文章编号:1003－207(2016)07－0011－07
DOI:10.16381/j.cnki.issn1003－207x.2016.07.002

具有最小交易量限制的多阶段均值-半方差投资组合优化

张　鹏[1],张卫国[2],张逸菲[3]

(1. 武汉理工大学经济学院,湖北 武汉　430070;2. 华南理工大学工商管理学院,广东 广州　510641;3. 武汉科技大学管理学院,湖北 武汉　430081)

摘　要: 考虑交易成本,借款约束和阈值约束,文章提出了具有最小交易量限制的多阶段均值-半方差投资组合模型。该模型是具有路径依赖性的混合整数动态优化问题,还是 NP 完全问题。文章提出了前向动态规划方法求解。最后,通过一个算例比较不同风险约束下的最优投资策略,从而验证模型和算法的有效性。

关键词: 多阶段投资组合;均值-半方差;最小交易量;借款约束;前向动态规划方法

中图分类号: F830　　**文献标识码:** A

1　引言

Markowitz[1-2]提出的均值—方差投资组合理论为现代投资组合的发展奠定了基础。此后投资多元化问题已经变成了计算问题。Deng Xiaotie 等[3]和 Hirschberger 等[4]提出了基于方差风险度量投资组合模型。虽然方差一直在投资组合中充当风险度量的角色,但其具有一定的局限性[2,5]。一个明显的缺点是方差将高收益和低收益同样认为不好,因为高收益有助于出现极端方差。当证券收益的概率分布是不对称的,基于方差的投资组合可能牺牲太多的预期收益去消除极端的低收益和高收益,在现实中,许多实证研究,如[6-7]证明了证券收益不是对称分布的。

为了克服均值-方差模型的局限性,人们开始考虑收益分布的不对称性。有些学者采用偏态,即三阶中心矩来测量收益分布的不对称性[8-9],其他学者则直接用下方风险度量,即以负偏差取代方差的度量方法。下方风险度量只关注低于某个预定水平的收益。因此,它符合投资者风险和收益的观念。

收稿日期: 2013－12－29; **修订日期:** 2015－01－04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71271161);国家社科基金资助项目(13BJL0062)

通讯作者简介: 张鹏(1975－),男(汉族),江西吉安人,武汉理工大学经济学院教授,工学博士,研究方向:投资组合优化、金融工程,E-mail:zhangpeng300478@aliyun.com.

实证研究[10]表明投资者大多赞成下方风险度量。Rom 和 Ferguson [11]研究表明下方风险日益普及。下方风险度量方法有许多形式,安全首要准则[12],半方差[2]。许多学者,如 Markowitz 等[14]和 Huang Xiaoxia[13]研究了半方差的属性和计算问题。

上述投资组合模型假设投资组合中资产数量为实数,这是不符合实际的。特别是资产都有最小交易量限制(所谓的手),而解决方案只涉及资产的实数权重,而不涉及资产交易单位。例如,股票手数进行买卖,互惠基金有其各自的最低交易数量。因此,这些模型得到的最优解必须为整数,具有最小交易量的投资组合优化问题是一个组合优化问题(一个 NP 完全问题),其可行域是不连续的。一些研究者提出了不同的求解方法,例如 Konno 和 Wijayanayake [15],Speranza[16],Mansini 和 Speranza[17],Kellerer 等[18],Lin Changchun 和 Liu Yiting[19],Soleimani 等[20],Golmakani 和 Fazel[21]。

对于上述模型,他们都假设投资期限为一期。但是,在现实生活中,投资组合策略常常是多阶段的,因为投资者可以随时重新分配自己的财富。所以,我们很自然的将单阶段投资组合优化扩展到多阶段。Mossin[22]运用动态规划方法求解多阶段投资组合模型。Hakansson[23]运用投资组合决策的一般理论方法分析了多阶段均值-方差。Li Duan 等[24]运用动态规划的方法来解决多阶段安全首要的投资组合问题。用同样的方法,Li Duan 和 Ng[25]

提出了多阶段均值-方差终期财富最大化投资组合模型，并求出了最优投资策略和有效前沿的解析表达式。Calafiore [26]考虑金融资产配置的多阶段序贯决策问题，提出了具有线性控制策略的多阶段投资组合模型。Zhu Shushang 等[27]提出了具有破产风险控制的多阶段均值-方差投资组合模型。Gülpınar 和 Rustem [28]运用情景分析法提出了随机多阶段均值-方差投资组合模型。Yu Mei 等[29]提出了具有破产控制的均值-绝对偏差动态投资组合模型。Çlikyurt 和 Özekici [30]提出了几种随机多阶段均值-方差投资组合模型。然而，上述文章多用方差度量风险。在当资产的收益分布不对称的情况下，利用方差作为风险度量可能会为了消除低收益和高收益极端而牺牲太多的预期收益。为了衡量金融市场中真正的投资风险，学者们采用了一些新的风险度量来取代方差。例如，Yan Wei 等[31-32]提出了多阶段均值-半方差投资组合模型。Pınar[33]提出了多阶段均值—下方风险投资组合模型。Zhang Weiguo 等[34-35]和 Liu Yongjun 等[36-37]提出了多阶段模糊投资组合模型，并分别运用遗传算法，混合智能算法和差分进化算法求解。袁子甲和李仲飞[38]研究了引入参数不确定和学习时的连续时间动态投资组合选择问题，使用鞅方法求导出了具有 CRRA 型效用函数的投资者的最优投资策略的显式表达式。金秀等[39]提出了预期效用最大化的动态损失厌恶多阶段投资组合优化模型．上面多阶段投资组合研究都假设决策变量是连续型变量，实际投资过程中，买卖股票均为整数手（最小交易量），如中国证券市场规定为 100 股的整数倍。

文章提出一个新的具有最小交易量限制，借款约束限制和交易成本的多阶段均值-半方差投资组合模型。该模型是一个具有路径依赖的整数动态优化问题。我们提出了前向动态规划方法求解。

2 多阶段均值—半方差投资组合模型

本文讨论具有随机回报的多阶段投资组合问题。首先是问题的描述和符号说明，接着描述多阶段投资组合的收益和风险，最后提出投资组合模型的最小交易量。

2.1 问题描述和符号说明

假设一个多阶段投资组合有 n 种风险资产和 1 种无风险资产可供选择。假设投资者用初始财富 W_1 进行投资，投资者将其财富投资 $n+1$ 种资产进行 T 期连续投资，他的财富将在每个时期的开始进行调整。为了方便说明，我们现将所有下文中将使用的符号列在下面。

x_{it} 第 t 期第 i 种风险资产投资手数的数量，其中 x_{it} 是整型变量；

x_{i0} 第 0 期第 i 种风险资产的初始投资的手数；

x_t 第 t 期投资组合的手数，其中 $x_t=(x_{1t},x_{2t}\cdots,x_{nt})$；

p_{it} 第 t 期第 i 种风险资产的单位价格；

W_t 第 t 期的初始财富；

x_{ft} 第 t 期无风险资产的投资金额，其中 $x_{ft}=W_t-\sum_{i=1}^{n}p_{it}x_{it}$；

x_{ft}^{b} 第 t 期无风险资产投资金额的下界，其中 $x_{ft}\geqslant x_{ft}^{b}$；

R_{it} 第 t 期第 i 种风险资产的随机收益率；

r_{it} 第 t 期第 i 种风险资产的期望收益率，其中 $r_{it}=E(R_{it})$；

r_{pt} 第 t 期投资组合 x_t 的期望收益率；

r_{Nt} 第 t 期投资组合 x_t 的净收益率；

u_{it} 第 t 期第 i 种风险资产的投资上界；

q 第 t 期第 i 种风险资产的最小交易量（手），如中国证券市场规定的 100 股；

r_{bt} 第 t 期无风险资产的借款利率；

r_{lt} 第 t 期无风险资产的贷款利率；

c_{it} 第 t 期第 i 种风险资产的单位交易成本；

2.2 多阶段投资组合的收益和风险

投资组合中的借款约束是其中的一个影响因素。大多数经纪公司提供从券商借入不同种类的资产进行收购的机会。一些研究人员研究了借款约束，例如，Deng Xue 和 Li Rongjun[40]提出了具有借贷限制的均值-方差模糊投资组合。Sadjadi 等[41]提出了具有不同借款利率和贷款利率的模糊多阶段投资组合模型。在实践中，我们应当考虑到每个资产都有其最小交易量。那么，投资组合优化问题的解必须是整数，t 期的投资组合投资数量 $qx_t=(qx_{1t},qx_{2t},\cdots,qx_{nt})'$ 的期望收益为：

$$r_{pt}=\sum_{i=1}^{n}p_{it}x_{it}qr_{it}+r_{ft}(W_t-\sum_{i=1}^{n}p_{it}qx_{it}),t=1,\cdots,T \tag{1}$$

$$\text{其中 } r_{ft}=\begin{cases} r_{lt}, & W_t-\sum_{i=1}^{n}p_{it}qx_{it}\geqslant 0 \\ r_{bt}, & W_t-\sum_{i=1}^{n}p_{it}qx_{it}\leqslant 0 \end{cases},r_{bt}\geqslant$$

$r_{lt}, x_{it} \in Z$。当 $W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} \geqslant 0$，表示允许无风险资产存款；当 $W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} \leqslant 0$，表示允许无风险资产借款。

交易成本是投资者关心的主要因素之一。Arnott 和 Wagner[42]研究发现，忽略交易成本会导致无效投资组合。Yoshimoto[43]的实证分析也得出了同样的结论。Bertsimas 和 Pachamanova[44] 和 Gulpınar 等[45]研究了具有交易成本的多阶段投资组合问题。我们假设交易成本为第 t 期投资组合 $qx_t = (qx_{1t}, qx_{2t} \cdots, qx_{nt})$ 和第 $t-1$ 期内投资组合 $qx_{t-1} = (qx_{1(t-1)}, qx_{2(t-1)}, \cdots, qx_{n(t-1)})$ 的 V 型函数。这就是说，第 t 期第 i 种资产的交易成本为 $c_{it} \mid p_{it} q x_{it} - p_{it-1} q x_{it-1} \mid$。因此，第 t 期投资组合 $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt})$ 的总交易成本可表示为：

$$C_t = \sum_{i=1}^{n} c_{it} \mid p_{it} q x_{it} - p_{it-1} q x_{it-1} \mid, t = 1, \cdots, T \tag{2}$$

因此，第 t 期投资组合 x_t 的净收益可以表示为：

$$r_{Nt} = \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} r_{it} + r_{ft}(W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it}) - \sum_{i=1}^{n} c_{it} \mid p_{it} q x_{it} - p_{it-1} q x_{it-1} \mid . t = 1, \cdots, T \tag{3}$$

第 t 期的借款约束可以写成：

$$W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} \geqslant x_{ft}^{b} \tag{4}$$

那么，第 t 期的初始财富可以写成：

$$W_{t+1} = W_t + \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} r_{it} + r_{ft}(W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it}) - \sum_{i=1}^{n} c_{it} \mid p_{it} q x_{it} - p_{it-1} q x_{it-1} \mid, t = 1, \cdots, T \tag{5}$$

定义 1　假设ξ是有限的预期值 e 的随机变量。那么ξ的半方差被定义为 $S[\xi] = E[[(\xi - e)^-]^2]$，其中

$$(\xi - e)^- = \begin{cases} \xi - e \text{ if } \xi \leqslant e \\ 0 \text{ if } \xi > e \end{cases}$$

定理 1　假设 p_{it} 表示第 t 期第 i 种风险资产的单位价格，q 表示第 t 期第 i 种风险资产的最小交易量(手)，x_{it} 表示第 t 期第 i 种风险资产投资手数的数量，其中 $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt})$，则投资组合 x_t 的半方差可以表示为：

$$S_t(x_t) = q^2 x_t H_t^- x_t' \tag{6}$$

其中 $H_t^- = (\sigma_{ij}^t)_{n\times n}^-$，$(\sigma_{ij}^t)^- = E[p_{it}(R_{it} - r_{it})^- p_{jt}(R_{jt} - r_{jt})^-] = E[p_{it}(R_{it} - r_{it})^- p_{jt}(R_{jt} - r_{jt})^-]$。

证明：

$S_t(x_t) = S_t(p_{1t} q r_{1t} x_{1t} + p_{2t} q r_{2t} x_{2t} + \cdots + p_{nt} q r_{nt} x_{nt}) = E\{[(p_{1t} q R_{1t} x_{1t} + \cdots + p_{nt} q R_{nt} x_{nt}) - (p_{1t} q r_{1t} x_{1t} + \cdots + p_{nt} q r_{nt} x_{nt})]^-\}^2 = E\{[q(p_{1t} R_{1t} x_{1t} + \cdots + p_{nt} R_{nt} x_{nt}) - q(p_{1t} r_{1t} x_{1t} + \cdots + p_{nt} r_{nt} x_{nt})]^-\}^2 = q^2 E\{[(p_{1t} R_{1t} x_{1t} + \cdots + p_{nt} R_{nt} x_{nt}) - (p_{1t} r_{1t} x_{1t} + \cdots + p_{nt} r_{nt} x_{nt})]^-\}^2 = q^2 E\{[(p_{1t}(R_{1t} - r_{1t}) x_{1t} + \cdots + p_{nt}(R_{nt} - r_{nt}) x_{nt}]^-\}^2$

根据 Markowitz[2]，上式可以转化为：

$S_t(x_t) = q^2 x_t H_t^- x_t'$

其中 $H_t^- = (\sigma_{ij}^t)_{n\times n}^-$，$(\sigma_{ij}^t)^- = E[p_{it}(R_{it} - r_{it})^- p_{jt}(R_{jt} - r_{jt})^-] = E[p_{it}(R_{it} - r_{it})^- p_{jt}(R_{jt} - r_{jt})^-]$。

定理证毕。

第 t 期第 i 种风险资产的投资上界为：

$$p_{it} q x_{it} \leqslant z_{it} u_{it} \tag{7}$$

2.3　具有最小交易量的多阶段均值—半方差投资组合模型

假设投资者的目标是在整个 T 期终期财富最大化。具有最小交易量的多阶段投资组合模型为：

$$\max W_1 + \sum_{t=1}^{T}[\sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} r_{it} + r_{ft}(W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it}) - \sum_{i=1}^{n} c_{it} \mid p_{it} q x_{it} - p_{it-1} q x_{it-1} \mid]$$

$$s.t. \begin{cases} W_{t+1} = W_t + \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} r_{it} + r_{ft}(W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it}) - \sum_{i=1}^{n} c_{it} \mid p_{it} q x_{it} - p_{it-1} q x_{it-1} \mid & \text{(a)} \\ x_t' H_t^- x_t \leqslant v_t & \text{(b)} \\ W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} \geqslant x_{ft}^{b} & \text{(c)} \\ p_{it} q x_{it} \leqslant u_{it}, x_{it} \in Z, i = 1, \cdots, n, t = 1, \cdots, T & \text{(d)} \end{cases} \tag{8}$$

由于模型(8)的可行域是非凸集，该模型不再是凸动态规划问题。该模型(8)的目标函数是 T 期投资过程中投资者终期财富最大化。约束条件(a)表示的是财富转移方程；约束条件((b)表示在任何一个时期内投资组合 x_t 的半方差不超过给定值 v_t；约束条件(c)表示第 t 期无风险资产投资金额的下界限制；约束条件(d)表示 x_{it} 的上界限制，并且 x_{it} 是整数值。

在模型(8)中，$v_{t\min} \leqslant v_t \leqslant v_{t\max}$。$v_{t\min}$ 和 $v_{t\max}$ 可

以通过以下方法得到：

$$\min x_t' H_t^- x_t$$

$$s.t.\begin{cases} W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} \geqslant x_{ft}^b \\ p_{it} q x_{it} \leqslant u_{it}, x_{it} \in Z, i = 1,\cdots,n \end{cases} \quad (9)$$

$x_t^{\min *}$（模型(9)的最优解 $x_t = (x_{1t}, x_{2t},\cdots, x_{nt})'$）可以用 $CPLEX$ 求出。同时，也得到了 $v_{t\min}$（$x_t' H_t^- x_t$ 的最小值）。

$$\max \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} r_{it} + r_{ft}(W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it})$$

$$s.t.\begin{cases} W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} \geqslant x_{ft}^b \\ p_{it} q x_{it} \leqslant u_{it}, x_{it} \in Z, i = 1,\cdots,n \end{cases} \quad (10)$$

$x_t^{\max *}$（模型(10)的最优解 $x_t = (x_{1t}, x_{2t},\cdots, x_{nt})'$）可以通过 $CPLEX$ 得到。同时，也得到了 $v_{t\max}$（$x_t' H_t^- x_t$ 的最大值）。

3 多阶段投资组合优化

我们提出了一个前向动态规划法求解模型(8)。

模型(8)的 t 期子问题可转化为：

$$\max \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} r_{it} - r_{ft}(W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it}) - \sum_{i=1}^{n} c_{it} \mid p_{it} q x_{it} - p_{it-1} q x_{it-1} \mid$$

$$s.t.\begin{cases} W_t - \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} \geqslant x_{ft}^b \\ x_t' H_t^- x_t \leqslant v_t \\ p_{it} q x_{it} \leqslant u_{it}, i = 1,\cdots,n \\ x_{it} \in Z, i = 1,\cdots,n \end{cases} \quad (11)$$

算法 前向动态规划方法

步骤 1 当 $t = 1$，W_1 和 $x_0 = (x_{10},\cdots,x_{n0})'$ 已知，运用 CPLEX 求解模型(11)，然后得到第 1 阶段的最优解 $x_1^{\max *} = (x_{11}^{\max *},\cdots,x_{n1}^{\max *})'$。与此同时，我们可以得到：

$$W_2^{\max *} = W_1 + \sum_{i=1}^{n} p_{i1} q x_{i1}^{\max *} r_{i1} + r_{f1}(W_1 - \sum_{i=1}^{n} p_{i1} q x_{i1}^{\max *})$$

步骤 2 如果 $t = m$（$m \geqslant 1$ 和 $m \in Z^+$），由于 $W_{m+1}^{\max *}$ 和 $x_m^{\max *} = (x_{1m}^{\max *},\cdots,x_{nm}^{\max *})'$ 已知，运用 CPLEX 求解模型(11)，也就是说我们已经得到 $t = m+1$ 的最优解（$x_{m+1}^{\max *} = (x_{m+1}^{\max *},\cdots,x_{nm+1}^{\max *})'$）。同时，我们也得到：

$$W_{m+2}^{\max *} = W_{m+1}^{\max *} + \sum_{i=1}^{n} p_{im+1} q x_{im+1}^{\max *} r_{im+1} + r_{fm+1}(W_{m+1}^{\max *} - \sum_{i=1}^{n} p_{im+1} q x_{im+1}^{\max *})$$

步骤 3 如果 $t = T$，我们得到终期财富的最大值 $W_{T+1}^{\max}$。否则，$t = m+1$，转步骤 2。

当第 t 阶段决策变量不是太多，运用 CPLEX 可以求出模型(8)的第 t 个子问题(11)的全局最优解。因此，运用前向动态规划也可以求出模型(8)的全局最优解。

4 实证研究

假设投资者从上证权重股中选择 20 只股票，分别为 S_1(600000)，S_2(600015)，S_3(600016)，S_4(600030)，S_5(600036)，S_6(600310)，S_7(600104)，S_8(600362)，S_9(600519)，S_{10}(600663)，S_{11}(6000501)，S_{12}(600283)，S_{13}(600551)，S_{14}(600064)，S_{15}(600011)，S_{16}(600660)，S_{17}(600196)，S_{18}(600749)，S_{19}(600389)，S_{20}(600396)。我们收集了从 2006 年 4 月到 2013 年 9 月的数据，并且以每三个月为一个周期进行处理。

假设投资者初始财富 $W_1 = 1000000$，进行 5 期连续投资，他的财富将在每个时期的开始进行调整。假设单位资产交易成本 $c_{it} = 0.003$ ($i = 1,\cdots,20$; $t = 1,\cdots,5$)，无风险资产投资比例的下界 $x_{ft}^b = -500000$，无风险资产的借款利率 $r_{bt} = 0.017$，无风险资产的贷款利率 $r_{lt} = 0.009$，$t = 1,\cdots,5$，x_{it} 的下界 $l_{it} = 100$，上界 $u_{it} = 0.2W_t$ ($i = 1,\cdots,20$; $t = 1,\cdots,5$)。

如果在投资组合中借入无风险资产，我们用前向动态规划方法来解决模型(8)，可以得到如下相应的结果。

当 $t = 1,\cdots,5$，我们用 CPLEX 分别解模型(9)和模型(10)，那么我们得到 $v_{1\max} = 0.1203099E+08$，$v_{1\min} = 0$；$v_{2\max} = 0.1073514E+08$，$V_{2\min} = 0$；$v_{3\max} = 0.1270018E+08$，$V_{3\min} = 0$；$v_{4\max} = 0.1515640E+08$，$V_{4\min} = 0$；$v_{5\max} = 0.1286227E+08$，$V_{5\min} = 0$。

假设 $v_t = 4000000$，$t = 1,\cdots,5$，最优解如表 1 所示。

允许借入无风险资产时，第 1 期的最优投资策略是 $x_{13} = 1$，$x_{41} = 96$，$x_{91} = 14$，$x_{131} = 133$，$x_{161} = 201$，$x_{171} = 143$，$x_{191} = 50$，其它为 0，这意味着投资者应该将他的初始财富分配于资产 1，资产 4，资产 9，资产 13，资产 16，资产 17，资产 19 分别为 1，96，14，133，201，143，50 手，其他 13 只股票分配

表 1　具有借入无风险资产的多阶段投资组合最优解

资产 it	最优投资策略											
1	S_3 1	S_4 96	S_9 14	S_{13} 133	S_{16} 201	S_{17} 143	S_{19} 50	其它 0				
2	S_1 232	S_3 382	S_9 15	S_{10} 21	S_{13} 220	S_{16} 73	S_{17} 226	S_{19} 139	其它 0			
3	S_1 81	S_3 370	S_4 69	S_9 13	S_{13} 214	S_{16} 132	S_{17} 220	S_{19} 136	其它 0			
4	S_6 162	S_7 163	S_8 77	S_{10} 116	S_{12} 159	S_{13} 208	S_{14} 173	S_{16} 241	S_{17} 215	S_{19} 133	其它 0		
5	S_1 83	S_3 356	S_6 46	S_7 159	S_8 75	S_9 13	S_{10} 115	S_{13} 203	S_{14} 169	S_{16} 235	S_{17} 210	S_{19} 130	其它 0

表 2　不含有无风险资产的多阶段投资组合最优解

资产 it	最优投资策略											
1	S_4 51	S_7 55	S_9 14	S_{13} 133	S_{16} 233	S_{17} 54	S_{19} 50	其它 0				
2	S_1 187	S_3 381	S_9 15	S_{13} 220	S_{16} 254	S_{19} 139	其它 0					
3	S_1 165	S_3 372	S_4 88	S_9 13	S_{13} 214	S_{16} 38	S_{17} 220	S_{19} 136	其它 0			
4	S_7 163	S_8 1	S_{10} 82	S_{12} 55	S_{13} 208	S_{14} 173	S_{17} 215	S_{19} 133	其它 0			
5	S_1 28	S_3 356	S_6 39	S_7 159	S_8 75	S_9 13	S_{10} 115	S_{13} 203	S_{14} 169	S_{16} 235	S_{17} 210	S_{19} 130	其它 0

0。从表 1 还可以得到第 2、3、4 和 5 期最优投资策略。终期财富为 1766828.4。

如果投资组合不含有无风险资产,模型(8)可转化为以下模型:

$$\max W_1 + \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} r_{it} - \sum_{i=1}^{n} c_{it} \mid p_{it} q x_{it} - p_{it-1} q x_{it-1} \mid\right]$$

$$s.t.\begin{cases} W_{t+1} = W_t + \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} r_{it} - \sum_{i=1}^{n} c_{it} \\ \mid p_{it} q x_{it} - p_{it-1} q x_{it-1} \mid \\ x_t' H_t^- x_t \leqslant v_t \\ \sum_{i=1}^{n} p_{it} q x_{it} \leqslant W_t \\ p_{it} q x_{it} \leqslant u_{it}, x_{it} \in Z, i = 1, \cdots, n, \\ t = 1, \cdots, T \end{cases} \tag{12}$$

我们用前向动态规划方法解决问题(12),我们可以得到如下的相应结果。

假设 $v_t = 4000000$, $t = 1, \cdots, 5$,我们可以得到最优解如表 2 所示。

不含有无风险资产的多阶段投资组合的终期财富为 1704116。

为了表明无风险资产对于投资组合决策的影响,我们分别考虑了借入无风险资产和不含有无风险资产情况下的投资组合优化问题。运用动态规划方法求解模型(8)和模型(12)得到相应的最优投资策略如表 1 和表 2 所示。从表 1 和表 2 可以看出,当在投资组合决策模型中借入无风险资产,终期财富也随之变大,这反映了允许借入无风险资产对多阶段投资策略有较大的影响。

5　结语

考虑交易成本,最小交易量和借款约束,本文提出了具有风险控制的多阶段均值-半方差投资组合模型,该模型为具有路径依赖的整数动态优化问题。提出前向动态规划方法求解。最后以一个具体实例比较了不具有无风险借款限制和不含有无风险资产两种情况下的最优投资策略,验证了模型和算法的有效性。

与以前多阶段投资组合相比,本文研究的多阶段投资组合的决策变量是整数与现实投资组合更加符合。对于投资者来说,本文的方法具有良好的可操作性和实用价值。本文结合前向动态规划方法和 CPLEX 可以很快地计算出多阶段投资组合的最优投资策略。

参考文献:

[1] Markowitz H. Portfolio selection [J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77－91.

[2] Markowitz H. Portfolio selection: Efficient diversification of investments [M]. New York: Wiley, 1959.

[3] Deng Xiaotie, Li Zhongfei, Wang Shouyang. A minimax portfolio selection strategy with equilibrium [J]. European Journal of Operational Research, 2005, 166(1): 278－292.

[4] Hirschberger M, Qi Yue, Steuer R E. Randomly generating portfolio-selection covariance matrices with specified distributional characteristics [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 177(3): 1610－1625.

[5] Grootveld H, Hallerbach W. Variance vs downside risk: Is there really that much difference? [J]. European Journal of Operational Research, 1999, 114(2): 304－319.

[6] Fama E F. Portfolio analysis in a stable paretian market [J]. Management Science，1965,11(3)：404－419.

[7] Simkowitz M A，Beedles W L. Diversification in a three moment world [J]. Journal of Financial and Quantitative Annals，1978,13(5)：927－941.

[8] Leung M T，Daouk H，Chen Ansing. Using investment portfolio return to combine forecasts：A multiobjective approach [J]. European Journal Operations Research，2001,134(1)：84－102.

[9] Liu S C，Wang Shouyang，Qiu W H. Mean-variance-skewness model for portfolio selection with transaction costs [J]. International Journal Systems Science，2003，34(4)：255－262.

[10] Unser M. Lower partial moments as measures of perceived risk：An experimental study [J]. Journal of Economic Psychology，2000，21(3)：253－280.

[11] Rom B M，Ferguson K W. Post-modern portfolio theory comes of age [J]. Journal of Investing，1994，3(3)：11－17.

[12] Roy A D. Safety first and the holding of assets [J]. Econometrica，1952，20(3)：431－449.

[13] Huang Xiaoxia. Mean-semivariance models for fuzzy portfolio selection [J]，Journal of Computational and Applied Mathematics，2008，217(1)：1－8.

[14] Markowitz H，Todd P，Xu Ganlin，et al. Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm [J]. Annals of Operations Research，1993，45(1)：307－317.

[15] Konno H，Wijayanayake A. Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints [J]. Mathematical Programming，2001，89(2)：233－250.

[16] Speranza M G. A heuristic algorithm for a portfolio optimization model applied to the Milan Stock Market [J]. Computers and Operations Research，1996，23(5)：433－441.

[17] Mansini R，Speranza M G. Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots [J]. European Journal of Operational Research，1999，114(2)：219－233.

[18] Kellerer H，Mansini R，Speranza M G. Selecting portfolios with fixed costs and minimum transaction lots [J]. Annals of Operations Research，2000，99(1)：287－304.

[19] Lin Changchun，Liu Yiting. Genetic algorithms for portfolio selection problems with minimum transaction lots [J]. European Journal of Operational Research，2008,185(1)：393－404.

[20] Soleimani H，Golmakani H R，Salimi M H. Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots，cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm[J]. Expert Systems with Applications，2009，36(3)：5058－5063.

[21] Golmakani H R，Fazel M. Constrained portfolio selection using particle swarm optimization [J]. Expert Systems with Applications，2011，38(7)：8327－8335.

[22] Mossion J. Optimal multiperiod portfolio policies [J]. Journal of Business，1968，41(2)：215－229.

[23] Hakansson N H. Multi-period mean-variance analysis：Toward a general theory of portfolio choice [J]. Journal of Finance，1971，26(4)：857－884.

[24] Li Duan，Chan T F，Ng W L. Safety-first dynamic portfolio selection [J]. Dynamics of Continuous，Discrete and Impulsive，Systems Series B：Applications and Algorithms，1998,4(4)：585－600.

[25] Li Duan，Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection：multiperiod mean－variance formulation [J]. Mathematical Finance，2000,10(3)：387－406.

[26] Calafiore G C. Multi-period portfolio optimization with linear control policies [J]. Automatica，2008，44(10)：2463－2473.

[27] Zhu Shushang，Li Duan，Wang Shouyang. Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection：a generalized mean－variance formulation [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2004,49(3)：447－457.

[28] Gülpınar N，Rustem B. Worst-case robust decisions for multi-period mean－variance portfolio optimization [J]. European Journal of Operational Research，2007，183(3)：981－1000.

[29] Yu Mei，Takahashi S，Inoue H，et al. Dynamic portfolio optimization with risk control for absolute deviation model [J]. European Journal of Operational Research，2010，201(2)：349－364.

[30] Çlikyurt U，Öekici S. Multiperiod portfolio optimization models in stochastic markets using the mean－variance approach [J]. European Journal of Operational Research，2007，179(1)：186－202.

[31] Yan Wei，Li Shuyong. A class of multi-period semi-variance portfolio selection with a four-factor futures price model [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing，2009，29(1)：19－34.

[32] Yan Wei，Miao Rong，Li Shurong. Multi-period semi-variance portfolio selection：Model and numerical solution [J]. Applied Mathematics and Computation，2007，194(1)：128－134.

[33] Pınar M Ç. Robust scenario optimization based on downside-risk measure for multi-period portfolio selection [J]. OR Spectrum, 2007, 29(2): 295－309.

[34] Zhang Weiguo, Liu Yongjun, Xu Weijun. A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs [J]. European Journal of Operational Research, 2012, 222(2): 41－349.

[35] Zhang Weiguo, Liu Yongjun, Xu Weijun. A new fuzzy programming approach for multi-period portfolio Optimization with return demand and risk control [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 246(1):107－126.

[36] Liu Yongjun, Zhang Weiguo, Xu Weijun. Fuzzy multi-period portfolio selection optimization models using multiple criteria [J]. Automatica, 2012, 48(12): 3042－3053.

[37] Liu Yongjun, Zhang Weiguo, Zhang Pu. A multi-period portfolio selection optimization model by using interval analysis [J]. Economic Modelling, 2013, 33:113－119.

[38] 袁子甲,李仲飞. 参数不确定性和效用最大化下的动态投资组合选择[J]. 中国管理科学,2010,18(5):1－6.

[39] 金秀,王佳,高莹. 基于动态损失厌恶投资组合模型的最优资产配置与实证研究[J]. 2014, 22(5):16－23.

[40] Deng Xue, Li Rongjun. A portfolio selection model with borrowing constraint based on possibility theory [J]. Applied Soft Computing, 2012, 12(2):754－758.

[41] Sadjadi S J, Seyedhosseini S M, Hassanlou Kh. Fuzzy multi period portfolio selection with different rates for borrowing and lending [J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(4): 3821－3826.

[42] Arnott R D, Wagner W H. The measurement and control of trading costs [J]. Financial Analysts Journal, 1990, 46(6):73－80.

[43] Yoshimoto A. The mean－variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs [J]. Journal of the Operational Research Society of Japan, 1996, 39(1): 99－117.

[44] Bertsimas D, Pachamanova D. Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs [J]. Computers and Operations Research, 2008, 35(1):3－17.

[45] Gulpınar N, Rustem B, Settergren R. Multistage stochastic mean-variance portfolio analysis with transaction cost [J]. Innovations, in Financial and Economic Networks, 2003,(3): 46－63.

Multi-period Mean-semivariance Portfolio Selection with Minimum Transaction Lots Constraints

ZHANG Peng[1], ZHANG Wei-Guo[2], ZHANG Yi-fei[3]

(1. School of Economics, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China;

2. School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China;

3. School of Management, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

Abstract: In this paper the multi-period mean semivariance portfolio problem is dealt with minimum transaction lots considering, transaction costs, borrowing constraints and threshold constraints. In this case the problem of finding a feasible solution is NP-complete. An optimal investment policy can be generated to help investors not only achieve an optimal return, but also have a good risk control. The multi-period portfolio selection is the mix integer dynamic optimization problem with path dependence. The forward dynamic programming method is designed to obtain the optimal portfolio strategy. Finally, the comparison analysis with borrowing risk-free assets and without risk-free assets in the portfolio selection is provided by a numerical example to illustrate the efficiency of the proposed approaches and the designed algorithm.

Key words: multi-period portfolio selection; mean semivariance; minimum transaction lots; borrowing constraints; the forward dynamic programming method