

弹载 SINS 四元数模约束下滤波空中对准

梅春波, 秦永元

(西北工业大学自动化学院, 西安 710129)

摘 要: 针对弹载 SINS/GPS 系统的空中对准, 提出一种四元数模约束条件下的非线性滤波初始对准算法。首先, 利用坐标变换和四元数姿态描述, 将传统的强非线性滤波对准问题转化为一个二阶弱非线性滤波问题; 其次, 采用二阶扩展卡尔曼滤波(EKF)对二阶非线性部分进行处理, 得到一种简洁的滤波对准方案; 最后, 推导了四元数模约束条件下滤波算法的最优实现, 及反馈四元数估计结果时的闭环滤波形式。利用车载 MEMS IMU/GPS 系统, 进行了初始对准的地面试验, 结果表明, 在车辆弱机动条件下, 对准算法能够实现姿态和惯性器件误差的快速估计, 实现惯导系统的对准。

关键词: 空中对准; 模值约束; 准线性滤波; 二阶扩展卡尔曼滤波

中图分类号: U666.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2016)09-1107-07

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2016.09.010

An In-Motion Alignment Method Based on Norm-Constrained Quaternion Filtering for Missile-Borne SINS/GPS

MEI Chun-bo, QIN Yong-yuan

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract: A norm constraint quaternion nonlinear filtering in-motion alignment method is proposed in this paper for missile-borne SINS/GPS systems. Based on coordinate transformation and quaternion description, the traditional strong nonlinear alignment problem is simplified to a weak second order nonlinear one. Then the second order extended Kalman filter(EKF) is used to process the weak nonlinear part and a simple alignment algorithm is obtained. Finally, the optimized closed-loop implementation of the proposed method is deduced under the quaternion norm constraint. Alignment experiment indicates that under weak maneuver of the land vehicle, the attitude and sensor errors can still converge fast.

Key words: In-motion alignment; Norm constraint; Quasi-linear filtering; Second order extended Kalman filter

0 引 言

现代战争中,精确制导弹药的应用越来越广泛,其中,采用微机电惯性测量单元与全球定位系统(Micro electro mechanical systems and inertial measurement unit/global positioning systems, MEMS IMU/GPS)的复合中制导方案在越来越多的中短程武器系统中得到应用。因此,研究复合制导系统在GPS辅助下的空中对准算法,具有较大的工程应用价值。

MEMS IMU/GPS 系统的空中对准,属于运动条件下捷联惯导系统的非线性初始对准问题。该问题的关键在于非线性初始对准建模和非线性滤波算法选择。之前的解决方案中,非线性初始对准建模均是在导航系内进行,如罗德里格参数非线性初始对准模型^[1]、欧拉角^[2-3]非线性初始对准模型、四元数非线性初始对准模型^[4-5]等。这类模型的量测方程虽为线性,但是系统方程均具有强非线性。因此,为了有效处理强非线性系统方程,具有较大计算量的各种 sigma 点滤波算法被引入对准算法中,如无迹

卡尔曼滤波 (UKF)^[1-3,5-6]、容积卡尔曼滤波 (CKF)^[7]、高斯-厄米特卡尔曼滤波 (GHKF)^[8] 等。

与上述解决思路不同,文献[9]提出在惯性系框架内完成捷联惯导非线性自对准的思路,建立了基于罗德里格参数的惯性系自对准方案,减弱对准模型的复杂度,并降低了滤波算法的计算量。但由于使用罗德里格参数,对准方案存在奇异点问题,需在对准方案中考虑奇异点的处理。本文在此基础上,建立了惯性系下基于四元数的 GPS 辅助运动基座初始对准方案,从而避免了罗德里格参数对准模型的奇异点问题。同时,新的运动基座初始对准方案在对准模型和滤波算法方面具有如下特点:第一,依据惯性系比力方程,将运动中对准问题转化为一个系统方程线性、量测方程为部分状态量的二次多项式的弱非线性滤波问题,使得运动中对准问题得到极大的简化;第二,针对简化的滤波模型,设计以 KF 和二阶 EKF^[10] 为基础的准线性滤波方案,进而在该准线性滤波框架下,推导该滤波算法在四元数模值约束条件下的最优实现。与常规思路下的运动中对准算法相比,新算法具有模型简洁、实现简单、计算量小等优势,地面车载试验验证了算法的有效性。

1 空中对准滤波模型

GPS 辅助下空中对准,是利用 GPS 提供的速度、位置参考信息,及捷联惯导系统输出,实现实时姿态阵 $C_{n_t}^b$ 的求解。以姿态阵 $C_{n_t}^b$ 的链式分解为基础

$$C_{n_t}^b = C_{i_b}^b C_{i_n}^{i_b} C_{n_t}^{i_n} \quad (1)$$

式中: b 为载体系,取为右前上; n_t 为实时导航系,取为时变位置的东北天; i_b 、 i_n 为惯性系,分别与对准开始时刻的载体系和导航系重合。 $C_{n_t}^{i_n}$ 由 GPS 输出实时位置解析计算^[11]; $C_{i_b}^b$ 由陀螺仪输出积分计算。因此,要实现空中对准还需对常值姿态阵 $C_{i_n}^{i_b}$ 进行求解。

利用牛顿第二定律和哥氏定理,可得惯性系比力方程为

$$\dot{\mathbf{v}}^{i_n}(t) + (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_n})^\times \mathbf{v}^{i_n}(t) - \mathbf{g}^{i_n}(t) = \mathbf{f}^{i_n}(t) \quad (2)$$

式中: $\mathbf{v}^{i_n}(t)$ 为 t 时刻载体地速在 i_n 内投影; $\mathbf{g}^{i_n}(t)$ 为 t 时刻载体所在点的重力加速度在 i_n 内投影; $\mathbf{f}^{i_n}(t)$ 则为 t 时刻加速度计敏感的理想比力在 i_n 内投影; $(\cdot)^\times$ 表示由括号中三维向量构造的叉乘矩

阵。

对式(2)两端分别进行积分,简记为

$$\int_0^{t_k} [\dot{\mathbf{v}}^{i_n}(\tau) + (\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_n})^\times \mathbf{v}^{i_n}(\tau) - \mathbf{g}^{i_n}(\tau)] d\tau = \mathbf{V}_r^{i_n}(t_k) \quad (3)$$

$$\int_0^{t_k} \mathbf{f}^{i_n}(\tau) d\tau = C_{i_b}^{i_n} \int_0^{t_k} C_b^{i_b}(\tau) \mathbf{f}^b(\tau) d\tau = C_{i_b}^{i_n} \mathbf{V}_m^{i_b}(t_k) \quad (4)$$

利用 GPS 速度、位置信息可以完成式(3)的积分运算;对 IMU 输出采用捷联惯导二子样姿态、速度更新算法,可以实现式(4)中 $\mathbf{V}_m^{i_b}(t_k)$ 的求解。

在式(4)的积分过程中,考虑陀螺漂移 $\boldsymbol{\varepsilon}^b$ 和加计零偏 ∇^b 的影响,可得

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{V}}_m^{i_b}(t_k) = \mathbf{V}_m^{i_b}(t_k) + \delta \mathbf{V}_m^{i_b}(t_k) \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}^{i_b}(t_k) = -\hat{C}_{b_k}^{i_b} \boldsymbol{\varepsilon}^b, \boldsymbol{\varphi}^{i_b}(0) = 0 \\ \delta \dot{\mathbf{V}}_m^{i_b}(t_k) = \hat{C}_{b_k}^{i_b} \nabla^b + (\hat{\mathbf{f}}_k^{i_b})^\times \boldsymbol{\varphi}_k^{i_b}, \delta \mathbf{V}_m^{i_b}(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\delta \mathbf{V}_m^{i_b}(t_k)$ 为利用 IMU 输出计算 $\mathbf{V}_m^{i_b}(t_k)$ 时计算误差; $\boldsymbol{\varphi}^{i_b}$ 为利用陀螺仪输出进行 $C_{i_b}^b$ 姿态跟踪时计算误差; $\hat{C}_{b_k}^{i_b}$ 、 $\hat{\mathbf{f}}_k^{i_b}$ 中下标 k 表示 t_k 时刻的变量值。

由式(2)~(5)可得如下等式关系

$$\hat{\mathbf{V}}_m^{i_b}(t_k) = C_{i_b}^{i_n} \mathbf{V}_r^{i_n}(t_k) + \delta \mathbf{V}_m^{i_b}(t_k) \quad (6)$$

以式(6)为量测方程,选取如下状态量

$$\mathbf{X} = [\mathbf{q}^T \quad (\delta \mathbf{V}_m^{i_b})^T \quad (\boldsymbol{\varphi}^{i_b})^T \quad (\boldsymbol{\varepsilon}^b)^T \quad (\nabla^b)^T]^T \quad (7)$$

则滤波系统方程和量测方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \delta \dot{\mathbf{V}}_m^{i_b} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{i_b} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^b \\ \dot{\nabla}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\hat{\mathbf{f}}_k^{i_b})^\times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{C}_{b_k}^{i_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \delta \mathbf{V}_m^{i_b} \\ \boldsymbol{\varphi}^{i_b} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^b \\ \nabla^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{C}_{b_k}^{i_b} \mathbf{w}_a \\ -\hat{C}_{b_k}^{i_b} \mathbf{w}_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{Z}_k = \hat{\mathbf{V}}_m^{i_b}(t_k) = \mathbf{C}_{i_n}^{i_b} \mathbf{V}_r^{i_n}(t_k) + \delta \mathbf{V}_m^{i_b}(t_k) + \mathbf{w}_v \quad (9)$$

式中: $\mathbf{C}_{i_n}^{i_b}$ 用状态中姿态四元数 \mathbf{q} 等价描述, 即有

$$\mathbf{C}_{i_n}^{i_b} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

设计合适的滤波器, 对式(8)、(9)描述的状态进行估计, 即可实现对姿态阵 $\mathbf{C}_{i_n}^{i_b}$ 的求解, 代入式(1)中即可完成空中对准。

2 滤波器设计

式(8)、(9)描述的滤波模型具有三个特征: 第一, 系统方程为线性; 第二, 量测方程为状态的二阶多项式非线性函数; 第三, 部分状态, 即姿态四元数受到模值为1的约束。

针对上述特征, 设计如下滤波算法来实现对参数的估计: 采用线性卡尔曼滤波算法实现滤波时间更新; 采用二阶 EKF 滤波算法设计量测更新; 在上述滤波更新框架下, 建立满足部分状态模值约束条件的最优增益阵和估计误差方差阵的量测更新算法。

2.1 滤波时间更新

采用线性卡尔曼滤波算法实现对式(8)描述系统方程的时间更新如下

$$\hat{\mathbf{X}}_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (11)$$

式中: $\hat{\mathbf{X}}_{k/k-1}$ 为状态一步预测; $\Phi_{k/k-1}$ 为对式(8)进行离散化后得到的状态一步转移矩阵; $\mathbf{P}_{k/k-1}$ 为状态估计误差方差阵一步预测。

2.2 滤波量测更新

对式(9)描述的量测方程, 首先忽略约束的影响, 可得基于二阶 EKF^[10] 的量测更新算法。

记式(9)中

$$\mathbf{C}_{i_n}^{i_b}(\mathbf{q}) \mathbf{V}_r^{i_n}(t_k) + \delta \mathbf{V}_m^{i_b}(t_k) = \mathbf{h}(\mathbf{X}_k) \quad (12)$$

则量测方程可用二阶泰勒级数完整描述为

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{X}_k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_k) + \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{X}}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \text{tr}(\mathbf{D}_i \tilde{\mathbf{X}}_k \tilde{\mathbf{X}}_k^T) \quad (13)$$

式中: $\hat{\mathbf{X}}_k$ 为泰勒级数展开点状态向量; \mathbf{H}_k 为函数 \mathbf{h} 的一阶偏导矩阵; $\tilde{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k$; \mathbf{e}_i 为3维单位向量, 且第 i 个分量为1; tr 为矩阵求迹函数; \mathbf{D}_i 为函

数 \mathbf{h} 的二阶偏导矩阵。

依据式(10)、(12)可得

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} h_{x1}, & h_{x2}, & \dots, & h_{x16} \\ h_{y1}, & h_{y2}, & \dots, & h_{y16} \\ h_{z1}, & h_{z2}, & \dots, & h_{z16} \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中:

$$\begin{cases} h_{x1} = 2q_0v_{rx} - 2q_3v_{ry} + 2q_2v_{rz} \\ h_{x2} = 2q_1v_{rx} + 2q_2v_{ry} + 2q_3v_{rz} \\ h_{x3} = 2q_0v_{rz} - 2q_2v_{rx} + 2q_1v_{ry} \\ h_{x4} = 2q_1v_{rz} - 2q_3v_{rx} - 2q_0v_{ry} \\ h_{x5} = 1 \\ h_{y1} = 2q_3v_{rx} + 2q_0v_{ry} - 2q_1v_{rz} \\ h_{y2} = 2q_2v_{rx} - 2q_1v_{ry} - 2q_0v_{rz} \\ h_{y3} = 2q_1v_{rx} + 2q_2v_{ry} + 2q_3v_{rz} \\ h_{y4} = 2q_0v_{rx} - 2q_3v_{ry} + 2q_2v_{rz} \\ h_{y6} = 1 \\ h_{z1} = 2q_0v_{rz} - 2q_2v_{rx} + 2q_1v_{ry} \\ h_{z2} = 2q_3v_{rx} + 2q_0v_{ry} - 2q_1v_{rz} \\ h_{z3} = 2q_3v_{ry} - 2q_0v_{rx} - 2q_2v_{rz} \\ h_{z4} = 2q_1v_{rx} + 2q_2v_{ry} + 2q_3v_{rz} \\ h_{z7} = 1 \end{cases}$$

\mathbf{H}_k 中其余元素为零。

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} d_{i,1-1} & d_{i,1-2} & \dots & d_{i,1-16} \\ d_{i,2-1} & d_{i,2-2} & \dots & d_{i,2-16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{i,16-1} & d_{i,16-2} & \dots & d_{i,16-16} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中: $i = 1, 2, 3$; \mathbf{D}_i 中的非零元分别为

$$\begin{cases} d_{1,1-1} = 2v_{rx}, d_{1,1-3} = 2v_{rz} \\ d_{1,1-4} = -2v_{ry}, d_{1,2-2} = 2v_{rx} \\ d_{1,2-3} = 2v_{ry}, d_{1,2-4} = 2v_{rz} \\ d_{1,3-1} = 2v_{rz}, d_{1,3-2} = 2v_{ry} \\ d_{1,3-3} = -2v_{rx}, d_{1,4-1} = -2v_{ry} \\ d_{1,4-2} = 2v_{rz}, d_{1,4-4} = -2v_{rx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{2,1-1} = 2v_{ry}, d_{2,1-2} = -2v_{rz} \\ d_{2,1-4} = 2v_{rx}, d_{2,2-1} = -2v_{rz} \\ d_{2,2-2} = -2v_{ry}, d_{2,2-3} = 2v_{rx} \\ d_{2,3-2} = 2v_{rx}, d_{2,3-3} = 2v_{ry} \\ d_{2,3-4} = 2v_{rz}, d_{2,4-1} = 2v_{rx} \\ d_{2,4-3} = 2v_{rz}, d_{2,4-4} = -2v_{ry} \\ d_{3,1-1} = 2v_{rz}, d_{3,1-2} = 2v_{ry} \\ d_{3,1-3} = -2v_{rx}, d_{3,2-1} = 2v_{ry} \\ d_{3,2-2} = -2v_{rz}, d_{3,2-4} = 2v_{rx} \\ d_{3,3-1} = -2v_{rx}, d_{3,3-3} = -2v_{rz} \\ d_{3,3-3} = -2v_{rz}, d_{3,4-2} = 2v_{rx} \\ d_{3,4-3} = 2v_{ry}, d_{3,4-4} = 2v_{rz} \end{cases}$$

基于二阶 EKF 的量测更新方程依次为

$$\mathbf{L}_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \text{tr}(\mathbf{D}_i \mathbf{P}_{k/k-1}) \quad (16)$$

式中: \mathbf{L}_k 为考虑量测泰勒级数二阶展开项时的滤波新息修正量。

$$\mathbf{A}_k \in \mathbf{R}^{3 \times 3}, \mathbf{A}_k(i, j) = \frac{1}{2} \text{tr}[(\mathbf{D}_i \mathbf{P}_{k/k-1})(\mathbf{D}_j \mathbf{P}_{k/k-1})] \quad (17)$$

式中: \mathbf{A}_k 为考虑量测泰勒级数二阶展开项时的新息方差阵修正量。

$$\begin{cases} \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k + \mathbf{A}_k)^{-1} \\ \hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k [\mathbf{Z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_{k/k-1}) - \mathbf{L}_k] \\ \mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k/k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \\ \mathbf{K}_k (\mathbf{R}_k + \mathbf{A}_k) \mathbf{K}_k^T \end{cases} \quad (18)$$

式(11)、(14)~(18)即为不考虑约束条件下,所设计的完整的滤波估计算法。

2.3 四元数模值约束下滤波算法优化

针对滤波算法中四元数模约束问题,以式(18)为基础,借鉴线性卡尔曼滤波中的处理方法^[13],推导本文滤波算法在模约束条件下的最优实现。

首先按照是否存在约束,将状态向量 \mathbf{X}_k 、最优增益阵 \mathbf{K}_k 和估计误差方差阵 \mathbf{P}_k 进行如下分解

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{kq} \\ \mathbf{x}_{ko} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{kq} & \mathbf{P}_{ko} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{kq} \\ \mathbf{K}_{ko} \end{bmatrix} \quad (19)$$

由于 \mathbf{P}_k 为实对称方差阵,则有

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{kq} & \mathbf{P}_{ko} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_k^T = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{kq}^T \\ \mathbf{P}_{ko}^T \end{bmatrix} \quad (20)$$

记式(18)中新息为 ξ_k , 新息方差阵为 \mathbf{W}_k , 即

$$\begin{cases} \xi_k = \mathbf{Z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_{k/k-1}) - \mathbf{L}_k \\ \mathbf{W}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k + \mathbf{A}_k \end{cases} \quad (21)$$

量测更新中部分状态的模约束为 $\hat{\mathbf{x}}_{kq}^T \hat{\mathbf{x}}_{kq} = 1$, 由式(18)、(19)可知,即是要求

$$(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q} + \mathbf{K}_{kq} \xi_k)^T (\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q} + \mathbf{K}_{kq} \xi_k) = 1 \quad (22)$$

展开整理可得

$$2 \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q}^T \mathbf{K}_{kq} \xi_k + \xi_k^T \mathbf{K}_{kq}^T \mathbf{K}_{kq} \xi_k = 0 \quad (23)$$

式(23)即为考虑四元数模约束时,待求最优增益阵中 \mathbf{K}_{kq} 需要额外满足的方程。

式(18)中 \mathbf{P}_k 可以等价描述为

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{W}_k \mathbf{K}_k^T \quad (24)$$

并将 \mathbf{P}_k 和 $\mathbf{P}_{k/k-1}$ 进一步分解为

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{kq} & \mathbf{P}_{kqo} \\ \mathbf{P}_{kko} & \mathbf{P}_{koo} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{k/k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k/k-1q} & \mathbf{P}_{k/k-1qo} \\ \mathbf{P}_{k/k-1o} & \mathbf{P}_{k/k-1oo} \end{bmatrix} \quad (25)$$

利用式(19)、(20)的分解形式,可得

$$\mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k/k-1q}^T \\ \mathbf{P}_{k/k-1o}^T \end{bmatrix} \mathbf{H}_k^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{kq}^T & \mathbf{K}_{ko}^T \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{kq} \\ \mathbf{K}_{ko} \end{bmatrix} \mathbf{H}_k \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k/k-1q} & \mathbf{P}_{k/k-1o} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_k \mathbf{W}_k \mathbf{K}_k^T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{kq} \\ \mathbf{K}_{ko} \end{bmatrix} \mathbf{W}_k \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{kq}^T & \mathbf{K}_{ko}^T \end{bmatrix} \quad (28)$$

将式(25)~(28)代入式(24)整理可得

$$\mathbf{P}_{kq} = \mathbf{P}_{k/k-1q} - \mathbf{P}_{k/k-1q}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_{kq}^T - \mathbf{K}_{kq} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1q} + \mathbf{K}_{kq} \mathbf{W}_k \mathbf{K}_{kq}^T \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_{koo} = \mathbf{P}_{k/k-1oo} - \mathbf{P}_{k/k-1o}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_{ko}^T - \mathbf{K}_{ko} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1o} + \mathbf{K}_{ko} \mathbf{W}_k \mathbf{K}_{ko}^T \quad (30)$$

在最优增益阵 \mathbf{K}_k 求解中,以状态估计误差方差阵 \mathbf{P}_k 的迹最小为优化指标,结合式(25)则有

$$\min_{\mathbf{K}_k} (\text{tr}(\mathbf{P}_k)) = \min_{\mathbf{K}_k} (\text{tr}(\mathbf{P}_{kq}) + \text{tr}(\mathbf{P}_{koo})) \quad (31)$$

由式(29)、(30)易知, \mathbf{P}_{kq} 仅是 \mathbf{K}_{kq} 的函数, \mathbf{P}_{koo} 仅是 \mathbf{K}_{ko} 的函数,因此,式(31)可进一步描述为

$$\min_{\mathbf{K}_k} (\text{tr}(\mathbf{P}_k)) = \min_{\mathbf{K}_{kq}} (\text{tr}(\mathbf{P}_{kq})) + \min_{\mathbf{K}_{ko}} (\text{tr}(\mathbf{P}_{koo})) \quad (32)$$

式(32)表明,可通过独立求解 \mathbf{K}_{kq} 和 \mathbf{K}_{ko} 来实现对 \mathbf{K}_k 的解算。最优 \mathbf{K}_{kq} 是满足式(23)且使得 \mathbf{P}_{kqq} 的迹最小,利用拉格朗日乘子法可得 \mathbf{K}_{kq} 求解方程为

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_{kq}} \{ \text{tr}(\mathbf{P}_{kqq}) + \lambda_k (2\hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{K}_{kq} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q} + \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{K}_{kq}^T \mathbf{K}_{kq} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k) \} = 0 \quad (33)$$

展开移项整理可得

$$\mathbf{K}_{kq} = (\mathbf{P}_{k/k-1q}^T \mathbf{H}_k^T - \lambda_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T) (\mathbf{W}_k + \lambda_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T)^{-1} \quad (34)$$

式中:拉格朗日乘子 λ_k 为待求量。

最优 \mathbf{K}_{ko} 即为使得 \mathbf{P}_{koo} 的迹最小,即

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_{ko}} \text{tr}(\mathbf{P}_{koo}) = -2\mathbf{P}_{k/k-1o}^T \mathbf{H}_k^T + 2\mathbf{K}_{ko} \mathbf{W}_k = 0 \quad (35)$$

从而

$$\mathbf{K}_{ko} = \mathbf{P}_{k/k-1o}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \quad (36)$$

利用矩阵求逆引理对式(34)中的求逆项展开整理可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}_k + \lambda_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T)^{-1} &= \mathbf{W}_k^{-1} - \\ \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k \left(\frac{1}{\lambda_k} + \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} &= \\ \mathbf{W}_k^{-1} - \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k \left(\frac{1}{\lambda_k} + \tilde{\xi}^2 \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} &= \\ \mathbf{W}_k^{-1} - \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \tilde{\xi}^2} \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

将式(37)代入式(34),整理可得

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{kq} &= (\mathbf{P}_{k/k-1q}^T \mathbf{H}_k^T - \lambda_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T) \cdot \\ &\left(\mathbf{W}_k^{-1} - \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \tilde{\xi}^2} \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \right) = \\ &\mathbf{P}_{k/k-1q}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} - \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \tilde{\xi}^2} \cdot \\ &(\mathbf{P}_{k/k-1q}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k + \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T) \mathbf{W}_k^{-1} \end{aligned} \quad (38)$$

由 \mathbf{K}_{ko} 的求解过程易知,忽略约束时, \mathbf{x}_{kq} 对应的最优增益阵若记为 \mathbf{K}_{kq}^* , 则

$$\mathbf{K}_{kq}^* = \mathbf{P}_{k/k-1q}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \quad (39)$$

从而有

$$\hat{\mathbf{x}}_{kq}^* = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q} + \mathbf{P}_{k/k-1q}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k \quad (40)$$

式中: $\hat{\mathbf{x}}_{kq}^*$ 即为忽略约束条件时,状态 \mathbf{x}_{kq} 的量测更新估计结果。

将式(40)代入式(38),可得约束条件下,最优

增益阵 \mathbf{K}_{kq} 的另一种表达形式为

$$\mathbf{K}_{kq} = \mathbf{P}_{k/k-1q}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} - \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \tilde{\xi}^2} \hat{\mathbf{x}}_{kq}^* \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \quad (41)$$

从而约束条件下状态 \mathbf{x}_{kq} 更新结果为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{kq} &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q} + \mathbf{K}_{kq} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k = \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q} + \mathbf{P}_{k/k-1q}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k - \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k \tilde{\xi}^2} \hat{\mathbf{x}}_{kq}^* \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k &= \\ \hat{\mathbf{x}}_{kq}^* - \frac{\lambda_k \tilde{\xi}^2}{1 + \lambda_k \tilde{\xi}^2} \hat{\mathbf{x}}_{kq}^* &= \frac{1}{1 + \lambda_k \tilde{\xi}^2} \hat{\mathbf{x}}_{kq}^* \end{aligned} \quad (42)$$

由于式(42)中 $\hat{\mathbf{x}}_{kq}$ 满足模值为1前提约束,故可据此反算出 λ_k 为

$$\lambda_k = \frac{\|\hat{\mathbf{x}}_{kq}^*\| - 1}{\tilde{\xi}^2} = \frac{\|\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1q} + \mathbf{P}_{k/k-1q}^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k\| - 1}{\hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k} \quad (43)$$

式(42)表明,就单步量测更新而言,约束条件下四元数状态估计值与无约束条件下估计值强制归一化的结果一样。但是这两种处理约束的方法仍有本质区别:本文方法中,约束最优增益阵 \mathbf{K}_{kq} 不仅用来更新被约束的状态量,使其更新结果自然满足模约束条件,同时对相应的状态估计误差方差阵也进行了更新,从而保证状态估计结果与估计误差方差阵之间的一致性。而简单地对无约束估计结果中的四元数部分进行强制归一化,并没有考虑归一化操作对相应状态估计误差方差阵产生的影响。因此,从整个滤波过程来看,两种算法的处理结果并不相同。

综上,考虑模约束的滤波量测更新过程为

$$\mathbf{K}_k^* = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1}, \hat{\mathbf{X}}_k^* = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{kq}^* \\ \hat{\mathbf{x}}_{ko}^* \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{X}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k^* \hat{\boldsymbol{\xi}}_k \quad (44)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_k &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{kq}^* \\ \|\hat{\mathbf{x}}_{kq}^*\| \\ \hat{\mathbf{x}}_{ko}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{kq} \\ \hat{\mathbf{x}}_{ko} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{K}_k^* - \begin{bmatrix} \frac{\|\hat{\mathbf{x}}_{kq}^*\| - 1}{\tilde{\xi}^2} \hat{\mathbf{x}}_{kq}^* \hat{\boldsymbol{\xi}}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \\ \mathbf{0}_{12 \times 3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^{*T} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{W}_k \mathbf{K}_k^{*T} \end{aligned} \right. \quad (45)$$

2.4 反馈四元数估计结果的闭环滤波算法

导航系内非线性滤波对准算法的闭环实现形式比较简单,而反馈姿态估计结果的闭环形式对参数的估计是有利的^[3]。本文所设计滤波算法反馈姿态四元数估计结果的闭环形式则不直观。下面省略推导过程,直接给出对姿态四元数估计结果进行反馈的闭环滤波实现方式。

(1) 定义姿态阵估计结果为 $\hat{\mathbf{C}}_{i_b}^{i_n}$, 并将其初始化为单位阵, 即 $\hat{\mathbf{C}}_{i_b}^{i_n}(0) = \mathbf{I}$ 。

(2) 在进行 k 时刻滤波计算时, 将式(8)中状态系数阵及噪声驱动阵修正为

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\hat{\mathbf{f}}_k^{i_{bk}})^\times & 0 & \hat{\mathbf{C}}_{bk}^{i_{bk}} \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{\mathbf{C}}_{bk}^{i_{bk}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{C}}_{bk}^{i_{bk}} & 0 \\ 0 & -\hat{\mathbf{C}}_{bk}^{i_{bk}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式中: $\hat{\mathbf{f}}_k^{i_{bk}} = \hat{\mathbf{C}}_{i_b}^{i_n}(k-1)\hat{\mathbf{f}}_k^{i_b}$, $\hat{\mathbf{C}}_{bk}^{i_{bk}} = \hat{\mathbf{C}}_{i_b}^{i_n}(k-1)\hat{\mathbf{C}}_{bk}^{i_b}$ 。

将式(9)中量测值修正为

$$\mathbf{Z}_k = \hat{\mathbf{C}}_{i_b}^{i_n}(k-1)\hat{\mathbf{V}}_m^{i_b}(t_k) \quad (47)$$

然后, 采用文中设计的滤波估计算法完成 k 时刻滤波计算, 记为 $\bar{\mathbf{X}}_k$ 、 $\bar{\mathbf{P}}_k$ 。

(3) 将 $\bar{\mathbf{X}}_k$ 中四元数估值代入式(10)得 \mathbf{C}_k , 用来更新姿态阵估计结果

$$\hat{\mathbf{C}}_{i_b}^{i_n}(k) = \mathbf{C}_k^T \hat{\mathbf{C}}_{i_b}^{i_n}(k-1) \quad (48)$$

并将 $\bar{\mathbf{X}}_k$ 中四元数对应状态值设为 $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 。

最后, 再对修正后 $\bar{\mathbf{X}}_k$ 和未处理的 $\bar{\mathbf{P}}_k$ 做如下变换, 得到 k 时刻滤波结果

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{T}_C \bar{\mathbf{X}}_k, \mathbf{P}_k = \mathbf{T}_C \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{T}_C^T \quad (49)$$

式中:

$$\mathbf{T}_C = \text{diag}(\mathbf{I}_{4 \times 4}, \mathbf{C}_k^T, \mathbf{C}_k^T, \mathbf{I}_{3 \times 3}, \mathbf{I}_{3 \times 3}) \quad (50)$$

3 地面试验验证

为验证算法的有效性, 利用 MEMS IMU/GPS 系统进行地面验证试验。试验中, MEMS IMU 和激光捷联惯导系统固连安装, 安装偏角已知; 以高精度激光捷联惯导系统和差分 GPS 组合提供对准过程中的姿态真值参考。

所采用的 MEMS IMU 为商业级低精度惯性器件, 陀螺仪漂移重复性不大于 $500(^{\circ})/h$; 加速度计随机常值零偏重复性不大于 5 mg 。

试验结果如图 1~3 所示。

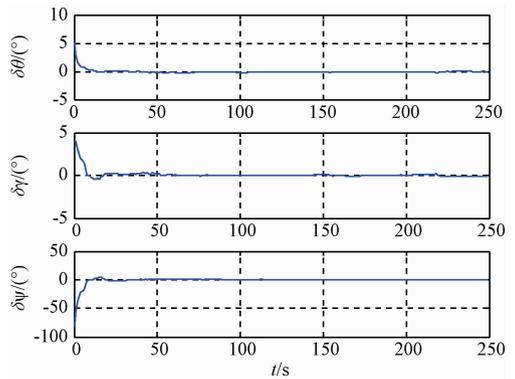


图1 运动中对准姿态角误差

Fig. 1 Attitude error of in-motion alignment

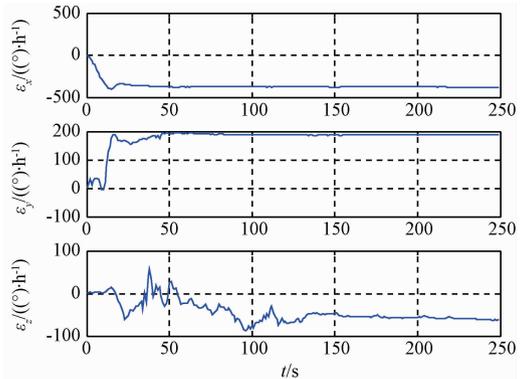


图2 对准中陀螺随机漂移估计结果

Fig. 2 Gyro drifts estimation in in-motion alignment

由图 1 可知, 利用 GPS 进行辅助时, 在地面车辆弱机动条件下, 对准算法也可以实现商业级 MEMS IMU 系统的快速对准。其中, 水平姿态角误差在 20 s 后即收敛至 0.2° 以内; 方位角误差在 150 s 后收敛至 0.2° 以内。

图 2 和图 3 则表明, 对于可观度较好的水平陀螺漂移和天向加速度计零偏, 对准算法也可对其实

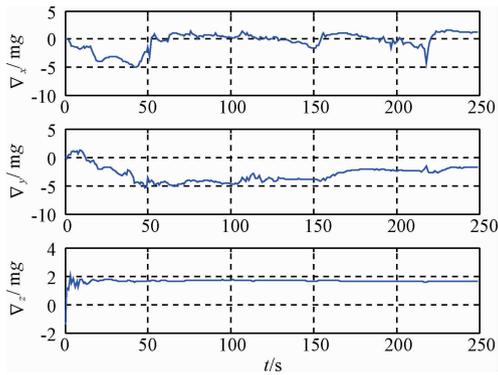


图3 对准中加速度计零偏估计结果

Fig.3 Accelerometer bias estimation in in-motion alignment

现快速估计;对于可观度较差的天向陀螺漂移和水平加计零偏,则需要一定的时间才能够收敛。

4 结论

对于捷联惯导系统任意失准角条件下的动基座对准,本文设计了一种基于惯性系简化滤波模型的准线性滤波对准算法,并在四元数模值约束条件下对算法进行了优化。该算法实现简单,计算量小,文中的地面验证试验表明了算法的有效性。

参 考 文 献

- [1] 陈记争,袁建平,方群. 基于修正 Rodrigues 参数和 UKF 的姿态估计算法[J]. 宇航学报, 2008, 29(5): 1622-1626. [Chen Ji-zheng, Yuan Jian-ping, Fang Qun. Attitude estimation using modified Rodrigues parameters and UKF [J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(5): 1622-1626.]
- [2] 徐金华,许江宁,张晓峰,等. 真航向测量系统初始对准中的 UKF 应用研究[J]. 宇航学报, 2009, 30(2): 205-209. [Xu Jin-hua, Xu Jiang-ning, Zhang Xiao-feng, et al. Study and application of UKF in the TNDS initial alignment[J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(2): 205-209.]
- [3] 夏家和,秦永元,游金川. 摇摆状态下基于非线性误差模型的惯导对准研究[J]. 宇航学报, 2010, 31(2): 410-415. [Xia Jia-he, Qin Yong-yuan, You Jin-chuan. Nonlinear error model based alignment method for SINS on swing base [J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(2): 410-415.]
- [4] Sergei T. Projective and differential geometry of attitude errors with applications to estimation [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(5): 1254-1266.
- [5] Chang L B, Hu B Q, Chang G B. Modified unscented quaternion estimator based on quaternion averaging [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(1): 305-309.
- [6] 周卫东,乔相伟,任蕾,等. QUKF 算法及其在 SINS 初始对

准中的应用[J]. 仪器仪表学报, 2010, 31(2): 264-269. [Zhou Wei-dong, Qiao Xiang-wei, Ren Lei, et al. Quaternion unscented Kalman filter and its application to initial alignment of SINS [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2010, 31(2): 264-269.]

- [7] 郝燕玲,杨峻巍,陈亮,等. 基于 NPF-CKF 的捷联惯导系统动基座初始对准技术[J]. 中国惯性技术学报, 2011, 19(6): 654-658. [Hao Yan-ling, Yang Jun-wei, Chen Liang, et al. Initial alignment of SINS on dynamic based on NPF-CKF [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2011, 19(6): 654-658.]
- [8] 谢阳光,伊国兴,王常虹,等. 高斯-厄米特滤波器在捷联惯导系统初始对准中的应用[J]. 航空学报, 2012, 33(3): 554-560. [Xie Yang-guang, Yi Guo-xing, Wang Chang-hong, et al. Application of Gauss Hermite filter in SINS alignment [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(3): 554-560.]
- [9] 梅春波,秦永元,游金川. SINS 基于非线性量测的大失准角初始对准算法[J]. 宇航学报, 2016, 37(3): 292-297. [Mei Chun-bo, Qin Yong-yuan, You Jin-chuan. Nonlinear measurement based SINS initial alignment algorithm under large misalignment angle [J]. Journal of Astronautics, 2016, 37(3): 292-297.]
- [10] Simon D. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms [J]. IET Control Theory Application, 2010, 1-16.
- [11] 梅春波,秦永元,游金川. 全导式多弹头分子系统初始对准算法研究[J]. 西北工业大学学报, 2014, 32(4): 651-657. [Mei Chun-bo, Qin Yong-yuan, You Jin-chuan. In-flight alignment for guided warheads of genuine MIRV system [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2014, 32(4): 651-657.]
- [12] Simon D. Optimal state estimation---Kalman, H_∞ , and nonlinear approaches [M]. Hoboken, Nes Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [13] Zanetti R, Majji M, Bishop R H, et al. Norm constrained Kalman filtering [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(5): 1458-1465.

作者简介:

梅春波(1985-),男,博士生,主要从事捷联惯导初始对准算法研究。

通信地址:陕西省西安市长安区西北工业大学长安校区自动化学院(710129)

电话:13488471415

E-mail: meichunbo@126.com

(编辑:曹亚君)