六、共轭矩阵

当 $A=(a_{ij})$为复矩阵时，用 $\overline{a}_{ij}$表示 a_{ij} 的共轭复数，

记 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$， $\overline{A}$称为 A 的**共轭矩阵(conjugate matrix)**.

运算性质

（设A，B 为复矩阵，λ 为复数，且运算都是可行的）：

$$(1)\ \overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B};$$

$$(2)\ \overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A};$$

$$(3)\ \overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}.$$

§3 逆矩阵

• 矩阵与复数相仿，有加、减、乘三种运算.

• 矩阵的乘法是否也和复数一样有逆运算呢?

• 这就是本节所要讨论的问题.

• 这一节所讨论的矩阵，如不特别说明，所指的都是 n 阶方阵.

对于 n 阶单位矩阵 E 以及同阶的方阵 A，都有

$$A_n E_n = E_n A_n = A_n$$

从乘法的角度来看，n 阶单位矩阵 E 在同阶方阵中的地位类似于 1 在复数中的地位. 一个复数 $a \neq 0$的倒数 a^{-1}可以用等式 $a\,a^{-1} = 1$ 来刻划. 类似地，我们引入

定义： n 阶方阵 A 称为**可逆的**，如果有 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

这里 E 是 n 阶单位矩阵.

- 根据矩阵的乘法法则，只有方阵才能满足上述等式.
- 对于任意的 n 阶方阵 A，适合上述等式的矩阵 B 是唯一的（如果有的话）.

定义： 如果矩阵 B 满足上述等式，那么 B 就称为 A 的**逆矩阵**，记作 A^{-1} .

下面要解决的问题是:

- 在什么条件下，方阵 A 是可逆的?
- 如果 A 可逆，怎样求 A^{-1} ?

结论：$AA^* = A^*A = |A|E$ ，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 位于第 j 行第 i 列

定理：若 $|A| \neq 0$ ，则方阵A可逆，而且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

推论：若 $|A| \neq 0$ ，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

例：求二阶矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的逆矩阵.

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例：求3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解： $|A| = 1$， $M_{11}=-7,\ M_{12}=-6,\ M_{13}=3,$

$M_{21}=4,\ M_{22}=3,\ M_{23}=-2,$

$M_{31}=9,\ M_{32}=7,\ M_{33}=-4,$

则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{21}&M_{31}\\-M_{12}&M_{22}&-M_{32}\\M_{13}&-M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}$$

$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow$ 方阵*A*可逆

此时，称矩阵*A*为**非奇异矩阵**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

定理：若方阵*A*可逆，则 $|A| \neq 0$.

容易看出：对于*n* 阶方阵*A*、*B*，如果

$$AB = E,$$

那么*A*、*B*都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵.

推论： 如果 *n* 阶方阵*A*、*B*可逆，那么A^{-1}、A^{T}、$\lambda A(\lambda \neq 0)$与*AB*也可逆，且

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

$$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T},$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1},$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

线性变换 $$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

的系数矩阵是一个 n 阶方阵 A，若记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

则上述线性变换可记作 $Y = AX$.

例：设线性变换的系数矩阵是一个 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

记 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

则上述线性变换可记作 $Y=AX$.

求变量 y_1，y_2，y_3 **到变量** x_1, x_2, x_3**的线性变换相当于求方阵** A **的逆矩阵.**

已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$，于是 $X=A^{-1}Y$，即

$$\begin{cases} x_1 = -7y_1 - 4y_2 + 9y_3, \\ x_2 = \ \ 6y_1 + 3y_2 - 7y_3, \\ x_3 = \ \ 3y_1 + 2y_2 - 4y_3. \end{cases}$$

§4　矩阵分块法

前言

- 由于某些条件的限制，我们经常会遇到大型文件无法上传的情况，如何解决这个问题呢?
- 这时我们可以借助WINRAR把文件分块，依次上传.
- 家具的拆卸与装配

问题一：什么是矩阵分块法?

问题二：为什么提出矩阵分块法?

问题一：什么是矩阵分块法？

定义：用一些横线和竖线将矩阵分成若干个小块，这种操作称为对矩阵进行分块；

每一个小块称为矩阵的子块；

矩阵分块后，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

这是2阶方阵吗？

思考题

伴随矩阵是分块矩阵吗?

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

答：不是．伴随矩阵的元素是代数余子式（一个数），而不是矩阵．

问题二：为什么提出矩阵分块法？

答：对于行数和列数较高的矩阵 A，运算时采用分块法，

可以使大矩阵的运算化成小矩阵的运算，

体现了化整为零的思想.

分块矩阵的加法

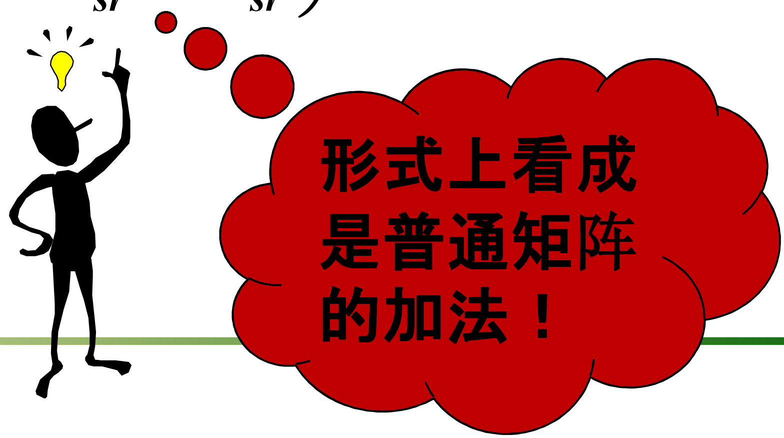
$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix}$$

若矩阵A、B是同型矩阵，且采用相同的分块法，即

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

则有 $$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$



分块矩阵的数乘

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

$$\lambda A=\left(\begin{array}{c|c} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \hline \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{array}\right)$$

若λ是数，且 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$

则有 $$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_s=m$$

一般地，设 A为$m\times l$ 矩阵，B为$l\times n$矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}, \quad C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$$

$$(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$$

$m \times n$ 矩阵 A 有 m 行 n 列，

若将第 j 列记作 $\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$，

则 $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$

于是设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，

若把 A 按行分块，把 B 按列块，则

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=AB$$

$$c_{ij} \qquad = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}.$$

分块矩阵的转置

若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$

分块矩阵不仅形式上进行转置，
而且每一个子块也进行转置.

例如：

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \\ \alpha_4^T \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵

定义：设 A 是 n 阶矩阵，若

1. A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，
2. 其余子块都为零矩阵，
3. 对角线上的子块都是方阵，

那么称 A 为分块对角矩阵.

例如：

$$A=\left(\begin{array}{c|c|cc} 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

分块对角矩阵的性质

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

- $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$
- 若$|A_s|\neq 0$，则$|A|\neq 0$，并且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

例:设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1} .

解:

$$A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\\hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}$$

$$A_1=(5),A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

例：往证 $A_{m\times n}=O_{m\times n}$ 的充分必要条件是方阵 $A^TA=O_{n\times n}$.

证明：把 A 按列分块，有 $A=(a_{ij})_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

于是 $A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=O$

那么

$$\alpha_j^T\alpha_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}{}^2+a_{2j}{}^2+\cdots+a_{mj}{}^2=0$$

$$a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0$$

即 $A=O$.