线性代数

欧式空间

张祥朝

复旦大学光科学与工程系

2013-5-9

向量的内积

定义：设有n 维向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

令 $$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \ ,$$

则称 (x, y) 为向量 x 和 y 的内积.

说明：

- 内积是两个向量之间的一种运算，其结果是一个实数.
- 内积可用矩阵乘法表示：当x 和 y 都是列向量时，

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y \ .$$

向量的内积

定义：设有 n 维向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

令

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T y$$

则称 (x, y) 为向量 x 和 y 的内积.

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- 对称性：$(x, y) = (y, x)$.
- 线性性质：$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

- 当 $x = 0$（零向量）时，$(x, x) = 0$;

  当 $x \neq 0$（零向量）时，$(x, x) > 0$.
- Cauchy-Schwarz不等式

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- 对称性：$(x, y) = (y, x)$.

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- 对称性：$(x, y) = (y, x)$.
- 线性性质：$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$[\lambda x, y]$

$[x + y, z]$

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- 对称性：$(x, y) = (y, x)$.
- 线性性质：$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

  $$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

- 当 $x = 0$（零向量）时，$(x, x) = 0$;

  当 $x \neq 0$（零向量）时，$(x, x) > 0$.

$$\boxed{(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant 0}$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- 对称性：$(x, y) = (y, x)$.
- 线性性质：$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

  $$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

- 当 $x = 0$（零向量）时，$(x, x) = 0$；

  当 $x \neq 0$（零向量）时，$(x, x) > 0$.

- 定义了内积的线性空间称为欧几里得空间(Euclidean space).
- 严格来讲，$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ 并不是内积的唯一定义，而是常用定义。对于向量空间中的内积计算成立。
- 比如，在一个多项式空间中，就可以定义定积分作为内积。
- 1，交换性：$(f,g)=\int_a^b f\cdot g dx=\int_a^b g\cdot f dx=(g,f)$

$$(kf,g)=\int_a^b kf\cdot g dx=k\int_a^b f\cdot g dx=k(f,g)$$

- 2，线性

$$(f,g+h)=\int_a^b f\cdot(g+h)dx=\int_a^b f\cdot g dx+\int_a^b f\cdot h dx=(f,g)+(f,h)$$

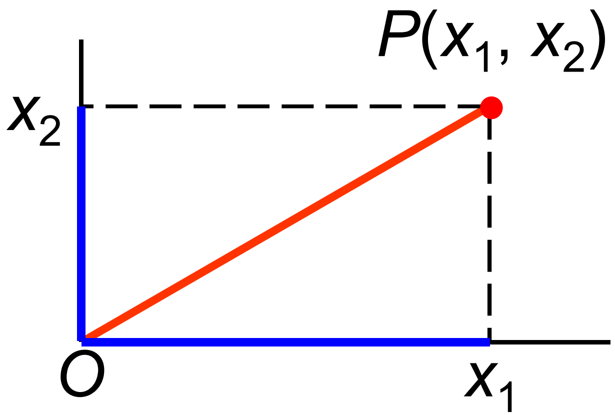
- 3，非负性　$(f,f)=\int_a^b f\cdot f dx\geq 0$　　$(f,f)=0\Leftrightarrow f\equiv 0$

- 对于向量空间，
- Cauchy-Schwarz不等式

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

- 证明
- $\mathbf{x}=0$ 或$\mathbf{y}=0$时显然成立。
- $\mathbf{x}\neq 0$且$\mathbf{y}\neq 0$时，由于$(\mathbf{x}+t\mathbf{y},\mathbf{x}+t\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{x})+2t(\mathbf{x},\mathbf{y})+t^2(\mathbf{y},\mathbf{y})\geqslant 0$
- 取$t=-(\mathbf{x},\mathbf{y})/(\mathbf{y},\mathbf{y})$，则有
- $(\mathbf{x},\mathbf{x})-(\mathbf{x},\mathbf{y})^2/(\mathbf{y},\mathbf{y})\geqslant 0$
- $(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})-(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\geqslant 0$
- 故不等式成立

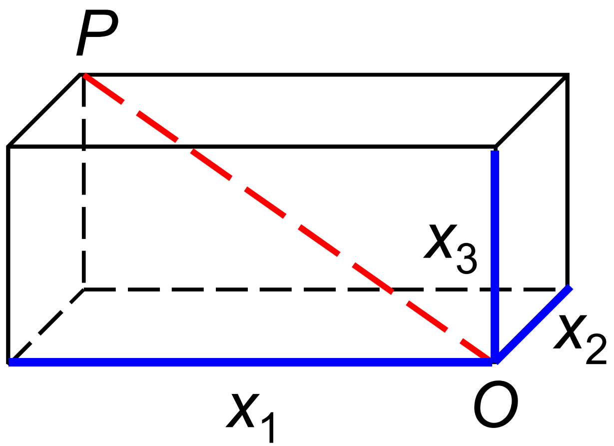
线段的长度



$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$$

若令 $x = (x_1, x_2)^T$，则

$$|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



若令 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$，则

$$|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

向量的长度

定义：令 $\sqrt{[x,x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0$

称 $\|x\|$ 为 n 维向量 x 的长度（或范数）．

当 $\|x\| = 1$时，称 x 为单位向量．

向量的长度具有下列性质：

- 非负性：当 $x = 0$（零向量）时，$\|x\| = 0$;

  当 $x \neq 0$（零向量）时，$\|x\| > 0$.

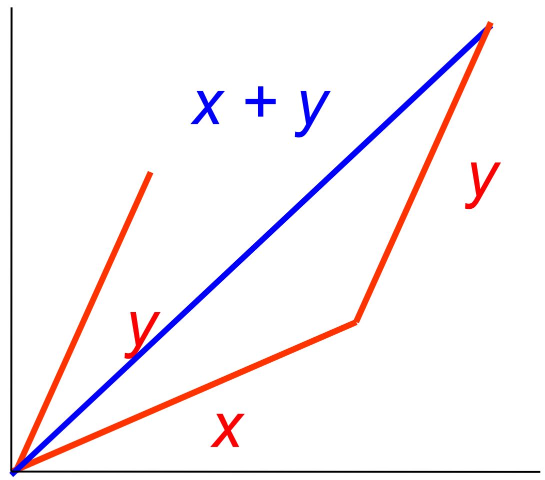
- 齐次性：$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$．

$[\lambda x, \lambda x]$

$\|\lambda x\|$

向量的长度

- 三角不等式：$\| x+y \| \leqslant \| x \| + \| y \|.$



Cauchy-Schwarz不等式

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y) = \| x \|^2 \cdot \| y \|^2$$

当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时，$\left| \dfrac{[x, y]}{\| x \| \cdot \| y \|} \right| \leq 1$

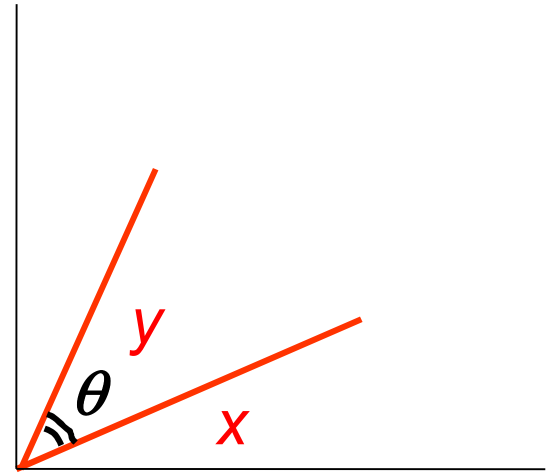
定义：当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时，把

$$\theta = \arccos \frac{[x, y]}{\| x \| \cdot \| y \|}$$

称为 n 维向量 x 和 y 的夹角.

当 $(x, y) = 0$，称向量 x 和 y

正交（orthogonal）.



结论：若 $x = 0$，则 x 与任何向量都正交.

- 显然，对于n维欧式空间，可以取n个无关向量组作为空间的基
- 设基为$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$
- 对于空间中任意向量

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{EX} \qquad \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{EY}$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=X^TE^TEY=X^TAY$$

- 所以向量的内积变成其坐标的计算。其中A称为基的度量矩阵

定义：两两正交的非零向量组成的向量组成为**正交向量组**.

定理：若 n 维向量 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关.

证明：设 $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_r a_r = 0$（零向量），那么

$$0 = (a_1, 0) = (a_1, k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_r a_r)$$

$$= k_1 (a_1, a_1) + k_2 (a_1, a_2) + \ldots + k_r (a_1, a_r)$$

$$= k_1 (a_1, a_1) + 0 + \ldots + 0$$

$$= k_1 \|a_1\|^2$$

从而 $k_1 = 0$.

同理可证，$k_2 = k_3 = \ldots = k_r = 0$.

综上所述，$a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关.

例：已知3 维向量空间R^3中两个向量 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

正交，试求一个非零向量a_3，使a_1, a_2, a_3两两正交.

分析：显然$a_1 \perp a_2$.

解：设$a_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$，若$a_1 \perp a_3$，$a_2 \perp a_3$，则

$$(a_1, a_3) = a_1^T a_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$(a_2, a_3) = a_2^T a_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

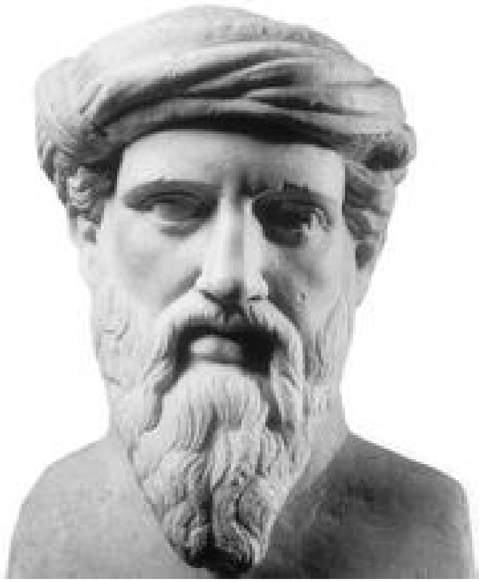
$$Ax=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}$

从而有基础解系 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，令 $a_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

毕达哥拉斯(Pythagoras)定理



- 若x⊥y, 则

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$$

- 即

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$$

定义：n 维向量$e_1, e_2, \ldots, e_r$是向量空间$V \subset R^n$ 中的向量，满足

- ✓ $e_1, e_2, \ldots, e_r$是向量空间 V 中的一个基（最大无关组）；
- ✓ $e_1, e_2, \ldots, e_r$两两正交；
- ✓ $e_1, e_2, \ldots, e_r$都是单位向量，

则称 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是V 的一个规范正交基/标准正交基 (orthonormal basis).

例：
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是 R^4 的一个规范正交基.

$$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

也是 R^4 的一个规范正交基.

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

是 R^4 的一个基，但不是规范正交基.

设 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 V 中的一个正交基，则 V 中任意一个向量可唯一表示为 $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_r e_r$

于是

$$\lambda_i = \frac{[x, e_i]}{[e_i, e_i]} = \frac{[x, e_i]}{\| e_i \|^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

特别地，若 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是 V 的一个规范正交基，则

$$\lambda_i = [x, e_i], \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

问题：向量空间 V 中的一个基 $a_1, a_2, \ldots, a_r$

⬇

向量空间 V 中的一个规范正交基 $e_1, e_2, \ldots, e_r$

- 投影（projection）
- x到y的标量投影

$$a=\frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}$$

- x到y的向量投影

$$\boldsymbol{p}=a\boldsymbol{u}=a\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}=\frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}$$

求规范正交基的方法

基 ➡ 正交基 ➡ 规范正交基

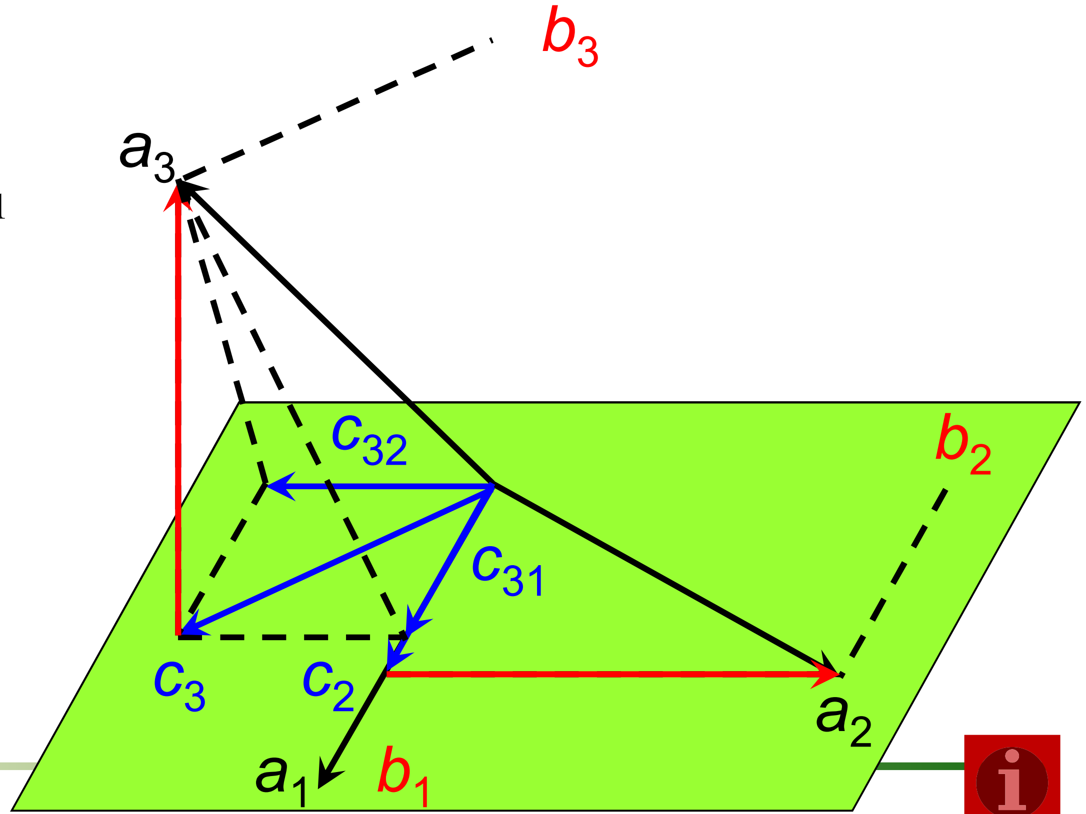
第一步：正交化——施密特（Schimidt）正交化过程

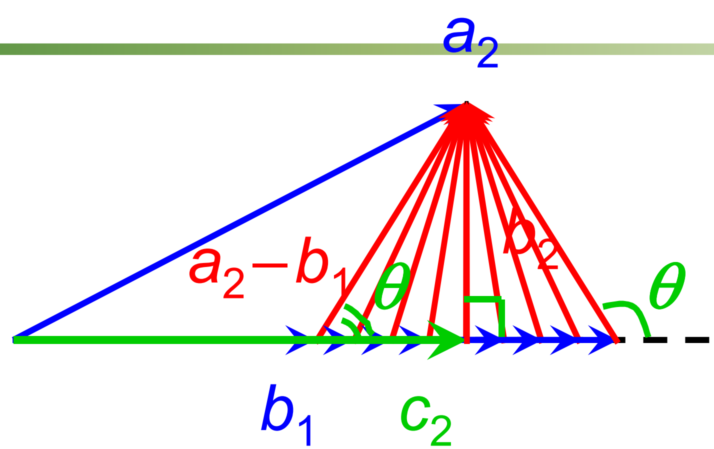
设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是向量空间 V 中的一个基，那么令

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$$b_3 = a_3 - c_3$$





令 c_2 为 a_2 在 b_1 上的投影，则 $c_2 = \lambda b_1$，

若令 $b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \lambda b_1$，则 $b_1 \perp b_2$.

下面确定λ的值．因为

$$0 = [b_2, b_1]$$

所以 $\lambda = \dfrac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]}$，从而 $b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \lambda b_1 = a_2 - \dfrac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$

第一步：正交化——施密特（Schimidt）正交化过程

设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是向量空间 V 中的一个基，那么令

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1$$

……

$$\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{a}_r - \frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1 - \frac{[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2 - \cdots - \frac{[\boldsymbol{b}_{r-1}, \boldsymbol{a}_r]}{[\boldsymbol{b}_{r-1}, \boldsymbol{b}_{r-1}]}\boldsymbol{b}_{r-1}$$

于是 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 两两正交，并且与 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 等价，即

$b_1, b_2, \cdots, b_r$ 是向量空间 V 中的一个正交基.

特别地，$b_1, \cdots, b_k$ 与 $a_1, \cdots, a_k$ 等价（$1 \leqslant k \leqslant r$）.

第二步：单位化

设 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 是向量空间 V 中的一个正交基， 那么令

$$e_1 = \frac{1}{\| b_1 \|} b_1,\ e_2 = \frac{1}{\| b_2 \|} b_2, \cdots,\ e_r = \frac{1}{\| b_r \|} b_r$$

因为

$$[e_1, e_1] = \left[\frac{1}{\| b_1 \|} b_1, \frac{1}{\| b_1 \|} b_1 \right] = \frac{1}{\| b_1 \|^2} \left[b_1, b_1 \right] = \frac{\| b_1 \|^2}{\| b_1 \|^2} = 1$$

$$\| e_1 \| = \sqrt{[e_1, e_1]} = 1$$

从而 $e_1, e_2, \dots, e_r$ 是向量空间 V 中的一个规范正交基.

例：设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，试用施密特正交化

过程把这组向量规范正交化.

解：第一步正交化，取

$$b_1=a_1$$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

例：设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解：第二步单位化，令

$$e_1=\frac{1}{\|b_1\|}b_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$e_2=\frac{1}{\|b_2\|}b_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$e_3=\frac{1}{\|b_3\|}b_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

例：已知 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，试求非零向量$a_2$, a_3，使a_1, a_2, a_3 两两正交.

解：若$a_1 \perp a_2$，$a_1 \perp a_3$，则

$$(a_1, a_2) = a_1^T a_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$(a_1, a_3) = a_1^T a_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

即a_2, a_3 应满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, a_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

把基础解系正交化即为所求. （以保证 $a_2 \perp a_3$ 成立）

定义：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^TA = E$, 即 $A^{-1} = A^T$,

则称矩阵 A 为正交矩阵，简称正交阵.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$a_i^T a_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

从而可得

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交.　即 A 的列向量组构成R^n 的规范正交基.

定义：如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，即 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$，则称矩阵A 为正交矩阵，简称正交阵.

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交．即 A 的列向量组构成R^n 的规范正交基.

因为$A^{\mathrm{T}}A = E$ 与$AA^{\mathrm{T}} = E$ 等价，所以

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$[b_i, b_j] = b_i^T b_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

定义：如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，即 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$，则称矩阵A 为**正交矩阵**，简称**正交阵**.

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交．即 A 的列向量组构成R^n 的规范正交基.

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的行向量都是单位向量，且两两正交．　即 A 的行向量组构成R^n 的规范正交基.

例：正交矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

R^4 的一个规范正交基

$$e_1=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

正交矩阵具有下列性质：

✓ 若 A 是正交阵，则 A^{-1} 也是正交阵，且$|A| = 1$ 或-1.

✓ 若 A 和B是正交阵，则 A 和 B 也是正交阵.

定义：若 P 是正交阵，则线性变换 $y = Px$ 称为正交变换.

$$\|y\| = \sqrt{y^T y} = \sqrt{(Px)^T (Px)} = \sqrt{x^T P^T Px} = \sqrt{x^T x} = \|x\|$$

经过正交变换，线段的长度保持不变（从而三角形的形状保持不变），这就是正交变换的优良特性.

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n.
\end{cases}
$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 线性变换，其中 a_{ij} 为常数.

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n.
\end{cases}
$$

……

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

系数矩阵

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

返回