线性代数

第四章 线性空间

张祥朝

复旦大学光科学与工程系

2013-4-11

一、线性空间的定义

线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是一个抽象的概念，它是向量空间概念的推广．

线性空间是为了解决实际问题而引入的，它是某一类事物从量的方面的一个抽象，即把实际问题看作向量空间，进而通过研究向量空间来解决实际问题．

定义 1 设V是一个非空集合，R为实数域．如果对于任意两个元素 $\alpha,\beta\in V$，总有唯一的一个元素$\gamma\in V$与之对应，称为α与β的和，记作

$$\gamma=\alpha+\beta$$

若对于任一数$\lambda\in R$与任一元素$\alpha\in V$，总有唯一的一个元素$\delta\in V$与之对应，称为λ与α的积，记作

$$\delta=\lambda\alpha$$

如果上述的两种运算满足以下八条运算规律，那么V就称为数域 R上的向量空间（或线性空间）.

设$\alpha,\beta,\gamma\in V;\lambda,\mu\in R$

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; **加法交换律**

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$; **加法结合律**

(3) 在V中存在零元素 0,对任何$\alpha\in V$,都有

$$\alpha+0=\alpha;$$

(4)对任何$\alpha \in V$,都有α的负元素$\beta \in V$,使

$$\alpha + \beta = 0;$$

(5) $1\alpha = \alpha;$

(6) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha;$

(7)$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha;$

(8)$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta.$

说明

1． 凡满足以上八条规律的加法及乘数运算，称为线性运算．

2．向量空间中的向量不一定是有序数组．

3．判别线性空间的方法：一个集合，对于定义的加法和数乘运算不**封闭**，或者运算不满足八条性质的任一条，则此集合就不能构成线性空间．

线性空间的判定方法

（1）一个集合，如果定义的加法和乘数运算是通常的实数间的加乘运算，则只需检验对运算的封闭性.

例 1　实数域上的全体$m \times n$ 矩阵，对矩阵的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间，记作$R^{m\times n}$.

$$\because A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}, \quad \lambda A_{m\times n} = D_{m\times n},$$

$\therefore R^{m\times n}$是一个线性空间 .

例2 次数不超过n的多项式的全体，记作 $P[x]_n$，即

$$P[x]_n=\{p=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0 \mid a_n,\cdots,a_1,a_0\in R\},$$

对于通常的多项式加法，数乘多项式的乘法构成向量空间.

通常的多项式加法、数乘多项式的乘法两种运算满足线性运算规律.

$$(a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0)+(b_n x^n+\cdots+b_1 x+b_0)$$
$$=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in P[x]_n$$

$$\lambda(a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0)$$
$$=(\lambda a_n)x^n+\cdots+(\lambda a_1)x+(\lambda a_0)\in P[x]_n$$

$P[x]_n$对运算封闭.

例3 n次多项式的全体

$$Q[x]_n = \{p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in R, \text{且 } a_n \neq 0\}$$

对于通常的多项式加法和乘数运算不构成向量空间.

$$0p = 0x^n + \cdots + 0x + 0 \notin Q[x]_n$$

$Q[x]_n$对运算不封闭.

例 4

$$S[x]=\{s=A\sin(x+B)\mid A,B\in R\}.$$

对于通常的函数加法及数乘函数的乘法构成线性空间.

$$\because s_1+s_2=A_1\sin(x+B_1)+A_2\sin(x+B_2)$$

$$=(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos x+b_2\sin x)$$

$$=(a_1+a_2)\cos x+(b_1+b_2)\sin x$$

$$=A\sin(x+B)\in S[x].$$

$$\lambda s_1 = \lambda A_1 \sin(x + B_1) = (\lambda A_1)\sin(x + B_1) \in S[x]$$

$\therefore S[x]$ 是一个线性空间.

一般地

例 5　在区间 $[a,b]$ 上全体实连续函数，对函数的加法与数和函数的数量乘法，构成实数域上的线性空间.

（2）一个集合，如果定义的加法和乘数运算不是通常的实数间的加乘运算，则必需检验是否满足八条线性运算规律.

例 6　正实数的全体，记作 R^+，在其中定义加法及乘数运算为

$$a \oplus b = ab, \quad \lambda \circ a = a^{\lambda}, \left(\lambda \in R, a, b \in R^+\right).$$

验证 R^+ 对上述加法与乘数运算构成线性空间.

证明　$\forall a, b \in R^+, \Rightarrow a \oplus b = ab \in R^+;$

$$\forall \lambda \in R, a \in R^+, \Rightarrow \lambda \circ a = a^{\lambda} \in R^+.$$

所以对定义的加法与乘数运算封闭.

下面一一验证八条线性运算规律：

(1) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a;$

(2) $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (ab)c = a \oplus (b \oplus c);$

(3) R^{+}中存在零元素 1,对任何$a \in R^{+}$,有

$$a \oplus 1 = a \cdot 1 = a;$$

(4) $\forall a \in R^{+}$,有负元素$a^{-1} \in R^{+}$,使

$$a \oplus a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1;$$

$$(5)\ 1 \circ a = a^{1} = a;$$

$$(6)\ \lambda \circ (\mu \circ a) = \lambda \circ a^{\mu} = \left(a^{\mu}\right)^{\lambda} = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \circ a;$$

$$(7)\ (\lambda + \mu) \circ a = a^{\lambda+\mu} = a^{\lambda} a^{\mu} = a^{\lambda} \oplus a^{\mu}$$

$$= \lambda \circ a \oplus \mu \circ a;$$

$$(8)\ \lambda \circ (a \oplus b) = \lambda \circ (ab) = (ab)^{\lambda} = a^{\lambda} b^{\lambda}$$

$$= a^{\lambda} \oplus b^{\lambda} = \lambda \circ a \oplus \lambda \circ b.$$

所以 R^{+} 对所定义的运算构成线性空间.

二、线性空间的性质

1．零元素是唯一的.

证明　假设 $0_1, 0_2$ 是线性空间V中的两个零元素，则对任何 $\alpha \in V$,有

$$\alpha + 0_1 = \alpha, \alpha + 0_2 = \alpha.$$

由于 $0_1, 0_2 \in V$,

所以 $0_2 + 0_1 = 0_2, 0_1 + 0_2 = 0_1.$

$$\Rightarrow 0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

2．负元素是唯一的．

证明 假设 α 有两个负元素 β 与 γ ,那么

$$\alpha + \beta = \mathbf{0}, \quad \alpha + \gamma = \mathbf{0}.$$

则有 $$\beta = \beta + \mathbf{0} = \beta + (\alpha + \gamma)$$

$$= (\beta + \alpha) + \gamma$$

$$= \mathbf{0} + \gamma = \gamma.$$

向量 α 的负元素记为 $-\alpha$.

3. $\mathbf{0}\alpha = \mathbf{0}$; $(-1)\alpha = -\alpha$; $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

证明 $\because \alpha + 0\alpha = 1\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha = \alpha$,

$\therefore 0\alpha = \mathbf{0}$.

$\because \alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = [1+(-1)]\alpha = 0\alpha = \mathbf{0}$,

$\therefore (-1)\alpha = -\alpha$.

$$\lambda\mathbf{0} = \lambda[\alpha + (-1)\alpha] = \lambda\alpha + (-\lambda)\alpha$$

$$= [\lambda + (-\lambda)]\alpha = 0\alpha$$

$$= \mathbf{0}.$$

4. 如果$\lambda\alpha = 0$，则$\lambda = 0$或 $\alpha = 0$.

证明　假设 $\lambda \neq 0$，那么 $\frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0 = 0$.

又 $\frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha) = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot \alpha = \alpha$.

$\therefore \alpha = 0$.

同理可证：若 $\alpha \neq 0$ 则有$\lambda = 0$.

三、线性空间的子空间

定义2 设 V 是一个线性空间，L 是 V 的一个非空子集，如果 L 对于 V 中所定义的加法和乘数两种运算也构成一个线性空间，则称 L 为 V 的子空间.

定理 线性空间 V 的非空子集 L 构成子空间的充分必要条件是：L 对于 V 中的线性运算封闭.

例8 $R^{2\times3}$的下列子集是否构成子 空间?为什么?

$$(1)\ W_1=\left\{\begin{pmatrix}1 & b & 0\\ 0 & c & d\end{pmatrix}\middle|\, b,c,d\in R\right\};$$

$$(2)\ W_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\middle|\, a+b+c=0,a,b,c\in R\right\}.$$

解 **(1)不构成子空间.因为对**

$$A=B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in W_1$$

有

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\notin W_1,$$

即W_1对矩阵加法不封闭，不构成子空间.

(2) 因$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$，即$W_2$非空.

对任意

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \in W_2$$

有 $a_1 + b_1 + c_1 = 0, \quad a_2 + b_2 + c_2 = 0,$

于是 $$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

满足 $$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=0,$$

即 $A+B\in W_2$, 对任意$k\in R$有

$$kA=\begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 & 0 \\ 0 & 0 & kc_1 \end{pmatrix}$$

且 $$ka_1+kb_1+kc_1=0,$$

即 $kA\in W_2$，故W_2是$R^{2\times 3}$的子空间.

四、小结

线性空间是二维、三维几何空间及n维向量空间的推广，它在理论上具有高度的概括性.

线性空间的元素统称为“向量”，但它可以是通常的向量，也可以是矩阵、多项式、函数等.

线性空间 $\begin{cases} \text{是一个集合} \\ \text{对所定义的加法及数乘运算封闭} \\ \text{所定义的加法及数乘符合线性运算} \end{cases}$

思考题

实数域R上的n元非齐次线性方程组$AX = B$的所有解向量,对于通常的向量加法和数量乘法,是否构成R上的一个线性空间?为什么?

答 不能构成R上的一个线性空间 .

事实上,设X_1, X_2都是n元非齐次线性方程组$AX = B$的解向量,则

$$AX_1 = B, \qquad AX_2 = B$$

但 $$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = B + B = 2B \neq B$$

即$X_1 + X_2$不是$AX = B$的解向量,也就是说所有解向量的集合对加法运算 不封闭.

因此不能构成一个线性 空间.

第二节 维数、基、坐标

一、线性空间的基与维数

已知：在R^n中，线性无关的向量组最多由 n 个向量组成，而任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的.

问题：线性空间的一个重要特征——在线性空间 V 中，最多能有多少线性无关的向量?

定义 1　在线性空间V中，如果存在 n个元素

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$$

满足:

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关；

(2) V中任一元素 α总可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示,

那末, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就称为线性空间V 的一个基,n 称为线性空间V 的维数.

维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间，记作 V_n.

当一个线性空间 V 中存在任意多个线性无关的向量时，就称 V 是无限维的.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V_n 的一个基，则 V_n 可表示为

$$V_n = \{\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in R\}$$

二、元素在给定基下的坐标

定义 2 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间$V_n$的一个基，对于任一元素$\alpha\in V_n$，总有且仅有一组有序数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,$$

有序数组$x_1,x_2,\cdots,x_n$称为元素α在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$这个基下的坐标，并记作 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

例1 在线性空间$P[x]_4$中, $p_1=1, p_2=x, p_3=x^2, p_4=x^3, p_5=x^4$就是它的一个基.

任一不超过4次的多项式

$$p=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

可表示为

$$p=a_0p_1+a_1p_2+a_2p_3+a_3p_4+a_4p_5$$

因此 p 在这个基下的坐标为

$$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)^T$$

若取另一基 $q_1=1, q_2=1+x, q_3=2x^2, q_4=x^3,$ $q_5=x^4$，则

$$p=(a_0-a_1)q_1+a_1q_2+\frac{1}{2}a_2q_3+a_3q_4+a_4q_5$$

因此 p 在这个基下的坐标为

$$\left(a_0-a_1, a_1, \frac{1}{2}a_2, a_3, a_4\right)^T$$

注意 线性空间 V 的任一元素在不同的基下所对的坐标一般不同，一个元素在一个基下对应的坐标是唯一的.

例 2　所有二阶实矩阵组成的集合 V，对于矩阵的加法和数量乘法，构成实数域 R 上的一个线性空间．对于 V 中的矩阵

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

有

$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=\begin{pmatrix}k_1 & k_2\\ k_3 & k_4\end{pmatrix},$$

因此

$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$\Leftrightarrow$ $$k_1=k_2=k_3=k_3=0,$$

即 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 线性无关.

对于任意二阶实矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in V,$$

有

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$$

因此$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$为$V$的一组基.

而矩阵A在这组基下的坐标是

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T.$$

例3 在线性空间$R[x]_n$中,取一组基

$$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = (x-a), \varepsilon_3 = (x-a)^2, \cdots, \varepsilon_n = (x-a)^{n-1}$$

则由泰勒公式知

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

因此 $f(x)$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_n$下的坐标是

$$\left(f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \cdots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)^{\mathrm{T}}.$$

三、线性空间的同构

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维线性空间$V_n$的一组基，在这组基下，$V_n$中的每个向量都有唯一确定的坐标. 而向量的坐标可以看作R^n中的元素，因此向量与它的坐标之间的对应就是V_n到R^n的一个映射.

由于R^n中的每个元素都有V_n中的向量与之对应，同时V_n中不同的向量的坐标不同，因而对应R^n中的不同元素. 我们称这样的映射是V_n与R^n的一个$1-1$对应的映射. 这个对应的重要性表现在它与运算的关系上.

设 $$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$$

即向量$\alpha,\beta \in V$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标分别为

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$和$(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$,则

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\alpha_1 + (a_2 + b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_n + b_n)\alpha_n$$

$$k\alpha = k a_1\alpha_1 + k a_2\alpha_2 + \cdots + k a_n\alpha_n$$

于是$\alpha + \beta$与$k\alpha$的坐标分别为

$$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T$$

$$= (a_1,a_2,\cdots,a_n)^T + (b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$$

$$(k a_1,k a_2,\cdots,k a_n)^T = k(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

上式表明：在向量用坐标表示后，它们的运算就归结为坐标的运算，因而线性空间 V_n 的讨论就归结为 R^n 的讨论.

下面更确切地说明这一点.

定义 设 U、V 是两个线性空间，如果它们的元素之间有一一对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，那末就称线性空间 U 与 V 同构.

例如 n维线性空间

$$V_n = \{\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in R\}$$

与n维数组向量空间R^n同构.

因为

(1) V_n中的元素α与R^n中的元素$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

形成一一对应关系;

$$\begin{array}{ll} V_n & \alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \\ & \quad\ \ \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \qquad\qquad\qquad \updownarrow \\ R^n & x = (x_1 \quad , \quad x_2 \quad , \quad \cdots, \quad x_n \quad)^T \end{array}$$

(2)设 $\alpha \leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

$$\beta \leftrightarrow (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

则有 $\alpha + \beta \leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T + (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$

$$\lambda\alpha \leftrightarrow \lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

结论

1．数域 P上任意两个n 维线性空间都同构.

2．同构的线性空间之间具有反身性、对称性与传递性.

3．同维数的线性空间必同构.

同构的意义

在线性空间的抽象讨论中，无论构成线性空间的元素是什么，其中的运算是如何定义的，我们所关心的只是这些运算的代数性质．从这个意义上可以说，同构的线性空间是可以不加区别的，而有限维线性空间唯一本质的特征就是它的维数．

四、小结

１．线性空间的基与维数；

２．线性空间的元素在给定基下的坐标；

坐标：（１）把抽象的向量与具体的数组向量联系起来；

（２）把抽象的线性运算与数组向量的线性运算联系起来.

３．线性空间的同构.

思考题

求由$P[x]_3$中元素

$$f_1(x)=x^3-2x^2+4x+1,$$

$$f_2(x)=2x^3-3x^2+9x-1,$$

$$f_3(x)=x^3+6x-5,$$

$$f_4(x)=2x^3-5x^2+7x+5$$

解 令

$$k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+k_3 f_3(x)+k_4 f_4(x)=0$$

则得

$$(k_1+2k_2+k_3+2k_4)x^3+(-2k_1-3k_2-5k_4)x^2$$
$$+(4k_1+9k_2+6k_3+7k_4)x+(k_1-k_2-5k_3+5k_4)=0.$$

因此
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

设该齐次线性方程组的系数矩阵为A,则

$$A \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此,$f_1(x), f_2(x)$线性无关,是$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$所生成的子空间的基,该子空间的维数为2,且有

$$f_3(x) = -3f_1(x) + 2f_2(x),$$

$$f_4(x) = 4f_1(x) - f_2(x).$$