线 性 代 数

Linear Algebra

刘鹏

复旦大学通信科学与工程系

光华楼东主楼1109 Tel: 65100226

pliu@fudan.edu.cn

§ 1.3 行列式的基本性质

- 根据定义计算行列式非常麻烦

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

- 每项是 n 个数相乘, 要做(n-1)次乘法
- 行列式总共有 n! 项，需要做 n!(n-1)次乘法

$$n=20 \quad \Rightarrow \quad 20! \times 19 \approx 4.62 \times 10^{13}$$

- 我们需要继续深入研究行列式的性质=>更简便的方法

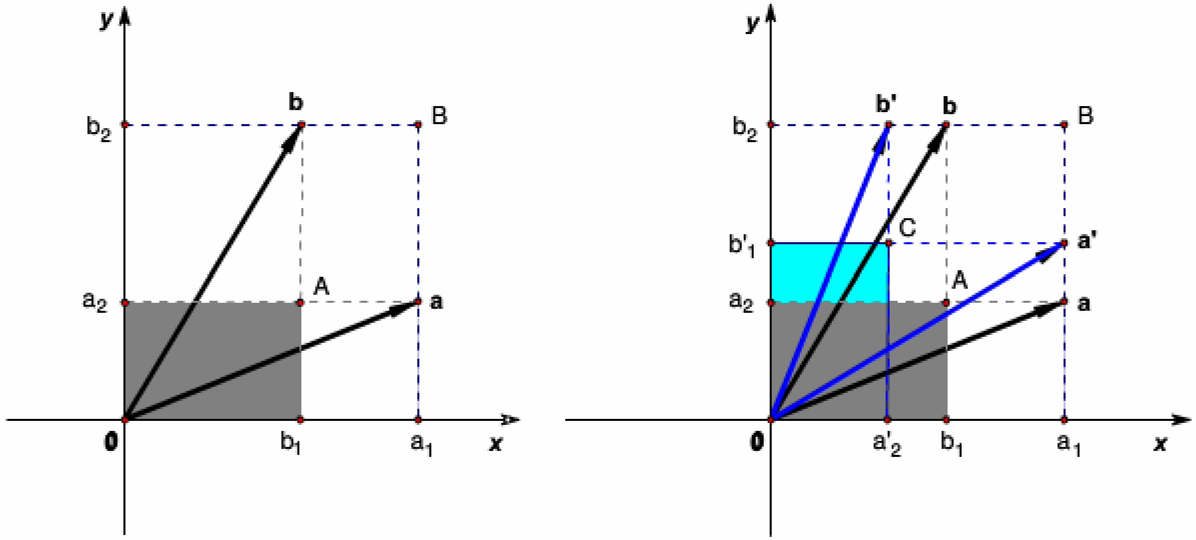
行列式的转置

定义：将 n 阶行列式的行变为列，得到一个新的行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 则 $|A^T|$ 称为 $|A|$ 的转置行列式 (transposed determinant)

性质1 行列式 $|A|$ 与它的转置行列式 $|A^T|$ 相等



- **几何解释：沿着 y=x 镜像对折**

$$S_{左}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

$$S_{右}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

- **面积之差不变**

证明： 记 $$\left|A^T\right| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

- 于是有 $b_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$

- $|A^T|$按行标自然排列展开

$$\left|A^T\right| = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{1 i_1} b_{2 i_2} \cdots b_{n i_n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$= |A|.$ 证毕(也可如课本按列标自然排列展开)

- 说明：行列式中行与列具有同等的地位, 因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立。

□ 性质2 互换行列式任意两行(列)，行列式变号。

若设 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $\quad |A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

- 则 $|A| = -|A_1|$
- 几何解释：交换叉乘次序.

证明：$|A|$展开式的通项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$

- 行标是自然顺序 $1\quad 2\cdots t\cdots s\cdots n$
- 列标顺序是 $j_1\quad j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 将|A|按行标自然排列展开

$$|A|=\sum_{j_1 j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$$

- 第 t 行和第 s 行交换后，行标变为

$$1\quad 2\cdots s\cdots t\cdots n$$

- 即行标进行了一次对换，其逆序数变为奇数

$$\tau(1\quad 2\cdots s\cdots t\cdots n)=\text{奇数}$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 两行交换后列标顺序保持不变，仍为

$$j_1\ j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$$

- 将|A₁|按第三种定义展开

$$|A_1|=\sum_{\substack{12\cdots s\cdots t\cdots n\\ j_1 j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n}}(-1)^{\tau(12\cdots s\cdots t\cdots n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}$$

$$\sum_{\substack{12\cdots s\cdots t\cdots n\\ j_1 j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n}}(-1)\cdot(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}=-|A|$$

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证明 互换相同的两行，有

$$|A| = -|A|$$

$$\therefore \quad |A| = 0.$$

性质3　行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论1　行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 K ，等于用数 K 乘此行列式。

推论2　行列式的某一行（列）中所有的元素全为零时，则此行列式的值等于零。

- 几何解释：数 k 乘以平行四边形的一边，面积 S 增大 k 倍.

例　计算三阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解：按定义计算，得 $|A| = ?$ $= 27$

验证：第一行乘以***k***，***k=2***

$$|A| = \begin{vmatrix} -6 & -10 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 42 = 54$$

验证：第一行乘以***k***，***k=0***　$|A| = 0$

证明： 将n阶行列式按行标展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} k\, a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

$$= k|A|$$

性质 4　如果行列式中有两行（列）元素成比例，则此行列式的值等于零。

证明：　由性质3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{性质2}}{\underset{\text{推论}}{=\!=\!=}} 0.$$

两行相等

|A|= 0

$\Rightarrow$　行列式某行全为0，行列式为0.

- 几何解释？ ➢ 2D->平行->直线，3D->体积为零->平面图形
- n D -> (n-1) D -> ‘n 维体积’ =0

性质5　行列式的分行(列)相加性，即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{t1}+c_{t1} & b_{t2}+c_{t2} & & \cdots & b_{tn}+c_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则|A|等于下列两个行列式之和：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{t1} & b_{t2} & & \cdots & b_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ c_{t1} & c_{t2} & & \cdots & c_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= |A_1| + |A_2|$$

➢ 几何解释 ？

例：行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1+1 & 1+2 & 2+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

解：按定义计算，得 $|A| = 10$

按性质计算：$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= 5 + 5 = 10$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{t1}+c_{t1} & b_{t2}+c_{t2} & & \cdots & b_{tn}+c_{tn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明： 将|A|按行标自然排列展开

$$|A| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (b_{t j_t} + c_{t j_t}) \cdots a_{n j_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{t j_t} \cdots a_{n j_n}$$

$$+ \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{t j_t} \cdots a_{n j_n}$$

$$= |A_1| + |A_2|$$

为便于行列式计算，我们约定如下记号：

- 用 $R_t \pm k R_s$ 表示第 t 行元素加上(减去)第 s 行对应元素的 k 倍。
- 用 $C_t \pm k C_s$ 表示第 t 列元素加上(减去)第 s 列对应元素的 k 倍。

性质６　把行列式的某一列（行）的元素乘以某数 k 然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式的值不变。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$k\times$

➢ 几何解释？

$$\xlongequal{c_i + kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i} + ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6　把行列式的某一行的元素乘以某数 k 然后加到另一行对应的元素上去，行列式的值不变。

例如，
$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1}+ka_{s1} & a_{t2}+ka_{s2} & \cdots & a_{tn}+ka_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：　利用性质5

$$等式右端=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= 0$

例：行列式 $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

解：按定义计算，得 $|A|=10$

R2 + 2 R1
R3 - R1：

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4+2\times2 & 3+2\times1 & 1+2\times2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

R3 –2R2：

$$=5\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=5\times2=10$$

- 几何解释？.

例：计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix}4&427&327\\5&543&443\\7&721&621\end{vmatrix}.$

解： $C2-C3:=\begin{vmatrix}4&100&327\\5&100&443\\7&100&621\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}4&1&327\\5&1&443\\7&1&621\end{vmatrix}$

$$\begin{matrix}R2-R1\\R3-R2\end{matrix}:=100\begin{vmatrix}4&1&327\\1&0&116\\2&0&178\end{vmatrix}\quad C12:=-100\begin{vmatrix}1&4&327\\0&1&116\\0&2&178\end{vmatrix}$$

$$R3-2R2:=-100\begin{vmatrix}1&4&327\\0&1&116\\0&0&-54\end{vmatrix}=5400.$$

例：计算行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix}$

解：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix} \xlongequal{C_2-C_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 1 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 1 & 3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_3-C_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 2 \\ 1+a_2 & 1 & 2 \\ 1+a_3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{性质4}} 0$$

例　设反对称行列式 $|A|=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

证明当 n 为奇数时，反对称行列式|A|=0

证明：由性质1 |A| =|A^T|= $\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

- 每行提取公因子(-1),得 |A|= （-1）^{n}|A|= - |A|

思考题 计算行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2+\dfrac{1}{a^2} & a & \dfrac{1}{a} & 1 \\ b^2+\dfrac{1}{b^2} & b & \dfrac{1}{b} & 1 \\ c^2+\dfrac{1}{c^2} & c & \dfrac{1}{c} & 1 \\ d^2+\dfrac{1}{d^2} & d & \dfrac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} \qquad (\text{已知 } abcd=1)$$

思考题解答

$$|A|=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

计算行列式常用方法：

上三角行列式的值等于主对角线元素的乘积 →

利用性质把行列式化为上三角形行列式 →

计算行列式的值.

例 计算行列式的值

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

解:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_2-2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_4-5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_3+3r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_4-\frac{3}{7}r_3}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{43}{7} \end{vmatrix} = 1\times(-1)\times 35\times(-\frac{43}{7}) = 215$$

例　计算行列式的值

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

解: $$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{r_2 + 3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal{r_2+3r_1}
\begin{vmatrix}
\boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\xlongequal{r_3-2r_1}
\begin{array}{r} (-4)\times \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix}
1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} \times(-3) \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$\xlongequal[r_5-4r_1]{r_4-3r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$
\xlongequal{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus
$$

$$
\xlongequal{r_4+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \times(-2) \quad \oplus
$$

$$\overset{r_5 - 2r_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \times 4 \quad \oplus$$

$$\overset{r_5 + 4r_4}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12$$

例 计算 n 阶行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

解: $$|A| \xlongequal{C_1+\sum_{j=2}^{n} C_j} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质3}} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ R_n - R_1}]{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

小结

- ✓ **行列式的6个性质: 转置、行(列)互换、数乘行(列)、**
  两行(列)成比例、分行(列)相加、
  某行(列)加另一行(列) **k** 倍.
- ✓ **行列式中行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立。**
- ✓ **计算行列式常用方法:**
  (1) 利用定义;
  (2) 利用性质;
  (3) 化为上三角形行列式。

- 布置习题

P39:

7. 10.

11. (1) 、(2) 、(8)、(12)