

doi: 10.3788/gzxb20154401.0126002

各向异性介质波导不连续问题的 半解析谱单元法分析

杨红卫, 王改页, 黄翠莺

(北京工业大学 应用数理学院, 北京 100124)

摘 要: 将谱单元法与精细积分法相结合求解各向异性介质的波导不连续问题. 从矢量波动方程的单变量变形式出发, 采用基于 Gauss-Lobatto-Legendre 多项式零点作为插值结点的谱单元, 对含有各向异性介质波导的横截面进行离散, 然后将问题导入哈密顿体系利用精细积分法进行求解. 由于采用了谱单元法, 在单元网格数较少时, 可获得高准确度的计算结果; 又由于利用了精细积分法, 结构的纵向长度可以任意设定, 克服了当人工边界设置在离介质块较远处时, 计算量不断增加的缺点. 研究表明半解析谱单元法可有效地应用于各向异性介质的波导不连续问题, 在提高准确度的同时可大量节省计算时间.

关键词: 波导不连续性; 各向异性; 谱单元; 精细积分法; 有限元法; 哈密顿体系; Gauss-Lobatto-Legendre 多项式

中图分类号: O441.4

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2015)01-0126002-6

Analysis of Waveguide Discontinuities with Anisotropic Dielectric by Semi-analytical Spectral Element Method

YANG Hong-wei, WANG Gai-ye, HUANG Cui-ying

(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The spectral element combined with precise integration method was used to simulate and analyze the waveguide discontinuities with anisotropic dielectric. With the variational principle based on single variable corresponding to the vector wave equation, spectral elements, a special type of higher order finite element with sampling points defined as the Gauss-Lobatto-Legendre points, were employed to discretize the cross section of the waveguide structure, which contains anisotropic dielectric. Then the semidiscretized problem was cast into Hamilton system and sloved by the precision integration method. With adopting the spectral elements, high precision of calculation results can be obtained under the low number of unit grids; With the precise integration method, the longitudinal length of structure can be set arbitrarily. It can overcome the weakness of increasing computation amounts as lengthening the distance from artificial boundary to dielectric block. Results show that semi-analytical spectral element method can be used to effectively solve waveguide discontinuities problems, which contains anisotropic dielectric. The proposed methods is demanstrated to solve waveguide discontinuities problems with high computational accuracy and efficiency.

Key words: Waveguide discontinuity; Anisotropic; Spectral element; Precise integration method; Finite element method; Hamilton system; Gauss-Lobatto-Legendre polynomials

OCIS Codes: 260.0260, 260.2110, 260.2710

基金项目: 国家自然科学基金 (Nos. 11172008, 11272020)、北京工业大学基础研究基金 (No. 006000514313003) 和北京工业大学第 12 届研究生科技基金 (No. ykj-2013-10168) 资助

第一作者: 杨红卫 (1967-), 女, 副教授, 博士, 主要研究方向为计算物理. Email: yanghongwei@bjut.edu.cn

收稿日期: 2014-06-23; **录用日期:** 2014-09-02

<http://www.photon.ac.cn>

0 引言

不连续结构波导被广泛地应用于光学、微波以及毫米波器件中,分析波导不连续问题中传输波与反射波的能量分配对各类器件的设计具有重要的理论指导作用^[1-2].介质的不连续性是众多不连续问题中的一种,由各向异性介质填充的波导在微波元器件、隐身技术、新型天线中有着广泛和潜在的应用价值,因此研究含各向异性介质的波导不连续问题具有重要的实际意义^[3-6].

对于波导不连续问题,常见的数值模拟方法有模式匹配法(Mode Matching Method, MMM),时域有限差分法(Finite-Different Time-Domain method, FDTD),矩量法(Method Of Moments, MOM)和有限元法(Finite Element Method, FEM)等.文献[7-8]利用 MMM 分别对 H 面不连续波导和单 E 面不连续性的矩形波导滤波器结构进行了分析,分析中考虑了高次模的相互影响,计算结果精确,但主要适合分析具有规则几何结构的器件;文献[9]将 FDTD 法应用于不连续矩形波导的分析,计算了在主模激励下波导的 S 散射参数,但需要有足够多的迭代步数;文献[10]利用 MOM 求解了一维几何结构不连续的波导问题,且能有效避免数值色散,但计算过程中矩阵为稠密矩阵,求解二维以上的问题非常困难;文献[11]用 FEM 模拟了几何不连续的脊波导,有限元作为一种强大的数值计算方法,具有很强的适用性,处理不同几何和复杂问题非常有效,但因为有限单元的离散性,当网格单元不够精细时,其计算准确度不大理想,通过加密网格单元或提高单元阶数,可以提高计算准确度,但这样会导致计算量大幅增加或出现伪解,计算效率大大降低;文献[12]将半解析有限元法(Semi-Analytical Finite Element Method, SAFEM)运用到各向异性介质波导不连续性问题中,有效地避免了计算量增加,具有高精度的特点.文献[13]利用精细积分法与谱单元法相结合的半解析谱单元法(Semi-Analytical Spectral Element Method, SASEM)成功模拟了一种由十个相同不连续波导组成的滤波器的散射特性.谱单元法是一种特殊类型的高阶有限元方法,其基函数的插值结点采用 Gauss-Lobatto-Legendre(GLL)多项式的零点,既具备有限元几何灵活性,又可通过提高谱单元基函数的阶数来获得谱准确度.精细积分法是一种被认为能得到计算机上解析解的高效数值积分方法.结合这两种方法求解电磁学问题,具有很高的计算效率和计算准确度,但一般只考虑含各向同性介质的情形.

本文利用半解析谱单元法求解含各向异性介质波导不连续问题,从矢量波动方程的单变量变分形式出发,采用基于勒让德正交多项式的谱单元对横截面进

行离散,得到各向异性介质情形下谱单元离散系数矩阵,沿纵向采用精细积分法,求出出口刚度矩阵,结合边界条件最终求解问题.利用半解析谱单元法对含各向异性介质块的矩形不连续波导进行模拟,并与常规有限元法、半解析有限元法进行比较,利用计算误差判断其准确度,表明本文方法能有效地求解各向异性介质波导不连续问题,既能发挥谱单元法高准确度的优势,又能克服当人工边界设置在离介质块较远处时计算量不断增加的缺点.

1 基本原理

1.1 含各向异性介质波导的单变量变分原理

考察含各向异性介质的电磁波导.将波导中沿纵向均匀的每个区段视为一个子结构.对于每个子结构,波动方程为

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\boldsymbol{\mu}} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} = 0 \quad \text{in } \Omega \times [z_a, z_b] \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 分别是相对介电系数和相对导磁系数, k_0 是真空中波数. Ω 为子结构的横截面,两个端面的轴坐标分别为 z_a 和 z_b .假设子结构周向为理想导体边界条件(Perfect Electric Conductor, PEC) $\partial\Omega_1$ 和理想磁体边界条件(Perfect Magnetic Conductor, PMC) $\partial\Omega_2$.

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_1 \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_2 \quad (3)$$

与矢量波动方程相对应的单变量变分原理为^[11]

$$\Pi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_b} \iint_{\Omega} [(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}] d\Omega dz, \delta\Pi(\mathbf{E}) = 0 \quad (4)$$

对于互易的各向异性介质,其相对介电常数张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与相对导磁系数张量 $\boldsymbol{\mu}$ 是对称的,通过适当的坐标系变换,总能将它们表示成对角张量的形式,即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

用 $\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\mu}_i$ 分别表示相对介电系数和相对导磁系数的横向张量,即

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu}_i = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{bmatrix} \quad (6)$$

将式(4)中的变量 \mathbf{E} 拆分为横向分量 \mathbf{E}_t 与纵向分量 E_z .同时拆分矢量算子 ∇ ,并考虑式(6),变分形式可以重新表示为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_b} \iint_{\Omega} [(\nabla_t \times \mathbf{E}_t) \cdot \boldsymbol{\mu}_t^{-1} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) + \frac{1}{\mu_z} (\nabla_t E_z) \cdot (\nabla_t E_z) + \dot{\mathbf{E}} \boldsymbol{\mu}_t^{-1} \cdot \dot{\mathbf{E}} - (\nabla_t E_t) \cdot \boldsymbol{\mu}_t^{-1} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\mu}_t^{-1} \cdot (\nabla_t E_t) - k_0^2 \mathbf{E}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot \mathbf{E}_t - k_0^2 \varepsilon_z E_z \cdot E_z] d\Omega dz \quad (7)$$

式(7)为在考虑各向异性介质情形下用横向分量及纵向分量表示的单变量变分原理.当介电系数和导磁系数张量的各个分量相等时,就过渡到各向同性介质的波导情形.

1.2 谱单元离散以及半解析求解

由于每个子结构沿纵向是均匀的,只需对横截面进行有限元离散,这里采用谱单元方法.谱单元是一种采用 Gauss-Lobatto-Legendre 多项式零点作为插值结点的特殊高阶有限单元.谱单元的插值点不是等距结点,越靠近谱单元边界,其插值点的密度越大,这样能有效避免著名的龙格现象,并且可以达到谱准确度,即随着单元阶数的增加,数值结果呈指数收敛^[14].

如图1,在参考域 $(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ 内,

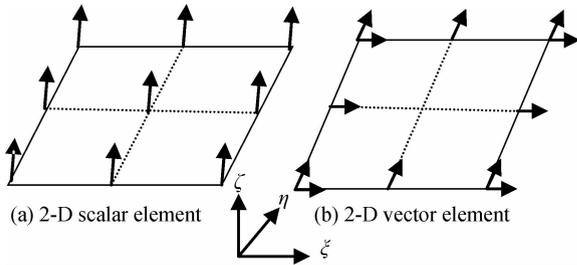


图1 2阶时的谱单元构造

Fig.1 Schematics of spectral elements at $M=2$

二维标量谱单元的 M 阶基函数为^[15]

$$N_z^e(\xi, \eta) = \varphi_m^{(M)}(\xi) \varphi_p^{(M)}(\eta) \quad (8)$$

二维矢量谱单元的基函数包括两个分量

$$N_\xi^e(\xi, \eta) = \hat{\xi} \varphi_m^{(M-1)}(\xi) \varphi_p^{(M)}(\eta) \quad (9)$$

$$N_\eta^e(\xi, \eta) = \hat{\eta} \varphi_m^{(M)}(\xi) \varphi_p^{(M-1)}(\eta) \quad (10)$$

式中,

$$\varphi_m^{(M)}(\xi) = \frac{-(1-\xi^2)L'_M(\xi)}{M(M+1)L_M(\xi_m)(\xi-\xi_m)}, m=0, \dots, M \quad (11)$$

$L_M(\xi)$ 是 M 阶 Legendre 多项式, ξ_m 是第 m 个 Gauss-Lobatto-Legendre 积分点,其值为 $(1-\xi^2)L'_M(\xi)=0$ 的根, $\varphi_p^{(M)}(\eta)$ 与 $\varphi_m^{(M)}(\xi)$ 是不同坐标下的表示.

横向电场利用二维矢量谱单元进行离散,纵向电场利用标量谱单元进行离散,可以表示为

$$\mathbf{E}_t = \sum_{i=1}^{n_t} N_i^e \mathbf{E}_t^e = [\mathbf{N}_t^e]^T \mathbf{E}_t^e \quad (12)$$

$$E_z = \sum_{i=1}^{n_z} N_z^e E_z^e = [N_z^e]^T E_z^e \quad (13)$$

式中 n_t 和 n_z 分别是矢量和标量谱单元的自由度.

将式(12)、(13)代入式(7),得到

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_b} [\mathbf{E}_t^T \mathbf{M}_1 \mathbf{E}_t + E_z^T \mathbf{M}_2 E_z + \dot{\mathbf{E}}_t^T \mathbf{M}_3 \mathbf{E}_t - \dot{\mathbf{E}}_t^T \mathbf{M}_3 \mathbf{E}_t - \dot{E}_z^T \mathbf{M}_4 E_z - E_z^T \mathbf{M}_4 \dot{\mathbf{E}}_t] dz \quad (14)$$

式中系数矩阵

$$\mathbf{M}_1 = \sum_{e=1}^N \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu_z} [\nabla_t \times \mathbf{N}_t^e] \cdot [\nabla_t \times \mathbf{N}_t^e]^T - k_0^2 \mathbf{N}_t^e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_t \cdot [\mathbf{N}_t^e]^T \right] d\Omega \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_2 = \sum_{e=1}^N \iint_{\Omega} \left[[\nabla_t \cdot \mathbf{N}_z^e] \cdot \boldsymbol{\mu}_t^{-1} \cdot [\nabla_t \cdot \mathbf{N}_z^e]^T - k_0^2 \boldsymbol{\varepsilon}_z \cdot \mathbf{N}_z^e \cdot [\mathbf{N}_z^e]^T \right] d\Omega \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_3 = \sum_{e=1}^N \iint_{\Omega} [\mathbf{N}_t^e \cdot \boldsymbol{\mu}_t^{-1} \cdot [\mathbf{N}_t^e]^T] d\Omega \quad (17)$$

$$\mathbf{M}_4 = \sum_{e=1}^N \iint_{\Omega} [\mathbf{N}_t^e \cdot \boldsymbol{\mu}_t^{-1} \cdot [\nabla_t \cdot \mathbf{N}_z^e]^T] d\Omega \quad (18)$$

这里 N 表示横截面上单元的个数.

完成对 E_z^e 的变分,便可以得到 \mathbf{E}_t 用表示的波导区段电磁势能.波导的区段电磁势能应该是两端切向电场向量的二次型函数,表示为

$$\Pi(\mathbf{E}_{t_a}, \mathbf{E}_{t_b}) = \mathbf{E}_{t_a}^T \mathbf{K}_{aa} \mathbf{E}_{t_a} / 2 + \mathbf{E}_{t_b}^T \mathbf{K}_{bb} \mathbf{E}_{t_b} + \mathbf{E}_{t_a}^T \mathbf{K}_{ab} \mathbf{E}_{t_b} / 2 \quad (19)$$

式中, \mathbf{E}_{t_a} 、 \mathbf{E}_{t_b} 分别是给定波导两端的切向电场向量.矩阵 \mathbf{K}_{aa} 、 \mathbf{K}_{ba} 和 \mathbf{K}_{bb} 是子结构的出口刚度矩阵,求出出口刚度矩阵后就可以将各个子结构的出口刚度阵进行组装,得到总的刚度矩阵便可求解整个问题.

求解出口刚度矩阵 \mathbf{K}_{aa} 、 \mathbf{K}_{ba} 和 \mathbf{K}_{bb} 的一个可行思路是引入对偶变量,将问题导入到哈密顿体系,利用精细积分求出出口刚度阵.令对偶变量

$$\mathbf{q} = \mathbf{E}_t, \mathbf{p} = \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (20)$$

通过辛正则化处理,相应的变分原理变为

$$\Pi = \int_{z_a}^{z_b} [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] dz, \delta \Pi = 0 \quad (21)$$

式中

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} / 2 + \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{q} / 2 \quad (22)$$

显然, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 为哈密顿函数,在结构力学中也被称为波导区段的混合能密度, \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 为其相应的系数矩阵.

通过对区段势能的 Legendre 变换,引入区段混合能^[16]

$$\Gamma(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_b) = \mathbf{p}_b^T \mathbf{q}_a - \Pi(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) \quad (23)$$

对式(23)变分可知区段混合能同样也是二次型函数,表达为

$$\Gamma(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_b) = -\mathbf{q}_a^T \mathbf{Q} \mathbf{q}_a / 2 + \mathbf{p}_b^T \mathbf{F} \mathbf{q}_a + \mathbf{p}_b^T \mathbf{G} \mathbf{p}_b / 2 \quad (24)$$

从式(22)、(23)和(24)可知出口刚度矩阵 \mathbf{K}_{aa} 、 \mathbf{K}_{ba} 、 \mathbf{K}_{bb} 与混合能的系数矩阵 \mathbf{Q} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{G} 是可以相互转化的,混合能的系数矩阵 \mathbf{Q} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{G} 可由区段混合能密度矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 积分得到,其关系满足联立 Riccati 微分方程,即

$$\begin{cases} d\mathbf{F}/d\eta = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{B})\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{Q}) \\ d\mathbf{G}/d\eta = \mathbf{D} + \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{A}^T - \mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{D}\mathbf{F}^T \\ d\mathbf{Q}/d\eta = \mathbf{F}^T \mathbf{B} \mathbf{F} = \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} - \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q} \end{cases} \quad (25)$$

式中 $\eta = z_a - z_b$ 为波导子结构的长度. Riccati 微分方程可采用精细积分算法进行求解.精细积分算法的计算准确度可以超过现有计算机字长所决定的准确度范围,从某种程度上来说,即可以得到计算机上的解析

解. 具体利用精细积分求解微分方程的详细推导请参见文献[16], 在此就不再过多赘述. 求出混合能的系数矩阵 \mathbf{Q} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{G} 后, 得到出口刚度矩阵 \mathbf{K}_{aa} 、 \mathbf{K}_{ba} 、 \mathbf{K}_{bb} , 将子结构进行拼装并结合边界条件, 便可求得波的透射特性.

根据能量守恒定律可知, 在无损介质中, 透射率与反射率之和为 1, 即

$$D = 1 - (|R|^2 + |T|^2) \quad (26)$$

式中 R 和 T 分别是反射系数和透射系数. 由于在计算中各种误差的存在, D 值往往不为 0, 而是一个非常小的非零数值. 随着 R 和 T 的值不断地逼近理论真实值, D 也渐渐趋近于 0, 因此 D 的值可用来检验算法的准确度.

2 数值算例及讨论分析

为了验证理论的正确性, 将含各向异性介质的情形退化到各向同性介质, 首先分析含各向同性介质块的矩形波导不连续问题. 以如图 2 的矩形波导为例, 取与文献[2]中算例相同的参数, 波导内部长方体障碍物的相对介电常数 $\epsilon_r = 6$. 利用本文方法计算得到的在不同工作频率下对应于主模 TE_{10} 的反射系数 R 随 $k_0 b$ 的变化曲线如图 3, 与文献[2]结果完全吻合, 表明本文方法能准确解决矩形波导的不连续问题.

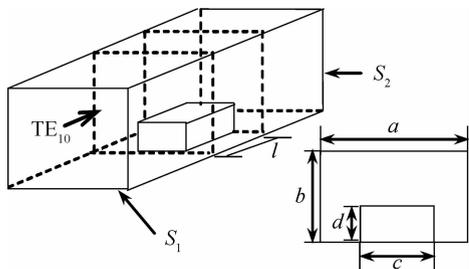


图 2 矩形波导结构与横截面

Fig. 2 Rectangle Waveguide structure and cross-sectional view

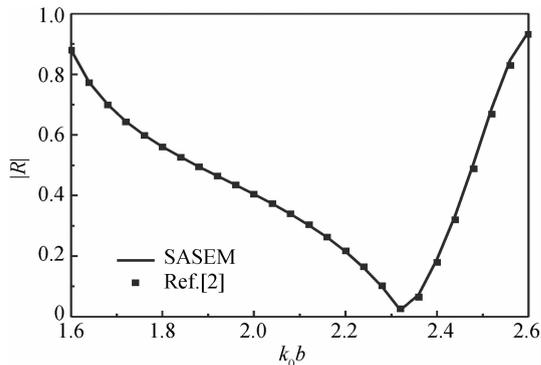


图 3 反射系数随 $k_0 b$ 的变化曲线

Fig. 3 Reflection coefficients versus $k_0 b$

仍考虑如图 2 所示的矩形波导结构, 分析含各向异性介质块的情形. 如图 2, 截面 S_1 到介质块区段、含介质块区段以及介质块到人工截面 S_2 区段分别为三个沿纵向均匀的区段, 视每个区段为一个子结构.

波导的横截面尺寸 $a = 2 \text{ cm}$ 、 $b = 1 \text{ cm}$, 三个子结构的长度均为 0.8 cm , 内部介质块的尺寸 $c = 0.888 \text{ cm}$ 、 $d = 0.399 \text{ cm}$ 、 $l = 0.8 \text{ cm}$, 介质块的相对介电系数和相对导磁系数为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

令该不连续波导在 TE_{10} 模式下工作.

有限元方法作为一种数值方法, 被广泛应用于波导问题的求解中, 并具有一定的准确度和准确性. 半解析谱单元法的准确度随着单元阶数的增加呈指数提高, 本文采用 2 阶的半解析谱单元法和常规有限元法对各向异性介质矩形波导进行模拟, 并比较两者的精确性. 两种方法都将横截面离散为 8×4 个网格, 本文算法共有 96 个面单元和 135 个节点数; 有限元法沿纵向分为 12 份, 共有 384 个体单元和 585 个节点. 另外, 将加密网格的有限元法 (8 192 个体单元) 计算得到的结果作为参考解. 图 4 给出了利用本文算法和常规有限元法计算得到的反射系数随 $k_0 b$ 的变化曲线. 可以看出, 本文算法的结果比常规有限元法更接近参考解, 证明了本文算法的有效性和精确性.

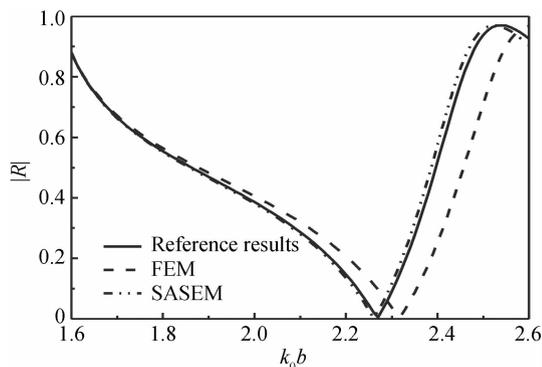


图 4 反射系数随 $k_0 b$ 的变化曲线

Fig. 4 Reflection coefficients obtained by the conventional FEM and SASEM

相对于有限元法, 谱单元法对于结构的连续均匀部分只需要一个单元就可达到需要的准确度. 因此, 本文算法将横截面的不均匀部分划分成一个单元, 如图 5, 整个横截面共划分为 6 个单元.

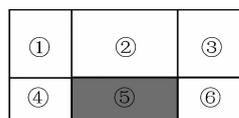


图 5 横截面网格单元的划分

Fig. 5 The grid of cross-section

表 1 给出了在计算准确度相当条件下, 常规有限元法、半解析有限元法与半解析谱单元法计算时间的比较 (计算机主频为 2 GHz). 从表中可以看出, 常规有限元法所用的体单元数为 1 792 个, 节点数为 2 295 个, 半解析有限元法的面单元数和节点数为 240 和 297

个,而本文算法只划分了18个面单元,共105个节点.在这种情形下,常规有限元法所耗用的时间大约为二十五分钟,半解析有限元法所用时间约为十分钟,而本文算法的计算时间不到一分钟,计算效率明显高于常规有限元法和半解析有限元法.

表1 常规有限元法、半解析有限元法以及半解析谱单元法计算准确度和计算效率的比较

Table 1 Comparison of efficiency and accuracy among FEM, SAFEM, SASEM

	FEM	SAFEM	SASEM
Number of elements	1 792	240	18
Number of nodes	2 295	297	105
CPU time/s	1 526	586	46
Relative error of $ S_{11} $	1.55×10^{-1}	4.63×10^{-2}	4.63×10^{-2}
Relative error of $ S_{21} $	5.68×10^{-2}	3.38×10^{-2}	5.17×10^{-2}

本文方法由于只对横截面离散,沿纵向利用的是精细积分法,计算量仅与横截面的谱单元有关,结构的纵向长度可以任意设定,并且计算量不会增加,计算时间基本保持不变.图6是频率为10 GHz时D值随子结构纵向长度变化的曲线,从图中发现,随着子结构纵向长度的增加,D值迅速下降,说明人工边界离介质块位置越远,则计算结果准确度越高.图7为计算时间随子结构纵向长度变化的曲线,计算时间基本稳定在1.5 s以下,由图6、7可得,本文方法在确保计算准确度较高的同时,还保证了计算效率.

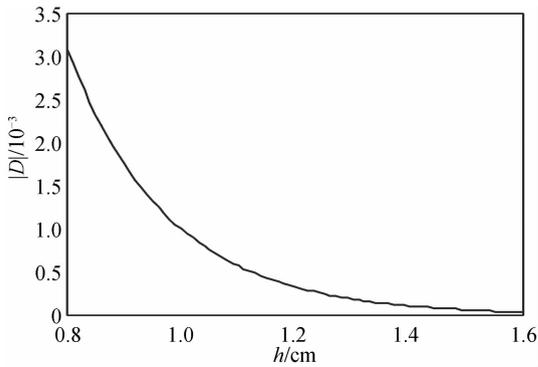


图6 D值随子结构纵向长度h的变化

Fig. 6 D follows with the length of the structure

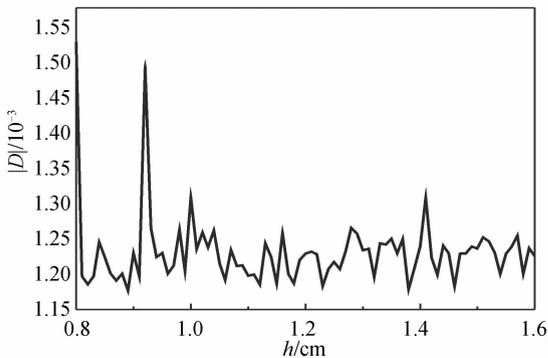


图7 计算时间随子结构纵向长度h的变化

Fig. 7 Computing time change to the length of the structure

3 结论

利用半解析谱单元法求解了含各向异性介质的波导不连续问题.相对于常规有限元法及半解析有限元法,半解析谱单元法在网格单元数较少的情况下可获得较高准确度的计算结果,具有高效率、高准确度的特点.而且,由于采用了精细积分法,其结构纵向长度可以任意地设定,且不会增加计算量.本文方法能精确、高效地求解含各向异性材料的波导不连续性问题,为含有各向异性介质波导器件的分析提供了一种有效的方法.

参考文献

[1] ZHENG Chuan-tao, HUANG Xiao-liang, LUO Qian-qian, et al. Numerical analysis on a directional coupler formed by two polymer-filled nanoscale slot waveguides[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2014, **43**(7): 0723002.
郑传涛, 黄小亮, 罗倩倩, 等. 聚合物填充的狭缝波导定向耦合器的数值分析[J]. *光子学报*, 2014, **43**(7): 0723002.

[2] CHEN Jie-fu, ZHU Bao, ZHONG Wan-xie. Semi-analytical dual edge element method and its application to waveguide discontinuities[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(2): 1091-1099.
陈杰夫, 朱宝, 钟万纭. 半解析对偶棱边元及其在波导不连续性问题中的应用[J]. *物理学报*, 2009, **58**(2): 1091-1099.

[3] SHEN Lu-fa, WANG Zi-hua. Oscillating guided modes in a slab waveguide with anisotropy left-handed material [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2010, **39**(7): 1189-1193.
沈陆发, 王子华. 各向异性色散左手材料平面波导的导模特性[J]. *光子学报*, 2010, **39**(7): 1189-1193.

[4] CHENG Jun-feng, XU Shan-jia. Analysis of scattering characteristics of waveguide loaded with anisotropic dielectric by 3-d 54-parameter edge-element method[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2001, **29**(5): 708-710.
程军峰, 徐善驾. 各向异性介质填充波导散射特性的三维54参量边缘元分析[J]. *电子学报*, 2001, **29**(5): 708-710.

[5] SUN Yan, XIE Jun. Hamiltonian symplectic semi-analytical method and its application in anisotropic electromagnetic waveguide[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, **22**(6): 690-693.
孙雁, 谢军. 基于Hamilton体系的辛半解析法在各向异性电磁波导中的应用[J]. *计算力学学报*, 2005, **22**(6): 690-693.

[6] ZHI Hao-jiang, QI Wu, SIEBER P E, et al. A low-profile high-gain substrate-integrated waveguide slot antenna enabled by an ultrathin anisotropic zero-index metamaterial coating[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2014, **62**(3): 1173-1184.

[7] ZHAO Wei, ZHAO Yong-jiu, LU Hong-min. General analysis method of rectangular waveguide discontinuities by mode matching [J]. *Journal of Xidian University (Natural Science)*, 2008, **35**(5): 894-898.
赵伟, 赵永久, 路宏敏. 矩形波导不连续性的通用模式匹配法分析[J]. *西安电子科技大学学报(自然科学版)*, 2008, **35**(5): 894-898.

[8] WEXLER A. Solution of waveguide discontinuities by modal analysis[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1967, MTT-1d5(9), 508-517.

[9] YOU Jian-wei, ZHANG Jian-feng, CUI Tie-jun. A novel local waveguide port (LWP) excitation based on FDTD algorithm

- [J]. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2013, **35**(3):749-753.
- 游检卫,张剑锋,崔铁军.一种基于FDTD算法的局域导波端口激励[J].电子与信息学报,2013,**35**(3):749-753.
- [10] BHATTACHARYYA A K. On the convergence of MOM and mode matching solutions for infinite array and waveguide problem [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2003, **51**(7):1599-1605.
- [11] JIN Jian-ming. The Finite Element Method in Electromagnetics(2nd Edn)[M]. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [12] YANG Hong-wei, MU Zhen-feng, WANG Zhen. Application of precise integration in anisotropic dielectric waveguide discontinuity problem[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(13): 134101 1-7.
- 杨红卫,穆振峰,王震.精细积分法在含各向异性介质波导不连续性问题中的应用[J].物理学报,2013,**62**(13):134101.
- [13] CHEN Jie-fu, ZHU Bao, ZHONG Wan-xie, *et al.* A semianalytical spectral element method for the analysis of 3-D layered structures [J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2011, **59**(1):1-8.
- [14] GOTTLIEB D, HESTHAVEN J S. Spectral methods for hyperbolic problems [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2001, **128**(1-2):83-131.
- [15] CHEN Jie-fu, ZHU Bao, ZHONG Wan-xie. A dual vector spectral element method for waveguide analysis[C]. IEEE International Conference on Microwave Technology & Computational Electromagnetics (ICMTCE), Beijing, 2011 May:398-401.
- [16] 钟万勰.应用力学对偶体系[M].北京:科学出版社,2002.