文章编号:1003－207(2016)07－0135－08
DOI:10.16381/j.cnki.issn1003－207x.2016.07.016

基于最小平方距离的区间值合作对策求解模型与方法

李登峰[1],刘家财[1,2]

(1. 福州大学经济与管理学院,福建 福州　350108;
2. 福建农林大学交通与土木工程学院,福建 福州　350002)

摘　要:现有针对联盟 S 特征(或支付)值表示为区间值 $\upsilon(S)=[\upsilon_L(S),\upsilon_R(S)]$ 的合作对策(简称区间值合作对策)的研究,多数利用区间算术(比如,区间减法)、特殊排序函数等,并在经典 Shapley 值基础上进行拓展。本文主要目的是发展一种基于最小平方法的 n 人区间值合作对策的有效求解方法。首先,利用区间值距离概念和最小平方法,建立以联盟分配与联盟支付值之差的平方和为最小的数学优化模型,据此求解确定每个局中人的区间值分配 $x_i=[x_{Li},x_{Ri}](i=1,2,\cdots,n)$,可由解析公式 $[X_L,X_R]=[A^{-1}B_L,A^{-1}B_R]$ 的相应分量确定,其中 $B_L=(\sum\limits_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_L(S),\sum\limits_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_L(S),\cdots,\sum\limits_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_L(S))^{\mathrm{T}}$, $B_R=(\sum\limits_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_R(S),\sum\limits_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_R(S),\cdots,\sum\limits_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_R(S))^{\mathrm{T}}$, $A^{-1}=(1/2^{n-2})(a'_{ij})_{n\times n}$,且 $a'_{ij}=-/(n+1)(i\neq j$ 时)或 $n/(n+1)(i=j$ 时)。然后,推广所导出的辅助数学优化模型,使其满足诸如有效性 $x(N)=\upsilon(N)$ 等要求,进而求解确定每个局中人的区间值分配 $x'_i=[x'_{Li},x'_{Ri}](i=1,2,\cdots,n)$,可由解析公式 $[X'_L,X'_R]=[X_L+(\upsilon_L(N)-\sum\limits_{i=1}^{n}x_{Li})e/n,X_R+(\upsilon_R(N)-\sum\limits_{i=1}^{n}x_{Ri})e/n]$ 的相应分量确定。最后,利用一个配送联盟问题的数值实例进行验证与比较分析,说明了所提出模型与方法的有效性、实用性和优越性。文中所提出的研究模型与方法可有效避免区间值减法运算带来的计算结果不确定性扩大等不合理问题,为求解区间值合作对策提供一种新的理论视角和实用工具。

关键词:区间值合作对策;最小平方法;损失函数;配送联盟;数学规划
中图分类号:O225　　**文献标识码**:A

1　引言

由于管理决策环境与条件的不确定性、信息的不完备性与不准确性、局中人利益的多元化与目标的多样性、知识经验与能力的局限性,局中人联盟的特征(或支付)函数通常用模糊值而非精确值来表示[1－4]。联盟特征函数用区间值表示的合作对策就是联盟值具有不确定性的合作对策的一种重要形式,常简称为区间值合作对策。在区间值合作对策中,往往无法确切地知道每个联盟的收益,而只能估计出联盟收益的模糊值,并且将其用一个闭区间的形式来表示。区间值合作对策是清晰(经典)合作对策的重要推广,近年来受到了一些研究者的关注,并逐渐被运用于解决一些竞争型经济管理决策问题[5－14]。比如,银行破产问题就是一个很好的区间值合作对策例子。Han Weibin 等[5]介绍了区间值核心的概念和拟 Shapley 值,讨论了两者之间的关系并给出了可能存在的区间值解。Alparslan 等[9]将经典的两人合作对策理论拓展到区间值两人合作对策,研究了核心、平衡性和超可加性等相关的概念。Li Dengfeng[13]给出了一种用于求解支付值用区间值来表示的矩阵对策的简单而高效的线性规划模型,并证明其是经典矩阵对策的拓展。

然而,现有区间值合作对策求解方法,大多数直接利用区间值减法等进行运算,极可能造成局中人

收稿日期:2014－12－24;**修订日期**:2015－10－20
基金项目:国家自然科学基金重点项目(71231003);国家自然科学基金资助项目(71171055);高等学校博士学科点专项科研基金资助课题(20113514110009);福建省社会科学规划项目(2013C024);福建省教育厅科技项目(JA13122)
通讯作者简介:李登峰(1965－),男(汉族),广西博白人,福州大学经济与管理学院教授,博导,研究方向:经济管理决策与对策(博弈),E-mail:lidengfeng@fzu.edu.cn.

收益(或分摊成本)的不确定性放大或为负值等问题。为此,本文借鉴最小平方法的思想,从任意联盟中的所有局中人都希望他们从最大联盟中获得的分配值之和至少能尽可能地接近其联盟值这一愿望为出发点(即局中人参与大联盟后所获得的分配值之和不应和他们单独形成联盟时获得的联盟收益偏离太多),构造区间值距离公式,并建立以联盟分配与联盟支付之差的平方和为最小的数学优化模型,据此求解确定每个局中人的区间值分配,有效地避免了传统区间值合作对策求解过程中使用区间值减法带来的局中人区间值分配放大或分配所得为负值等不合理现象。

2 区间值运算与距离

2.1 区间值运算

用 $I(R)$ 表示实数集 R 上所有有界闭区间集合。区间值 $a=[a_L,a_R]=\{x \mid x\in R, a_L\leqslant x\leqslant a_R\}$,其中 $a_L\in R$ 和 $a_R\in R$。显然,若 $a_L=a_R$,则区间值 $a=[a_L,a_R]$ 退化为一个精确数即实数,记为 a_L 或 a_R。因此,区间值是精确数的拓展。换句话说,精确数是区间值的一种特殊情形。

区间值运算在区间值合作对策中具有重要作用。本小节介绍几种常见区间值运算法则[5,13-15]。

定义 1 设 $a=[a_L,a_R]$ 和 $b=[b_L,b_R]$ 为 $I(R)$ 上的两个区间值,$\gamma\in R$ 为任意实数。则:

(1)区间值相等:$a=b$ 当且仅当 $a_L=b_L$ 和 $a_R=b_R$。$a=b$ 意味着区间值 a 和 b 完全相同;

(2)区间值加法:$a+b=[a_L+b_L,a_R+b_R]$;

(3)区间值减法:$a-b=[a_L-b_R,a_R-b_L]$;

(4)区间值与实数的乘积:

$$\gamma a=\begin{cases}[\gamma a_L,\gamma a_R] & (\gamma\geqslant 0)\\ [\gamma a_R,\gamma a_L] & (\gamma<0)\end{cases}$$

2.2 区间值之间的距离

定义 2 设 $a=[a_L,a_R]$、$b=[b_L,b_R]$ 和 $c=[c_L,c_R]$ 是 $I(R)$ 上的任意三个区间值。若满足下面三条条件:

(1) $D(a,b)\geqslant 0$;

(2) $D(a,b)=D(b,a)$;

(3) $D(a,b)\leqslant D(a,c)+D(c,b)$,

则称 $D(a,b)$ 为区间值 a 和 b 之间的距离。

为更好描述最小平方法思想在区间值合作对策中的应用,给出如下区间值距离(平方)公式:

$$D(a,b)=(a_L-b_L)^2+(a_R-b_R)^2 \tag{1}$$

显然,式(1)满足定义 2 中条件(1)和(2)。下面仅证明条件(3)。事实上,根据式(1),得:

$$D(a,b)=(a_L-b_L)^2+(a_R-b_R)^2\leqslant[(a_L-c_L)^2+(c_L-b_L)^2]+[(a_R-c_R)^2+(c_R-b_R)^2]=[(a_L-c_L)^2+(a_R-c_R)^2]+[(c_L-b_L)^2+(c_R-b_R)^2]=D(a,c)+D(c,b)$$

即 $D(a,b)\leqslant D(a,c)+D(c,b)$。因此,式(1)为区间值 a 和 b 之间的距离。

3 求解区间值合作对策的最小平方优化模型

3.1 区间值合作对策

区间值合作对策 υ 定义在局中人集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 上,区间值 $\upsilon(S)$ 为联盟 $S\subseteq N$ 的联盟特征(或支付)值,也即区间值特征函数,记 $\upsilon(S)=[\upsilon_L(S),\upsilon_R(S)]$。规定 $\upsilon(\varnothing)=0$,其中 $\varnothing$ 为空集。通常将 $\upsilon(\{i\})$ 简写成为 $\upsilon(i)(i\in N)$。

容易看出,由于每个联盟值都是区间值,因此每个局中人从合作中分配得到的值也应该是一个区间值。用 $x_i=[x_{Li},x_{Ri}]$ 表示局中人 $i\in N$ 从合作中得到的分配值。所有 n 个局中人的分配值可表示为向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。于是,$x(S)=\sum_{i\in S}x_i$ 表示联盟 S 中所有局中人的分配值之和。根据定义 1 可知,$x(S)=[\sum_{i\in S}x_{Li},\sum_{i\in S}x_{Ri}]$ 也是区间值。

任意联盟 $S\subseteq N$ 中的所有局中人都希望他们从最大联盟中获得的分配值之和尽可能地接近其联盟值 $\upsilon(S)$。利用式(1),则区间值 $x(S)$ 与 $\upsilon(S)$ 的差异可表示为如下的距离(平方):

$$D(x(S),\upsilon(S))=\Big(\sum_{i\in S}x_{Li}-\upsilon_L(S)\Big)^2+\Big(\sum_{i\in S}x_{Ri}-\upsilon_R(S)\Big)^2$$

所有联盟 $S\subseteq N$ 的距离之和可以表示为:

$$L(x)=\sum_{S\subseteq N}D(x(S),\upsilon(S))=\sum_{S\subseteq N}\Big[\Big(\sum_{i\in S}x_{Li}-\upsilon_L(S)\Big)^2+\Big(\sum_{i\in S}x_{Ri}-\upsilon_R(S)\Big)^2\Big]$$

$L(x)$ 可看作为所有联盟的一种损失函数。

3.2 最小平方优化模型及其解法

容易看出,使损失函数 $L(x)$ 取得最小值的解,可以得到所有局中人的一种最优分配方案,即区间值合作对策的一种解。为此,建立如下数学优化模型:

$$\min\Big\{L(x)=\sum_{S\subseteq N}\Big[\Big(\sum_{i\in S}x_{Li}-\upsilon_L(S)\Big)^2+\Big(\sum_{i\in S}x_{Ri}-\upsilon_R(S)\Big)^2\Big]\Big\} \tag{2}$$

对 $L(x)$ 关于变量 x_{Lj} 和 $x_{Rj}(j\in S\subseteq N)$ 分别求偏导数,并令其等于 0,即有:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(x)}{\partial x_{Lj}}=2\sum\limits_{S\subseteq N:j\in S}\left(\sum\limits_{i\in S}x_{Li}-\upsilon_L(S)\right)=0\\ \quad(j=1,2,\cdots,n)\\ \dfrac{\partial L(x)}{\partial x_{Rj}}=2\sum\limits_{S\subseteq N:j\in S}\left(\sum\limits_{i\in S}x_{Ri}-\upsilon_R(S)\right)=0\\ \quad(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

从而可得：

$$\sum_{S\subseteq N:j\in S}\sum_{i\in S}x_{Li}=\sum_{S\subseteq N:j\in S}\upsilon_L(S)\quad(j=1,2,\cdots,n)\tag{3}$$

$$\sum_{S\subseteq N:j\in S}\sum_{i\in S}x_{Ri}=\sum_{S\subseteq N:j\in S}\upsilon_R(S)\quad(j=1,2,\cdots,n)\tag{4}$$

为了求解 x_{Li} 和 $x_{Ri}(i=1,2,\cdots,n)$，将方程组(3)和(4)分别展开，可得：

$$\begin{cases}a_{11}x_{L1}+a_{12}x_{L2}+a_{13}x_{L3}+\cdots+\\ \quad a_{1n}x_{Ln}=\sum\limits_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_L(S)\\ a_{21}x_{L1}+a_{22}x_{L2}+a_{23}x_{L3}+\cdots+\\ \quad a_{2n}x_{Ln}=\sum\limits_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_L(S)\\ \vdots\\ a_{n1}x_{L1}+a_{n2}x_{L2}+a_{n3}x_{L3}+\cdots+\\ \quad a_{nn}x_{Ln}=\sum\limits_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_L(S)\end{cases}\tag{5}$$

和

$$\begin{cases}a_{11}x_{R1}+a_{12}x_{R2}+a_{13}x_{R3}+\cdots+a_{1n}x_{Rn}=\\ \quad\sum\limits_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_R(S)\\ a_{21}x_{R1}+a_{22}x_{R2}+a_{23}x_{R3}+\cdots+a_{2n}x_{Rn}=\\ \quad\sum\limits_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_R(S)\\ \vdots\\ a_{n1}x_{R1}+a_{n2}x_{R2}+a_{n3}x_{R3}+\cdots+a_{nn}x_{Rn}=\\ \quad\sum\limits_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_R(S)\end{cases}\tag{6}$$

由排列组合理论可知，含有局中人 $i\in N$ 的局中人个数为 1 的联盟 S 的总个数为 C_{n-1}^0，含有局中人 $i\in N$ 的局中人个数为 2 的联盟 S 的总个数为 C_{n-1}^1，依此类推，含有局中人 $i\in N$ 的局中人个数为 n 的联盟 S 的总个数为 C_{n-1}^{n-1}。于是，含有局中人 $i\in N$ 的所有联盟 S 的总个数为 $C_{n-1}^0+C_{n-1}^1\cdots+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$。

类似地，同时含有局中人 $i\in N$ 与 $j\in N(i\neq j)$ 且局中人个数为 2 的联盟 S 的总个数为 C_{n-2}^0，同时含有局中人 $i\in N$ 与 $j\in N(i\neq j)$ 且局中人个数为 3 的联盟 S 的总个数为 C_{n-2}^1，依此类推，同时含有局中人 $i\in N$ 与 $j\in N(i\neq j)$ 且局中人个数为 n 的联盟 S 的总个数为 C_{n-2}^{n-2}。于是，同时含有局中人 $i\in N$ 与 $j\in N(i\neq j)$ 的所有联盟 S 的总个数为 $C_{n-2}^0+C_{n-2}^1\cdots+C_{n-2}^{n-3}+C_{n-2}^{n-2}=2^{n-2}$。

通过上述分析，可得：

$$a_{ij}=\begin{cases}2^{n-1}(i=j\text{ 且 }i,j\in\{1,2,\cdots,n\})\\ 2^{n-2}(i\neq j\text{ 且 }i,j\in\{1,2,\cdots,n\})\end{cases}$$

记 $X_L=(x_{L1},x_{L2},\cdots,x_{Ln})^T$，$X_R=(x_{R1},x_{R2},\cdots,x_{Rn})^T$，$B_L=(\sum\limits_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_L(S),\sum\limits_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_L(S),\cdots,\sum\limits_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_L(S))^{\mathrm T}$，$B_R=(\sum\limits_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_R(S),\sum\limits_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_R(S),\cdots,\sum\limits_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_R(S))^{\mathrm T}$ 和

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-2}&\cdots&2^{n-2}\\ 2^{n-2}&2^{n-1}&\cdots&2^{n-2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 2^{n-2}&2^{n-2}&\cdots&2^{n-1}\end{pmatrix}_{n\times n}$$

则方程(5)与(6)可分别写成如下矩阵形式：

$$AX_L=B_L$$

$$AX_R=B_R$$

记矩阵为：

$$(A,E)=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-2}&\cdots&2^{n-2}&1&0&\cdots\\ 2^{n-2}&2^{n-1}&\cdots&2^{n-2}&0&1&\cdots\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 2^{n-2}&2^{n-2}&\cdots&2^{n-1}&0&0&1\end{pmatrix}_{n\times 2n}$$

其中 E 为单位矩阵。经过一系列初等行变化，可得：

$$(A,E)\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\cdots\\ 0&1&\cdots&0&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}&\cdots\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&&1&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\cdots\end{pmatrix}_{n\times 2n}$$

显然，矩阵 A 和 E 行等价，从而矩阵 A 可逆，且：

$$A^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\cdots&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}\\ -\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}&\cdots&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ -\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&-\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1}&\cdots&\frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}\end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}}\begin{bmatrix} \frac{n}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & \cdots & -\frac{1}{n+1} \\ -\frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & \cdots & -\frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ -\frac{1}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{n}{n+1} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

利用矩阵乘法,可得到方程(5)和(6)的解分别如下:

$$X_L = A^{-1} B_L \quad (7)$$

$$X_R = A^{-1} B_R \quad (8)$$

由此可以计算得到局中人 $i \in N$ 的分配值,即区间值 $x_i = [x_{Li}, x_{Ri}](i = 1,2,\cdots,n)$。

3.3 最小平方优化模型的拓展及其解法

在上述优化模型即式(2)中,可根据管理决策实际需要,增加一些约束条件,比如,集体合理性条件(或有效性)即 $x(N) = \upsilon(N)$。于是,由式(2)可容易地写出如下带有约束条件的数学优化模型:

$$\min\{L(x) = \sum_{S\subseteq N}[(\sum_{i\in S}x_{Li} - \upsilon_L(S))^2 + (\sum_{i\in S}x_{R_i} - \upsilon_R(S))^2]\}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}x_{Li} = \upsilon_L(N) \\ \sum_{i=1}^{n}x_{R_i} = \upsilon_R(N) \end{cases} \quad (9)$$

为了求解式(9),构造如下拉格朗日函数:

$$L(x,\lambda,\mu) = \sum_{S\subseteq N}[(\sum_{i\in S}x_{Li} - \upsilon_L(S))^2 + (\sum_{i\in S}x_{R_i} - \upsilon_R(S))^2] + \lambda(\sum_{i=1}^{n}x_{Li} - \upsilon_L(N)) + \mu(\sum_{i=1}^{n}x_{R_i} - \upsilon_R(N))$$

其中 λ 和 μ 为拉格朗日乘子。

对 $L(x,\lambda,\mu)$ 分别关于变量 x_{Lj}、$x_{Rj}(j \in S \subseteq N)$、$\lambda$ 和 μ 求偏导数,并令其等于 0,可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x,\lambda,\mu)}{\partial x_{Lj}} = 2\sum_{S\subseteq N:j\in S}(\sum_{i\in S}x_{Li} - \upsilon_L(S)) + \lambda = 0 \ (j = 1,2,\cdots,n) \\ \frac{\partial L(x,\lambda,\mu)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n}x_{Li} - \upsilon_L(N) = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x,\lambda,\mu)}{\partial x_{R_j}} = 2\sum_{S\subseteq N:j\in S}(\sum_{i\in S}x_{Ri} - \upsilon_R(S)) + \mu = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \\ \frac{\partial L(x,\lambda,\mu)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n}x_{Ri} - \upsilon_R(N) = 0 \end{cases}$$

从而可得:

$$\begin{cases} \sum_{S\subseteq N:j\in S}\sum_{i\in S}x_{Li} + \frac{\lambda}{2} = \sum_{S\subseteq N:j\in S}\upsilon_L(S) \\ (j = 1,2,\cdots,n) \\ \sum_{i=1}^{n}x_{Li} = \upsilon_L(N) \end{cases} \quad (10)$$

和

$$\begin{cases} \sum_{S\subseteq N:j\in S}\sum_{i\in S}x_{Ri} + \frac{\mu}{2} = \\ \sum_{S\subseteq N:j\in S}\upsilon_R(S) \quad (j = 1,2,\cdots,n) \\ \sum_{i=1}^{n}x_{R_i} = \upsilon_R(N) \end{cases} \quad (11)$$

记 $e = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}_{n\times 1}$ 和 $X'_L = (x'_{L1}, x'_{L2}, \cdots, x'_{Ln})^{\mathrm{T}}$,则方程组(10)可改写为如下矩阵形式:

$$A X'_L + \frac{\lambda}{2}e = B_L \quad (12)$$

$$e^{\mathrm{T}} X'_L = \upsilon_L(N) \quad (13)$$

求解方程(12),可得:

$$X'_L = A^{-1} B_L - \frac{\lambda}{2} A^{-1} e = X_L - \frac{\lambda}{2} A^{-1} e \quad (14)$$

代入方程(13),可得:

$$e^{\mathrm{T}} X_L - \frac{\lambda}{2} e^{\mathrm{T}} A^{-1} e = \upsilon_L(N)$$

显然,$e^{\mathrm{T}} X_L = \sum_{i=1}^{n}x_{Li}$ 和 $e^{\mathrm{T}} A^{-1} e = \frac{1}{2^{n-2}}\frac{n}{n+1}$。因此,由上式可得:

$$\frac{\lambda}{2} = 2^{n-2}\frac{n+1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_{Li} - \upsilon_L(N)) \quad (15)$$

根据式(14)和(15),可得到:

$$X'_L = X_L - 2^{n-2}\frac{n+1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_{Li} - \upsilon_L(N))A^{-1}e = X_L - 2^{n-2}\frac{n+1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_{Li} - \upsilon_L(N))(\frac{1}{2^{n-2}}\frac{1}{n+1})e = X_L - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_{Li} - \upsilon_L(N))e$$

即,

$$X'_L = X_L + \frac{1}{n}(\upsilon_L(N) - \sum_{i=1}^{n}x_{Li})e \quad (16)$$

用类似方法求解方程组(11),可得:

$$X'_R = X_R + \frac{1}{n}(\upsilon_R(N) - \sum_{i=1}^{n}x_{Ri})e \quad (17)$$

其中 $X'_R = (x'_{R1}, x'_{R2}, \cdots, x'_{Rn})^{\mathrm{T}}$。

式(16)和(17)即为式(9)的解,也即满足集体合理性条件的区间值合作对策 υ 的解。这样,可以确定局中人 $i \in N$ 的分配值,即为区间值 $x'_i = [x'_{Li},$

$x'_{Ri}]$ $(i=1,2,\cdots,n)$。

4　实例计算分析

4.1　案例背景及计算

假设有 3 家不同的快递企业(即局中人)1、2 和 3 均要为某高校配送物品，由于受到市场环境、油价、人工成本、城市道路状况等多种因素的影响，快递企业无法提前预知确切的配送收益，只能预估出大致的收益范围，即配送所得的收益用闭区间来表示。若上述 3 家快递企业都选择单独对高校进行配送，其期望收益范围均为 10 至 11 万元，即 $\upsilon(1)=\upsilon(2)=\upsilon(3)=[10,11]$。若快递企业开展共同配送，则通过资源整合可以较大的提高收益，具体为：若快递企业 1 和 2 开展共同配送，则联盟{1,2}的收益为 $\upsilon(\{1,2\})=[28,32]$；若快递企业 1 和 3 开展共同配送，则联盟{1,3} 的收益为 $\upsilon(\{1,3\})=[30,38]$；若快递企业 2 和 3 开展共同配送，则联盟{2,3}的收益为 $\upsilon(\{2,3\})=[25,28]$；若 3 家快递企业一同合作开展共同配送，则收益可大大提高，即最大联盟 $N=\{1,2,3\}$ 的收益为 $\upsilon(\{1,2,3\})=[45,50]$。

对于参与共同配送的 3 家快递企业来说，都不希望自己参加大联盟后所获得的收益比单干或彼此之间形成子联盟时获得的联盟收益少太多，这将降低甚至破坏他们参与大联盟的积极性；反之，参与大联盟的任何一家快递企业也绝不希望看到其他两家快递企业因为参与了大联盟，所分配得到的收益比其单干或形成子联盟时获得的联盟收益高太多，这也将影响其加入大联盟的积极性。为了平衡这种矛盾，我们希望看到每一家快递企业参与大联盟后获得的收益都与其单干或形成子联盟时获得的联盟收益尽可能的接近，这不失为一种公平、合理的利益分配方案。为此，利用公式(7)和(8)对大联盟获得的收益进行分配。

将上面的相关数据代入式(7)和(8)，可得：

$$X_L=A^{-1}B_L=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}113\\108\\110\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15.1\\12.6\\13.6\end{pmatrix}$$

$$X_R=A^{-1}B_R=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}131\\121\\127\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18.1\\13.1\\16.1\end{pmatrix}$$

即，快递企业(即局中人)1、2 和 3 得到的分配值分别为：

$x_1=[x_{L1},x_{R1}]=[15.1,18.1]$，$x_2=[x_{L2},x_{R2}]=[12.6,13.1]$，$x_3=[x_{L3},x_{R3}]=[13.6,16.1]$。

因此，快递企业 1 从合作中可以期望得到的收益在 15.1 至 18.1 万元之间；快递企业 2 从合作中可以期望得到的收益在 12.6 至 13.1 万元之间；快递企业 3 从合作中可以期望得到的收益在 13.6 至 16.1 万元之间。显然，3 家快递企业通过合作均可获得更多的收益。

若考虑集体合理性(即有效性)条件，则利用式(16)和(17)，可得：

$$X'_L=X_L+\frac{1}{3}(\upsilon_L(N)-\sum_{i=1}^{3}x_{Li})e=\begin{pmatrix}15.125\\12.625\\13.625\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\times(45-41.375)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16.3\\13.8\\14.8\end{pmatrix}$$

$$X'_R=X_R+\frac{1}{3}(\upsilon_R(N)-\sum_{i=1}^{3}x_{Ri})e=\begin{pmatrix}18.125\\13.125\\16.125\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\times(50-47.375)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19.0\\14.0\\17.0\end{pmatrix}$$

于是，快递企业(即局中人)1、2 和 3 所得的分配值分别为：

$x'_1=[x'_{L1},x'_{R1}]=[16.3,19.0]$，$x'_2=[x'_{L2},x'_{R2}]=[13.8,14.0]$，$x'_3=[x'_{L3},x'_{R3}]=[14.8,17.0]$。

这样，快递企业 1 从合作中可以期望得到的收益在 16.3 至 19.0 万元之间；快递企业 2 从合作中可以期望得到的收益在 13.8 至 14.0 万元之间；快递企业 3 从合作中可以期望得到的收益在 14.8 至 17.0 万元之间。因此，3 家快递企业通过合作均可获得更多的收益，且 3 家快递企业从最大联盟中分配得到的收益的上限之和与下限之和与最大联盟收益的上、下限分别相等，即所有的收益均分配完毕。

为验证本文所提出模型与方法的正确性及可靠性，用 Lingo 软件对上述实例进行求解，所得结果与利用式(7)和(8)(或式(16)和(17))求得的结果完全一致，有兴趣的读者可自行验证。

4.2 与现有方法的比较分析

现有求解区间值合作对策的方法基本都是运用区间值减法、区间值排序函数等进行运算，如受到研究者广泛关注的区间值 Shapley 法。利用这类方法极有可能使收益分配区间的不确定性扩大甚至出现收益分配区间包含负值等不合理现象。例如，利用于晓辉等[16]提出的模糊合作对策的区间 Shapley 值(即于晓辉等[16]中的公式(2))对本文算例进行求解，可得到如下结果：$\bar{\varphi}_1(\upsilon)=[15,61/3]$，$\bar{\varphi}_2(\upsilon)=[65/6,17]$，$\bar{\varphi}_3(\upsilon)=[79/6,56/3]$。对此计算结果进行分析，可得到本文提出方法的三方面明显优势：

(1)求解方法复杂性和计算量方面的优势。利用于晓辉等[16]中的方法，为求得各个局中人的收益分配，需要分别对每个局中人进行求解，工作量大、计算过程重复且繁琐；利用本文提出的方法，只需代入一次数据，即可同时得到最大联盟(或子联盟)中所有局中人的收益分配。

(2)应用范围方面的优势。利用于晓辉等[16]中的方法，局中人所得区间值收益的上限和下限之和分别为 234/6 和 56，与最大联盟的区间值收益[45,50]相比有较大偏差，不满足集体合理性(或有效性)条件即 $x(N)=\upsilon(N)$；利用本文提出的方法(式(16)和(17))，局中人所得区间值收益的上限和下限之和分别为 45 和 50，与最大联盟的区间值收益[45,50]的上、下限一致，即满足集体合理性(或有效性)，也即最大联盟的收益被完全充分地分配。换句话说，当参与合作的局中人不希望联盟在收益分配过程中出现"空头支票"或联盟收益还有剩余时，用本文提出的方法比于晓辉等[16]中方法更加合理。此外，由于于晓辉等[16]所提方法运用了区间值减法运算，当用区间值来表示的联盟特征值 $\upsilon(S)=[\upsilon_L(S),\upsilon_R(S)](S\subseteq N)$ 覆盖 $\upsilon(S\backslash i)=[\upsilon_L(S\backslash i),\upsilon_R(S\backslash i)](i\in S,S\subseteq N)$，即 $\upsilon_L(S\backslash i)\leqslant\upsilon_L(S)\leqslant\upsilon_R(S\backslash i)$ 时，极易出现局中人参加联盟后所分配得到的收益为负值或比单干时候获得的收益更少的情形，这显然不合理。在这种情况下，用本文所提方法进行合作收益的分配显得更为有效和实用。准确、具体地说，于晓辉等[16]的方法只适用于求解一类具有联盟大小单调性(Size Monotonicity)的区间值合作对策[7]，即区间值联盟特征函数满足条件：$\upsilon_R(S)-\upsilon_L(S)\geqslant\upsilon_R(S\backslash i)-\upsilon_L(S\backslash i)(i\in S,S\subseteq N)$，而本文方法适用于求解包括具有联盟大小单调性的区间值合作对策在内的任意区间值合作对策，即不要求区间值合作对策具有任何附加的约束条件。

(3)求解结果合理性方面的优势。利用于晓辉等[16]中的方法，局中人所得区间值收益的范围最大为 6.2，且均大于 5；利用本文提出的方法，局中人所得区间值收益的范围最大为 3，最小为 0.2，有效地降低了分配结果的不确定性。

5 结语

针对区间值合作对策问题，本文利用最小平方法和区间值距离概念，构建最小平方优化模型，并导出局中人区间值分配值的解析公式。文中方法原理简单、计算量小，并且由于计算过程中未直接使用区间值的减法运算，可有效地避免区间值减法带来的局中人分配值不确定性放大以及局中人分配值可能为负值等不合理问题，可为区间值合作对策问题提供一种新的有效解决途径，有望在更多的经济、社会、管理等领域得到广泛应用。

然而，从实例计算结果可以看出，利用式(9)求得的局中人分配结果虽然满足集体合理性条件，但却没有完全满足联盟合理性条件。比如，厂商(即局中人)1 与 3 最终获得的区间值分配值(即收益)的上界之和(36 万元)小于他们组成联盟{1,3}时获得的区间值联盟值的上界(38 万元)，导致厂商 1 与 3 组成的联盟{1,3}会有分裂的动机，从而影响最大联盟的稳定性。当然，这样的问题在 Branzei 等[3,6]，Han Weibin[5]，Alparslan 等[7]，Mallozzi 等[8]和于晓辉等[16]类似方法中同样存在。因此，能否像核心(Core)一样，在式(2)(或式(9))中同时考虑个体合理性、联盟合理性和集体合理性等约束条件，并导出类似于式(7)和(8)(或式(16)和(17))的局中人分配值(解析公式)将是今后研究的一个重要内容。

参考文献：

[1] 李登峰．模糊多目标多人决策与对策[M]．北京：国防工业出版社，2003.

[2] Li Dengfeng. Lexicographic method for matrix games with payoffs of triangular fuzzy numbers[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008, 16(3): 371－389.

[3] Branzei R, Branzei O, Alparslan Gök S Z, et al. Cooperative interval games: A survey[J]. Central European

Journal of Operations Research，2010，18(3)：397－411.

[4] 李登峰．直觉模糊集决策与对策分析方法[M]．北京：国防工业出版社，2012.

[5] Han Weibin，Sun Hao，Xu Genjiu. A new approach of cooperative interval games：The interval core and Shapley value revisited[J]. Operations Research Letters，2012，40(6)：462－468.

[6] Branzei R，Dimitrov D，Tijs S. Shapley- like values for interval bankruptcy games[J]. Economics Bulletin，2003，3(8)：1－8.

[7] Alparslan Gök S Z，Branzei R，Tijs S. The interval Shapley value：An axiomaticzation[J]. Central European Journal of Operations Research，2010，18(2)：131－140.

[8] Mallozzi L，Scalzo V，Tijs S. Fuzzy interval cooperative games[J]. Fuzzy Sets and Systems，2011，165(1)：98－105.

[9] Alparslan Gök S Z，Miquel S，Tijs S. Cooperation under interval uncertainty [J]. Mathematical Methods of Operational Research，2009，69(1)：99－109.

[10] Branzei R，Alparslan Gök S Z，Branzei O. Cooperation games under interval uncertainty：On the convexity of the interval undominated cores[J]. Central European Journal of Operations Research，2011，19(4)：523－532.

[11] Yu Xiaohui，Zhang Qiang. An extension of cooperative fuzzy games[J]. Fuzzy Sets and Systems，2010，161(11)：1614－1634.

[12] Alparslan Gök S Z，Branzei O，Branzei R，et al. Set-valued solution concepts using interval-type payoffs for interval games[J]. Journal of Mathematical Economics，2011，47(4－5)：621－626.

[13] Li Dengfeng. Linear programming approach to solve interval-valued matrix games[J]. Omega，2011，39(6)：655－666.

[14] Li Dengfeng. Models and methods of interval-valued cooperative games in economic management[M]. Switzerland：Springer，2014.

[15] Moore R E. Methods and applications of interval analysis[M]. SIAM：Studies for Industrial and Applied Mathematics，1979.

[16] 于晓辉，张强．模糊合作对策的区间 Shapley 值[J]．中国管理科学，2007，(Z1)：76－80.

Models and Method of Interval-valued Cooperative Games Based on the Least Square Distance

LI Deng-feng [1]，**LIU Jia-cai** [1,2]

(1. School of Economics and Management，Fuzhou University，Fuzhou 350108，China；
2. School of Traffic and Civil Engineering，Fujian Agriculture and Forestry University，Fuzhou 350002，China)

Abstract：Most of the existing studies on interval-valued cooperative games in which the values of coalitions S are expressed with intervals $\upsilon(S)=[\upsilon_L(S),\upsilon_R(S)]$ are based on the interval arithmetic (e. g.，interval subtraction) and ranking functions of intervals and hereby are some extensions of the classic Shapley value. The main purpose of this paper is to develop an effective method for solving n-person interval-valued cooperative games based on the least square method. Firstly，according to the concept of the distance between intervals and the least square method，an optimization mathematical model is constructed through considering that players in coalitions try to guarantee their payoffs' sums being as close to the coalitions' values as possible. Through solving the constructed optimization mathematical model，all players' interval-valued payoffs $x_i=[x_{Li},x_{Ri}]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ can be obtained，which can be determined by the analytical formula $[X_L,X_R]=[A^{-1}B_L,A^{-1}B_R]$，where $B_L=(\sum_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_L(S),\sum_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_L(S),\cdots,\sum_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_L(S))^{\mathrm{T}}$，$B_R=(\sum_{S\subseteq N:1\in S}\upsilon_R(S),\sum_{S\subseteq N:2\in S}\upsilon_R(S),\cdots,\sum_{S\subseteq N:n\in S}\upsilon_R(S))^{\mathrm{T}}$，$A^{-1}=(1/2^{n-2})(a'_{ij})_{n\times n}$，and $a'_{ij}=-/(n+1)$ if $i\neq j$ or $n/(n+1)$ if $i=j$. Then，the auxiliary optimization mathematical model is extended so that it satisfies some conditions such as the efficiency $x(N)=\upsilon(N)$ and hereby all players' interval-valued payoffs $x'_i=[x'_{Li},x'_{Ri}]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ are solved，which can be determined by the analytical formula $[X'_L,X'_R]=[X_L+(\upsilon_L(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{Li})e/n,X_R+(\upsilon_R(N)-\sum_{i=1}^{n}x_{Ri})e/n]$. Finally，a numerical example of the dispatch coalition problem is used to conduct the validation and comparison analysis，which has shown that the proposed models and method are of the validity，the applicability，and the superiority. The models and method proposed in this paper can effectively avoid the magnification of uncertainty resulted from the subtraction of intervals and provide a new theoretical angle and suitable tool for solving interval-valued cooperative games.

Key words：interval-valued cooperative game；least square method；loss function；dispatch coalition；mathematical programming