** 例4 用初等行变换法 求A的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 求A^{-1}.$$

解

$$(A\ \ I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R12} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3-2R1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R3+3R2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R1+2R3]{R2+R3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R1-R2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1 用初等行变换法求逆,只能对(A I)进行行变换: (AI) 只能左乘

2 变换过程中,若出现一行全是零,则此矩阵不可逆

小结

n阶方阵 A可逆 $\Leftrightarrow \exists n$阶方阵 $B, AB = BA = I.$

$$\Leftrightarrow |A| \neq 0，而且\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{*}.$$

$\Longleftrightarrow$ A可表示为一些初等矩阵的乘积。

求逆矩阵的方法：

(1)、由$AB=I$或$BA=I$.(待定系数法)(定义法)

(2)、求伴随矩阵.（阶数较低）(公式法)

(3)、初等变换的方法(初等变换法)

(4)、分块矩阵的方法

例　把可逆矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$ 分解为初等矩阵的乘积.

解　对 $\boldsymbol{A}$ 进行如下初等变换:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-2c_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 3 & -8 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 3 & -8 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & -8 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-3c_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}\xrightarrow{\left(-\frac{1}{8}\right)c_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

与每次初等交换对应的矩阵分别为:

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1/8\end{pmatrix},$$

$$Q_1=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad Q_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad Q_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix},$$

其中 P_i 为行变换的初等矩阵， Q_j 为列变换的初等矩阵，其逆矩阵分别为:

$$P_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix},\quad P_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{pmatrix},$$

$$Q_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad Q_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad Q_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix},$$

于是 $A=P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}Q_3^{-1}Q_2^{-1}Q_1^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例　求下列 n 阶方阵的逆阵: $A=\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$

$a_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$, A 中空白处表示为零.

解

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & a_1 & 1 & & & \\ & & a_2 & & & 1 & & \\ & \iddots & & & & & \ddots & \\ a_n & & & & & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_n & & & & & & & 1 \\ & a_{n-1} & & & & & \iddots & \\ & & \ddots & & & 1 & & \\ & & & a_1 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & 1/a_n \\ & 1 & & & & & \iddots & \\ & & \ddots & & & 1/a_2 & & \\ & & & 1 & 1/a_1 & & & \end{array}\right),$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & 1/a_n \\ & & \iddots & \\ & 1/a_2 & & \\ 1/a_1 & & & \end{pmatrix}.$

四.用初等变换法求解矩阵方程 $AX = B$

问题: 求矩阵 X, 使 $AX = B$, 其中 A 为可逆矩阵.

方法: 易见该问题等价于求矩阵 $X = A^{-1}B$.

再利用初等行变换求逆阵的方法, 计算矩阵 $A^{-1}B$.

$$\because \quad A^{-1}(A \quad B) = (E \quad A^{-1}B)$$

即

$$(A \quad B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \quad A^{-1}B)$$

同理, 求解矩阵方程 $XA = B$, 等价于计算矩阵 BA^{-1},

则可利用初等列变换, 计算矩阵 BA^{-1}, 即

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$$

注意: 也可改为对(A^T, B^T) 作初等行变换.

例　求解矩阵方程 $AX = A + X$，　　其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解　先将原方程作恒等变形为:

$$(A - E)X = A, \quad \text{则} \quad X = (A - E)^{-1} A.$$

$$(A-E \quad A) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R23]{R2-2R1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R3]{R3+4R2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R2+R3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R1-2R2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

即得　$X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

1、设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, 将A表示成初等矩阵的乘积。

解

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{R2-3R1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{R1+R2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}R2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

例　当a,b满足什么条件时，矩阵A不可逆．其中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ a & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

解　对A做初等行，列变换将其化为阶梯形矩阵．

由 $|A|=0$ 可得a,b应满足的条件．

原则：化的过程中，尽可能将a,b置于A的右下方．

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&4&7&10\\-1&0&1&b\\a&2&3&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix}$$

矩阵A不可逆的充要条件是 $|A|\neq 0,$

$$1\cdot(-1)(a-1)(b-2)\neq 0,$$

即 $a\neq 1$ 或 $b\neq 2$.

定义 在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列（$k\le m$, $k\le n$），位于这些行列交叉处的个 k^2 元素,不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的k阶行列式,称为矩阵 A 的 k 阶子式.

例1 $$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-1,$$

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k \bullet C_n^k$ 个.

定义　设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 k 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那末 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作秩 (A) 或 $r(A)$.

零矩阵的秩规定为0。

$m\times n$ 矩阵A的秩 $r(A)$ 是A中非零子式的最高阶数.

矩阵秩的性质：

- 若A为m*n矩阵，则 $r(A)\leqslant \min(m,n)$
- $r(A)=r(A^T)$; $r(A)=r(kA)$,$k\neq 0$
- 若A有一个r阶子式不为零，则 $r(A)\geqslant r$;若A的所有r+1子式全为零，则 $r(A)\leqslant n$
- 若P,Q可逆，则 $r(PA)=r(AQ)=r(A)$
- $r(A)<n \Leftrightarrow |A|\neq 0$
- 可逆矩阵也称为满秩矩阵。

例2　求矩阵 $A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\ -5\end{matrix}\\ \begin{matrix}4 & 7\end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

解　在 A 中，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$

又 $\because$ A 的 3 阶子式只有一个 $|A|$，且 $|A|=0$，

$\therefore \quad r(A)=2.$

例3

求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩.

解

$\because$ B是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行，

$\therefore$ B 的所有 4 阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$，

$\therefore$ $r(B)=3$.

若矩阵的每行第一个非零元的下方及左下方全为零,

则称之为阶梯形矩阵。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任意一个矩阵都可以经过一系列的初等行变换化为阶梯形矩阵。

初等变换不改变矩阵的秩。

阶梯形矩阵的秩等于其中非零行的个数。

矩阵秩的计算方法:

用初等行变换把矩阵化为阶梯形，则该阶梯形矩阵中的非零行数就是所求矩阵的秩。

例4 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩.

解

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

一、线性方程组的表达式

1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=5 \\ \quad x_1-x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

2. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 向量方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. 向量组线性组合的形式

$$x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

方程组可简化为 $AX = b$.

二、线性方程组的解的判定

设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

m、n 不一定相等!

定义：线性方程组如果有解，就称它是相容的(consistent)；如果无解，就称它是不相容的.

定义:如果常数b全为零，方程组成为齐次的(homogeneous)，否则成为非齐次的(inhomogeneous)

问题1：方程组是否有解?

问题2：若方程组有解，则解是否唯一?

问题3：若方程组有解且不唯一，则如何掌握解的全体?

定理：n 元线性方程组 $Ax = b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$；

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$；

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$.

分析：只需证明条件的充分性，即

- $R(A) < R(A, b) \Rightarrow$ 无解；
- $R(A) = R(A, b) = n \Rightarrow$ 唯一解；
- $R(A) = R(A, b) < n \Rightarrow$ 无穷多解.

那么

✓ 无解 $\Rightarrow R(A) < R(A, b)$；

✓ 唯一解 $\Rightarrow R(A) = R(A, b) = n$；

✓ 无穷多解 $\Rightarrow R(A) = R(A, b) < n$.

证明： 设 $R(A)=r$，为叙述方便，不妨设 $B=(A,\ b)$ 的**行最简形矩阵**为

$$\tilde{B}=\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & & d_1\\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & & d_2\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & & d_r\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & d_{r+1}\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0
\end{array}\right)_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　　后 $n-r$ 列

$$\boxed{R(A)\leqslant R(A,\ b)\leqslant R(A)+1}$$

第一步： 往证 $R(A)<R(A,\ b)\quad\Rightarrow$ 无解.

若 $R(A)<R(A,\ b)$，即 $R(A,\ b)=R(A)+1$，则 $d_{r+1}=1$.

于是 第 $r+1$ 行对应矛盾方程 $0=1$，故原线性方程组无解.

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}_{\text{前 } n \text{ 列}} & & & & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{\text{后 } n-r \text{ 列}} & & & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

$\tilde{B}$ 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \quad \cdots\cdots \\ x_n = d_n. \end{cases}$$

第二步：往证 $R(A) = R(A, b) = n \Rightarrow$ 唯一解.

若 $R(A) = R(A, b) = n$, 则 $d_{r+1} = 0$ 且 $r = n$, 从而 b_{ij} 都不出现.

故原线性方程组有唯一解.

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}&d_1\\0&1&\cdots&0&b_{21}&\cdots&b_{2,n-r}&d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&b_{r,1}&\cdots&b_{r,n-r}&d_n\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 行

后 $m-r$ 行

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&\cdots&0&d_1\\0&1&\cdots&0&d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&d_n\end{array}\right)$$

对应的线性方程组为

$$\begin{cases}x_1=d_1,\\x_2=d_2,\\\quad\cdots\cdots\\x_n=d_n.\end{cases}$$

第二步： 往证 $R(A)=R(A,b)=n \Rightarrow$ 唯一解.

若 $R(A)=R(A,b)=n$，　即 $r=n$，　则 $d_{r+1}=0$ 且 b_{ij} 都不出现

故原线性方程组有唯一解.

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

第三步：往证 $R(A)=R(A,\ b)<n\quad\Rightarrow$ 无穷多解.

若 $R(A)=R(A,\ b)<n$，　即 $r<n$，　则 $d_{r+1}=0$.

$\tilde{B}$ 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = d_r. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = d_1, \\ \quad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = d_r. \end{cases}$$

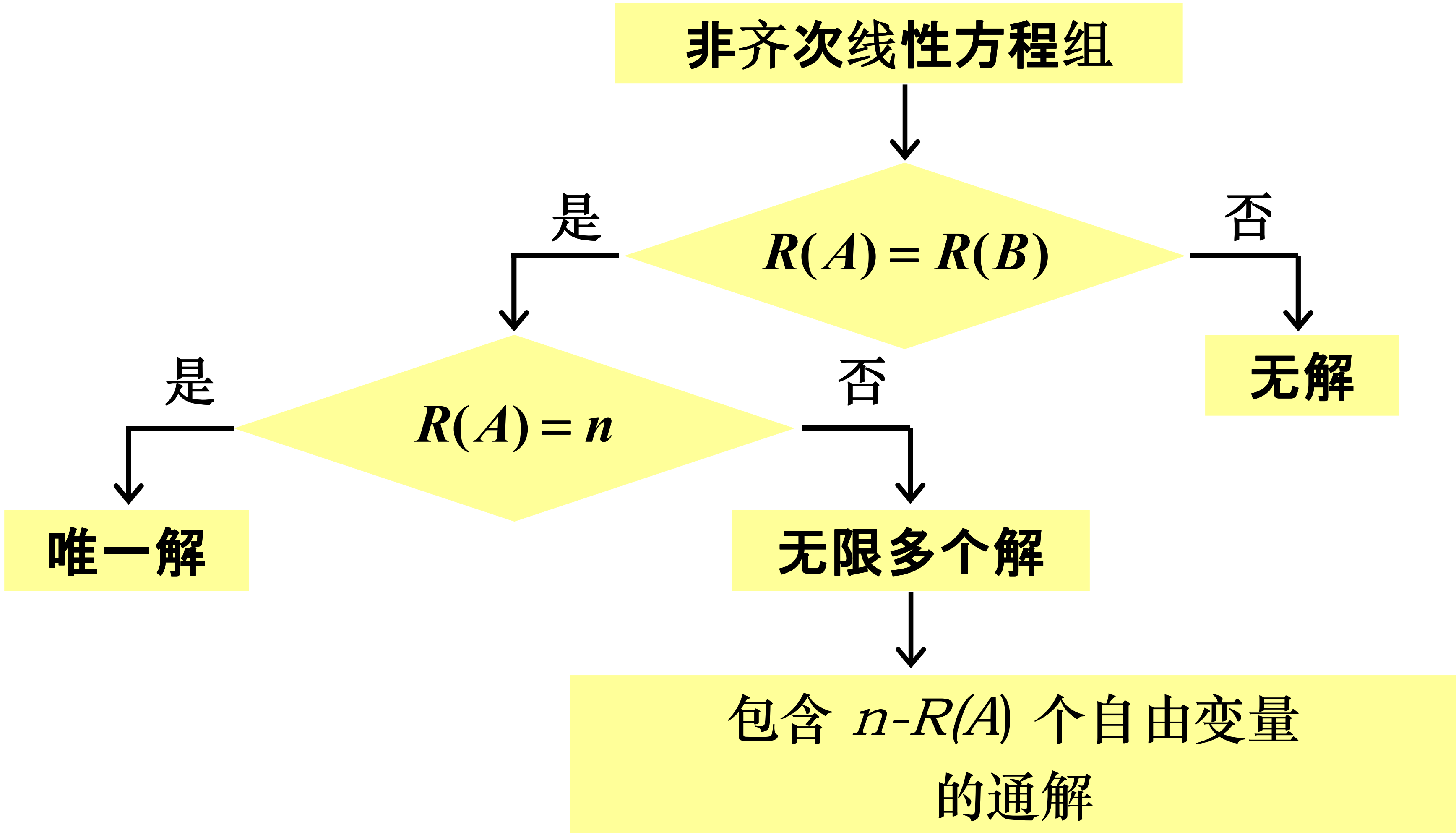
令 x_{r+1}，$\cdots$，x_n 作自由变量，则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n + d_1, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n + d_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n + d_r. \end{cases}$$

再令 $x_{r+1} = c_1$，$x_{r+2} = c_2$，$\cdots$，$x_n = c_{n-r}$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} + d_1 \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} + d_r \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

线性方程组的通解


非齐次线性方程组
是
$R(A)=R(B)$
否
无解
是
$R(A)=n$
否
唯一解
无限多个解
包含 $n\text{-}R(A)$ 个自由变量
的通解

例：求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

解：

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A) = R(A, b) = 3 < 4$，故原线性方程组有无穷多解.

备注： $B=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=r<n$， 这时

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}&d_1\\0&1&\cdots&0&b_{21}&\cdots&b_{2,n-r}&d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&b_{r,1}&\cdots&b_{r,n-r}&d_r\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

$$B \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_3 \leftrightarrow c_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \qquad\qquad x_1 \quad x_2 \quad x_4 \quad x_3$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

同解

返回

解（续）：$B=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

即得与原方程组同解的方程组 $\begin{cases}x_1-x_3=4,\\x_2-x_3=3,\\x_4=-3.\end{cases}$

令 x_3 做自由变量，则 $\begin{cases}x_1=x_3+4,\\x_2=x_3+3,\\x_4=-3.\end{cases}$

方程组的通解可表示为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-3\end{pmatrix}$$