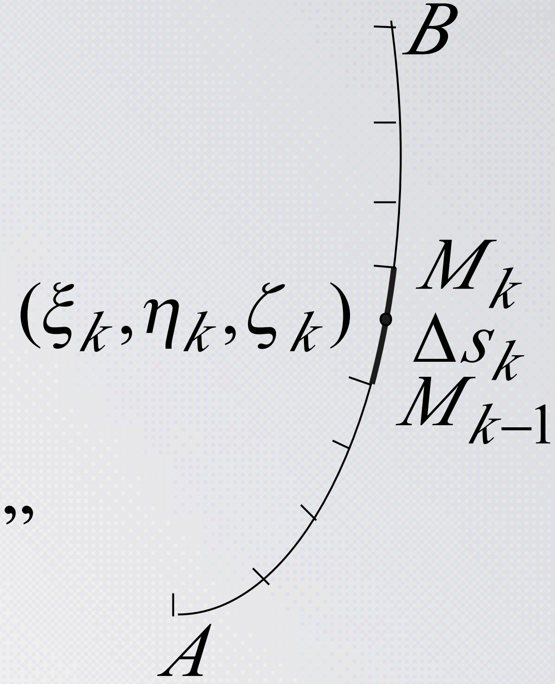
二、对弧长的曲线积分的计算法

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

1. 引例：曲线形构件的质量

假设曲线形细长构件在空间所占弧段为$\overset{\frown}{AB}$，其线密度为$\rho\,(x, y, z)$，为计算此构件的质量，采用

“大化小，常代变，近似和，求极限”

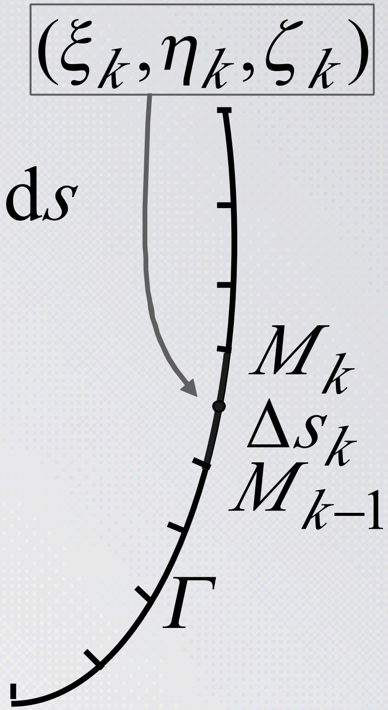


可得

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho\,(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta s_k$$

2. 定义

设 Γ 是空间中一条有限长的光滑曲线, $f(x,y,z)$是定义在 Γ 上的一个有界函数,若通过对 Γ 的任意分割 和对局部的任意取点, 下列“乘积和式极限”



$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k \overset{\text{记作}}{=} \int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$在曲线 Γ 上对弧长的曲线积分, 或第一类曲线积分.
$f(x,y,z)$称为被积函数, Γ 称为积分弧段 .

曲线形构件的质量 $M=\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

如果 L 是 xOy 面上的曲线弧, 则定义对弧长的曲线积分为

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

如果 L 是闭曲线, 则记为 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s.$

思考:

(1) 若在 L 上 $f(x,y)\equiv 1$, 问 $\int_L \mathrm{d}s$ 表示什么?

(2) 定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例 ?

否! 对弧长的曲线积分要求 $\mathrm{d}s \geq 0$, 但定积分中 $\mathrm{d}x$ 可能为负.

3. 性质

(1) $\int_{\Gamma}[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]\mathrm{d}s$

$$=\alpha\int_{\Gamma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}s+\beta\int_{\Gamma}g(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

（α,β 为常数)

(2) $\int_{\Gamma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_1}f(x,y,z)\,\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

(Γ 由 Γ_1 , Γ_2 组成)

(3) 设在 Γ 上 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$, 则

$$\int_{\Gamma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}s\le\int_{\Gamma}g(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

(4) $\int_{\Gamma}\mathrm{d}s=l$ (l 为曲线弧 Γ 的长度)

二、对弧长的曲线积分的计算法

基本思路：求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 计算定积分

定理：设 $f(x,y)$ 是定义在光滑曲线弧

$$L: x=\varphi(t), y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

上的连续函数，则曲线积分 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 存在，且

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

证：根据定义

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

设各分点对应参数为 $t_k\,(k=0,1,\cdots,n)$,

点 (ξ_k,η_k) 对应参数为 $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$,

$$\Delta s_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k,\quad \tau_k'\in[t_{k-1},t_k]$$

则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\underline{\tau_k'})+\psi'^2(\underline{\tau_k'})}\,\Delta t_k$$

注意 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 连续

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}\,\Delta t_k$$

因此

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

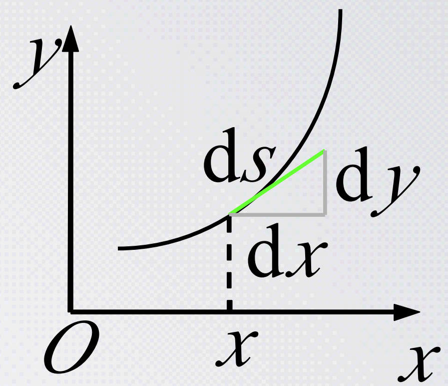
说明:

(1) $\because \Delta s_k > 0, \therefore \Delta t_k > 0$, 因此积分限必须满足 $\alpha < \beta$!

(2) 注意到

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$



因此上述计算公式相当于“换元法”.

如果曲线 L 的方程为 $y=\psi(x)\ (a\le x\le b)$,则有

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

如果方程为极坐标形式: $L: r=r(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$,则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

推广: 设空间曲线弧的参数方程为

$$\Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$$

则 $\displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例1. 计算$\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$,其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 与点 $B(1,1)$ 之间的一段弧 .

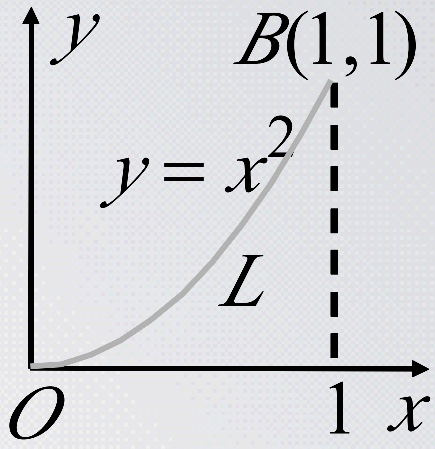
解: $\because L: y=x^2 \quad (0\le x\le 1)$

$$\therefore \int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

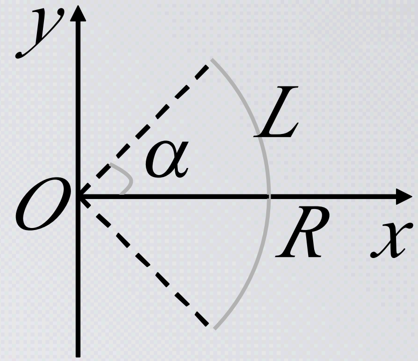
$$=\left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$



例2. 计算半径为 R，中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I（设线密度 $\mu = 1$）.

解： 建立坐标系如图，则



$$I = \int_L y^2 \, \mathrm{d}s$$

$$L: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha \le \theta \le \alpha)$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2} \, \mathrm{d}\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta = 2R^3 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\alpha}$$

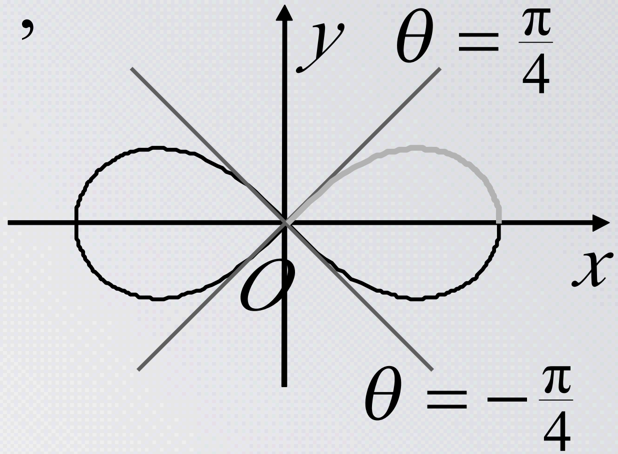
$$= R^3 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)$$

例**3.** 计算 $I=\int_L |x|\,\mathrm{d}s$, 其中$L$为双纽线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a>0)$$

解: 在极坐标系下 $L: r^2=a^2\cos 2\theta$,

它在第一象限部分为



$$L_1: r=a\sqrt{\cos 2\theta}\quad(0\le\theta\le{}^{\pi}\!/_{4})$$

利用对称性，得

$$I=4\int_{L_1} x\,\mathrm{d}s=4\int_0^{\pi/4} r\cos\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/4} a^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\,a^2$$

例4. 计算曲线积分$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, 其中$\Gamma$为螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt\ (0\le t\le 2\pi)$的一段弧.

解: $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2]\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}[a^2+k^2t^2]\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}\,(3a^2+4\pi^2k^2)$$

例5. 计算$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}\,s$, 其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周.

解: 由对称性可知 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s$

$$\therefore\quad \oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{3}\oint_\Gamma a^2\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3$$

目录 上页 下页 返回 结束

思考: 例5中Γ改为$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$, 如何计算$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$?

解: 令$\begin{cases}X=x-1\\ Y=y+1\\ Z=z\end{cases}$, 则 $\Gamma:\begin{cases}X^2+Y^2+Z^2=a^2\\ X+Y+Z=0\end{cases}$

$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma (X+1)^2\,\mathrm{d}s$$

利用形心公式

$$=\oint_\Gamma X^2\,\mathrm{d}s+2\oint_\Gamma X\,\mathrm{d}s+\oint_\Gamma \mathrm{d}s$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3+2\cdot\overline{X}\cdot 2\pi a+2\pi a$$

$$=2\pi a\left(\frac{1}{3}a^2+1\right)$$

圆Γ的形心在原点, 故 $\overline{X}=0$

例6. 计算 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面 $x+z=1$ 的交线.

解: $\Gamma:\begin{cases}\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}y^2=1\\ x+z=1\end{cases}$，化为参数方程

$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\\ y=2\sin\theta\\ z=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}\qquad(0\le\theta\le2\pi)$$

则

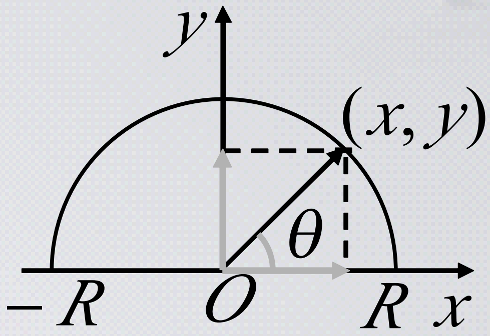
$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\qquad I=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\,\mathrm{d}\theta=18\pi$$

例7. 有一半圆弧 $y = R\sin\theta,\ x = R\cos\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$, 其线密度 $\mu = 2\theta$, 求它对原点处单位质量质点的引力.

解: $\mathrm{d}F_x = k\dfrac{\mu\,\mathrm{d}s}{R^2}\cos\theta = \dfrac{2k}{R}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$\mathrm{d}F_y = k\frac{\mu\,\mathrm{d}s}{R^2}\sin\theta = \frac{2k}{R}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$



$$F_x = \frac{2k}{R}\int_0^{\pi}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2k}{R}\Big[\,\theta\sin\theta + \cos\theta\,\Big]_0^{\pi} = -\frac{4k}{R}$$

$$F_y = \frac{2k}{R}\int_0^{\pi}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2k}{R}\Big[\,-\theta\cos\theta + \sin\theta\,\Big]_0^{\pi} = \frac{2k\pi}{R}$$

故所求引力为 $\vec{F} = \left(-\dfrac{4k}{R},\ \dfrac{2k\pi}{R}\right)$