

线性代数

子空间的交、和与直和

张祥朝

复旦大学光科学与工程系

2013-5-9

-
- 设 W_1, W_2 都是线性空间 V 的子空间，则其交(intersection)定义为

$$W_1 \cap W_2 = \{x \mid x \in W_1, x \in W_2\}$$

- 两个线性空间的交一定为线性子空间。

线性子空间的和

两个线性子空间的交是线性子空间，但两个线性子空间的并集一般不是线性子空间。

设 $\epsilon_1 = (1, 0, 0)^T$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)^T$

$W = L(\epsilon_1) \cup L(\epsilon_2)$ 不是 \mathbb{R}^3 的线性子空间。

($\epsilon_1, \epsilon_2 \in W$ 但 $\epsilon_1 + \epsilon_2 \notin W$.)

从几何上看， $L(\epsilon_1)$ 与 $L(\epsilon_2)$ 分别是 \mathbb{R}^3 的两条坐标轴，

由它们可以确定 xOy 平面，即2维的线性子空间，该平面就称为 $L(\epsilon_1)$ 与 $L(\epsilon_2)$ 的和。

命题2.1. 设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个线性子空间，则集合

$$W = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

也是一个线性子空间，

称为 W_1 与 W_2 的和，记为 $W_1 + W_2$.

[proof](#)

线性子空间的和

例子：在 \mathbb{R}^3 中，设 W_1 是通过原点的直线，
 W_2 是过原点且与 W_1 垂直的平面，
则 $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)^T\} = 0$ (零子空间)，
 $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

从线性子空间的和的定义很容易看出：

(1) 交换律： $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$;

(2) 结合律： $W_1 + (W_2 + W_3) = (W_1 + W_2) + W_3$.

(3) 多个子空间的和：

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mid \alpha_i \in W_i \right\}.$$

线性子空间的和的维数

先看 \mathbb{K}^4 中的两对子空间的和:

$$\begin{aligned} 1) \quad W_1 &= L((1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T), \\ W_2 &= L((0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad V_1 &= L((1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T), \\ V_2 &= L((0, 0, 1, 0)^T, (1, 1, 0, 0)^T), \end{aligned}$$

以上 4 个线性子空间都是 2 维的

$W_1 + W_2 = \mathbb{K}^4$ 的维数是4

$V_1 + V_2 = L((1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T)$ 的维数是3.

分析发现, W_1 与 W_2 的交集是零子空间

V_1 与 V_2 的交是1维子空间, 比较大, 导致了其和比较小。

线性子空间的和的维数 (理论结果)

命题2.2 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 与 β_1, \dots, β_t 是 V 的两个向量组, 则
 $L(\alpha_1, \dots, \alpha_s) + L(\beta_1, \dots, \beta_t) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t)$.

引理 2.3: 线性子空间中的线性无关的向量组可以被扩充成该子空间的一组基。

[proof](#)

[proof](#)

定理2.4 (维数公式) 设 W_1 与 W_2 是 V 的两个子空间, 则有
 $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

[proof](#)

推论2.5 设 W_1, W_2, \dots, W_m 是 V 的线性子空间, 则有
 $\dim(W_1 + \dots + W_m) \leq \sum_{i=1}^m \dim W_i$.

线性子空间的和的求法：例子

设 $V = \mathbb{K}^4$, $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $W_2 = L(\beta_1, \beta_2)$, 其中
 $\alpha_1 = (1, 2, -1, -3)^T$, $\alpha_2 = (-1, -2, 2, 1)^T$, $\alpha_3 = (-1, -3, 0, 5)^T$;
 $\beta_1 = (-1, 0, 4, -2)^T$, $\beta_2 = (0, 5, 9, -14)^T$.

求 $W_1 + W_2$ 与 $W_1 \cap W_2$ 的基和维数。

分析: $W_1 + W_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 的极大线性无关组就是 $W_1 + W_2$ 的一组基

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{简化行阶梯形矩阵}$

主元所在的列对应的向量组就是一个极大线性无关组

对于 $\alpha \in W_1 \cap W_2$, 存在 $x_i, i = 1, \dots, 5$, 使得

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = -x_4\beta_1 - x_5\beta_2,$$

即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\beta_1 + x_5\beta_2 = 0$

线性子空间的和的求法：例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 9 \\ -3 & 1 & 5 & -2 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 是 $W_1 + W_2$ 的一组基, 且 $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ 是 W_1 的一组基, 且 $\dim W_1 = 2$.

$\Rightarrow \beta_1, \beta_2$ 是 W_2 的一组基, 且 $\dim W_2 = 2$.

对于 $\alpha \in W_1 \cap W_2$, 存在 $x_i, i = 1, \dots, 4$, 使得

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = -x_3\beta_1 - x_4\beta_2,$$

即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\beta_1 + x_4\beta_2 = 0$$

$$-4\beta_1 + \beta_2$$

$$= (4, 5, -7, -6)$$

基础解系: $\xi_1 = (1, 3, -4, 1)$

是 $W_1 \cap W_2$ 的一组基

线性子空间的直和：定义

下面介绍子空间的和的一种重要的特殊情形——直和.

定义：设 W_1 与 W_2 是 V 的两个线性子空间. 如果对 $\alpha \in W_1 + W_2$, 表示式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_i \in W_i, \quad i = 1, 2,$$

是唯一的, 则称 $W_1 + W_2$ 为 W_1 与 W_2 的直和, 记为 $W_1 \oplus W_2$.

说明： $W_1 + W_2$ 是直和的充分必要条件是 $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_i \in W_i, i = 1, 2$ 只有在 α_i 全为零时才成立.

必要性是显然的, 下证充分性.

假设 $\alpha \in W_1 + W_2$ 有两个分解式:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_i, \beta_i \in W_i, \quad i = 1, 2,$$

则有 $(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = 0$, 其中 $\alpha_i - \beta_i \in W_i, i = 1, 2$.

由条件有 $\alpha_i - \beta_i = 0, i = 1, 2$, 即 $\alpha_i = \beta_i$.

线性子空间的直和，补子空间

定理2.6. 设 W_1 与 W_2 是 V 的两个线性子空间, 则下列结论等价:

(1) $W_1 + W_2$ 是直和;

(2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$;

(3) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

[proof](#)

定理2.7. 设 W 是线性空间 V 的一个线性子空间, 那么存在 V 的线性子空间 U 使得

$$V = W \oplus U.$$

线性子空间 U 称为 W 的补子空间。

[proof](#)

多个线性子空间的直和

定义2.2. 设 W_1, \dots, W_m 是 V 的线性子空间.

如果 $W_1 + \dots + W_m$ 中的每个向量 α 的分解式

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i, \quad \alpha_i \in W_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

是唯一的, 就称这个和为直和, 记为 $W_1 \oplus \dots \oplus W_m$ 或 $\bigoplus_{i=1}^m W_i$.

命题2.8. 设 W_1, \dots, W_m 是 V 的线性子空间, 则下列结论等价:

(1) $W_1 + \dots + W_m$ 是直和;

(2) $\dim(W_1 + \dots + W_m) = \dim W_1 + \dots + \dim W_m$;

(3) 对 $i = 1, \dots, m$, 有 $W_i \cap \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} W_j = 0$.

[proof](#)

命题2.1的证明

$W = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$ 是线性子空间.

证明： 1) 由 $0 + 0 = 0 \in W$ 得 W 非空。

2) 设 $\alpha, \beta \in W$, 由定义有,

存在 $\alpha_1, \beta_1 \in W_1, \alpha_2, \beta_2 \in W_2$, 使得
 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2.$

$$\implies \alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) \in W$$

3) 对于 $k \in K$, 有 $k\alpha_i \in W_i (i = 1, 2)$,

$$\implies k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in W$$

所以 W 是线性子空间。

说明: 线性子空间 $W = W_1 + W_2$ 是包含 W_1 与 W_2 的最小的线性子空间。

[back](#)

命题 2.2 的证明

命题2.2 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 与 β_1, \dots, β_t 是 V 的两个向量组, 则
 $L(\alpha_1, \dots, \alpha_s) + L(\beta_1, \dots, \beta_t) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t)$.

证明: 由定义, 有

$$\begin{aligned} & L(\alpha_1, \dots, \alpha_s) + L(\beta_1, \dots, \beta_t) \\ &= \{(k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s) + (l_1\beta_1 + \dots + l_t\beta_t) \mid k_i, l_j \in \mathbb{K}\} \\ &= L(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t) \end{aligned}$$

[back](#)

引理 2.3 的证明

引理 2.3: 线性子空间中的线性无关的向量组可以被扩充成该子空间的一组基。

证明: 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是线性子空间 W 中的一组线性无关的向量。
若 $\forall \alpha \in W$ 都可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示,
则 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是 W 的一组基;

否则, 存在 $\alpha_{s+1} \in W$ 不能被 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示,
因此 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关.

如果这个向量组不是 W 的基, 则用同样的方法扩充线性无关的向量组, 直到不能扩充为止.

最后得到 W 的一组基.

[back](#)

定理2.4的证明

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

证明: 设 $\dim(W_1 \cap W_2) = m$, $\dim W_1 = n_1$, $\dim W_2 = n_2$.

取 $W_1 \cap W_2$ 的一组基 η_1, \dots, η_m , 分别扩充成 W_1 和 W_2 的基:

$$\eta_1, \dots, \eta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-m}; \quad \eta_1, \dots, \eta_m, \beta_1, \dots, \beta_{n_2-m}.$$

下面证明 $n_1 + n_2 - m$ 个向量 $\eta_1, \dots, \eta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-m}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2-m}$ 是 $W_1 + W_2$ 的一组基. 注意到

$$W_1 + W_2$$

$$= L(\eta_1, \dots, \eta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-m}) + L(\eta_1, \dots, \eta_m, \beta_1, \dots, \beta_{n_2-m})$$

$$= L(\eta_1, \dots, \eta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-m}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2-m})$$

只要证明

$$\eta_1, \dots, \eta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-m}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2-m}$$

线性无关

定理 2.4 的证明 (2)

设

$$k_1\eta_1 + \cdots + k_m\eta_m + p_1\alpha_1 + \cdots + p_{n_1-m}\alpha_{n_1-m} + q_1\beta_1 + \cdots + q_{n_2-m}\beta_{n_2-m} = 0$$

α

$$\alpha = -q_1\beta_1 - \cdots - q_{n_2-m}\beta_{n_2-m} \in W_1 \cap W_2$$

因此 α 可以用 η_1, \dots, η_m 线性表出.

设 $\alpha = l_1\eta_1 + \dots + l_m\eta_m$, 有

$$l_1\eta_1 + \dots + l_m\eta_m + q_1\beta_1 + \cdots + q_{n_2-m}\beta_{n_2-m} = 0.$$

由于 $\eta_1, \dots, \eta_m, \beta_1, \dots, \beta_{n_2-m}$ 是 W_2 的一组基, 所以

$$l_1 = \dots = l_m = 0, q_1 = \dots = q_{n_2-m} = 0, \implies \alpha = 0$$

即 $k_1\eta_1 + \cdots + k_m\eta_m + p_1\alpha_1 + \cdots + p_{n_1-m}\alpha_{n_1-m} = 0$

注意到 $\eta_1, \dots, \eta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-m}$ 是 W_1 的一组基, 有

$$k_1 = \dots = k_m = 0, p_1 = \dots = p_{n_1-m} = 0.$$

[back](#)

所以 $\eta_1, \dots, \eta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-m}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2-m}$ 线性无关

定理 2.6 的证明

定理2.6. 下列结论等价:

(1) $W_1 + W_2$ 是直和;

(2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$;

(3) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

证明: 由维数公式可以得到(2)与(3)的等价性。

下面证明(1)与(2)的等价性。

(1) \implies (2): 设 $\alpha \in W_1 \cap W_2$, 有 $0 = \alpha + (-\alpha)$,

因为是直和, 所以 $\alpha = -\alpha = 0$.

(2) \implies (1): 设 $\alpha \in W_1 + W_2$ 有分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \quad \alpha_i, \beta_i \in W_i, i = 1, 2$$

$$\implies \alpha_1 - \beta_1 = -(\alpha_2 - \beta_2) \in W_1 \cap W_2$$

由条件有 $\alpha_1 - \beta_1 = -(\alpha_2 - \beta_2) = 0$, 即分解式是唯一的。 [back](#)

定理 2.7 的证明

若 W 是 V 的一个线性子空间，则存在 V 的线性子空间 U 使得

$$V = W \oplus U.$$

线性子空间 U 称为 W 的补子空间。

证明: 设 $\dim W = m$, $\dim V = n$. 取 W 的一组基 η_1, \dots, η_m ,

再扩充成 V 的一组基 $\eta_1, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}, \dots, \eta_n$.

令 $U = L(\eta_{m+1}, \dots, \eta_n)$, 则有 $W + U = L$.

于是 $\dim(W + U) = \dim W + \dim U = \dim V$,

即 $V = W \oplus U$.

[back](#)

由于基的扩充是不唯一的，所以当 W 是不平凡子空间时，它的补子空间是不唯一的。

命题 2.8 的证明

- (1) $W_1 + \cdots + W_m$ 是直和;
- (2) $\dim(W_1 + \cdots + W_m) = \dim W_1 + \cdots + \dim W_m$;
- (3) $W_i \cap \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} W_j = 0$.

证明: (1) \Rightarrow (2): 设 $W_1 + \cdots + W_m$ 是直和,

记 $W = W_1 + \cdots + W_{m-1}$, 则 $W + W_m$ 为直和,

$$\dim(W_1 + \cdots + W_m) = \dim(W \oplus W_m)$$

\Rightarrow

$$= \dim W + \dim W_m$$

$$= \dim(W_1 + \cdots + W_{m-1}) + \dim W_m$$

命题 2.8 的证明 (2)

- (1) $W_1 + \cdots + W_m$ 是直和;
- (2) $\dim(W_1 + \cdots + W_m) = \dim W_1 + \cdots + \dim W_m$;
- (3) $W_i \cap \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} W_j = 0$.

$$(2) \Rightarrow (3): \dim \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} W_j \leq \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} \dim W_j. \implies$$

$$\dim \left(W_i \cap \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} W_j \right)$$

$$= \dim W_i + \dim \left(\sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} W_j \right) - \dim \left(W_i + \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} W_j \right)$$

$$\leq \dim W_i + \left(\sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} \dim W_j \right) - \sum_{j=1}^m \dim W_j = 0$$

所以 $W_i \cap \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} W_j = 0$

命题 2.8 的证明 (3)

- (1) $W_1 + \cdots + W_m$ 是直和;
- (2) $\dim(W_1 + \cdots + W_m) = \dim W_1 + \cdots + \dim W_m$;
- (3) $W_i \cap \sum_{1 \leq j \leq m, j \neq i} W_j = 0$.

(3) \Rightarrow (1): 设 $\alpha \in W_1 + \cdots + W_m$ 有两个分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_m,$$

其中 $\alpha_i, \alpha'_i \in W_i, i = 1, \cdots, m$ 则有

$$\beta = \alpha_1 - \alpha'_1 = (\alpha'_2 - \alpha_2) + \cdots + (\alpha'_m - \alpha_m)$$

于是 $\beta \in W_1 \cap (W_2 + \cdots + W_m) = \{0\}$ 所以 $\alpha'_1 = \alpha_1$

同理可证 $\alpha_i = \alpha'_i, i = 2, \cdots, m$.

这样就得到了分解的唯一性, 所以 $W_1 + \cdots + W_m$ 是直和.

[back](#)

子空间的正交

- 若 U, W 都是欧氏空间 V 的子空间, 对于任意的

$$\mathbf{x} \in U, \mathbf{y} \in W$$

- 都有 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})=0$, 则 U 与 W 正交, 记作 $U \perp W$
- 如果一个向量 \mathbf{x} 与空间 W 中的任意向量都正交, 则称 \mathbf{x} 与 W 正交。
- 正交空间的交集为 0
- 正交空间的和为直和
- n 维欧氏空间 V 的每一个子空间都存在唯一的正交补
- 齐次方程组的解空间为系数空间的正交补