从坐标系到张量 [1)]

—— 学习和理解张量的一条捷径

赵松年 [*,2)] 于允贤 [†,3)]

[*](中国科学院大气物理研究所，大气边界层物理和大气化学国家重点实验室，北京 100029)

[†](国家地震局减灾中心，北京 100029)

摘要 学习和掌握张量基本知识是研究连续介质力学的基础，然而，当前对张量的讲述和介绍方式比较复杂，造成理解和运用的困难. 本文利用笛卡尔坐标系引入张量概念及其基本运算，阐明张量本质上是坐标变换，熟悉求和约定和指标表示是其关键，从而使张量能体现出数学本身的简单、和谐和美的统一，也能使读者比较顺利地学习、理解并运用张量.

关键词 张量，坐标系，对偶，基矢量，自洽性

中图分类号：O302 **文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-16-041

引 言

“张量”(tensor, 紧张，张力) 一词，源自德国著名数学家和 (梵文) 语言学家 H.G. Grassmann (1809—1877)[1-2]，而张量的基本理论则是由意大利数学家 G. Ricci (1853—1925) 和他的学生 T. Levi-Civita (1873—1941) 创立 [2-3]，他们当时称之为 “绝对微分学”，现在则称之为 “协变微分学”. 在爱因斯坦于 1906 年至 1915 年研究广义相对论的过程中，师从 T. Levi-Civita 学习张量知识，在几何学家 M. Grossman 帮助下，理解和掌握了张量这一有效的数学工具，知道了用张量建立的物理方程的数学形式具有普适性，与选择何种坐标系无关. 爱因斯坦用张量这一数学工具建立了广义相对论，极大地推动了张量理论的研究和应用的发展 [4]. 虽然，C.F. Gauss, B. Riemann, E.B. Christoffel 等早在 19 世纪就导入了张量的概念，随后 Ricci 和 Levi-Civita 进一步发展了它. 但是，张量只是在广义相对论中展示出数学形式的简洁优美，揭示时空结构的深刻性和统一性，以及强大的预测能力, 之后，才成为近代微分几何学的重要学科 —— 张量分析，并在许多自然学科与工程技术中得到迅速发展 [5-8].

在应用基础研究方面，无论是大尺度高速旋转的星系的结构演化，还是中小尺度的弹塑性物体、薄壳结构、桁架、桥梁等，在超载荷作用下产生大形变，甚之微小尺度的晶体结构、小形变的流体力学，都需要采用张量分析这一有效的数学工具 [9-11].

众所周知，笛卡尔坐标系中各坐标轴互相正交，使得任一矢量的分解等效于在各坐标轴上的投影，矢量间的加法、乘法和微分、积分运算非常简洁. 当立方体受到剪切力的作用发生形变时，各边不再正交，而形成斜角，投影与矢量的平行四边形分解不再等价，分析与运算变得繁复. 蜿蜒起伏的河流，各种复杂的弹性和塑性形变，则需要用曲线坐标系来描述，张量就是为适应这些情况而产生的一种数学工具，其中包括一些规则，主要是为了保证分析和运算的自洽性和一致性，也就是 Ricci 的具有变革意义的协变性思想，它的核心思想是在斜角直线 (仿射) 坐标系和曲线坐标系中建立类似于笛卡尔坐标系中矢量运算的规则，采用对偶坐标系可以做到这一点. 进一步，将矢量与坐标点的数组对应起来，就可以在流形的意义下处理张量运算. 当曲线坐标系的坐标轴彼此正交时，就退回到笛卡尔坐标系，这就意味着曲线坐标系中的张量运算退化为笛卡尔坐标系的张量与矢量运算，主要是梯度、散度和旋度的运算. 但是，基矢量的大小和方向仍然随着坐标点的不

2016–02–22 收到第 1 稿，2016–07–01 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (61271425).

2) 赵松年，研究员. E-mail：zhaosongnian@163.com

3) 于允贤，高级工程师. E-mail：zsnzhao@yeah.net

引用格式：赵松年，于允贤. 从坐标系到张量 —— 学习和理解张量的一条捷径. 力学与实践, 2016, 38(4): 432-442

Zhao Songnian, Yu Yunxian. A shortcut to learn and understand the tensor — from the coordinate system to the tensor. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(4): 432-442

同而变化，是局部坐标系；而笛卡尔坐标系则是整体坐标系，基矢量在空间各处都是一样的 [12-14].

本文采用一种简单新颖而独特的方法，引入对偶坐标系、指标表示、求和约定和坐标变换，它们也是理解张量及其运算的基础.

1　对偶坐标系

1.1　标架

空间一固定点 O 与 3 个有序基矢量的构型全体称为标架，已有的各种坐标系就是用坐标线代替基矢量，因此是标架的特例.

1.2　求和约定

爱因斯坦在研究广义相对论时，需要处理大量求和运算，为了简化这种繁复的运算，提出了求和约定，推动了张量分析的发展，具有重要意义，它包括如下 3 点：

约定 1. 省去求和符号 Σ. 在公式中，某一项的不同字母和变量分别有重复一次的上角标和下角标时 (称作 “哑标”，它的取值与维数一致，在实空间 R^3 中是 1, 2, 3)，求和符号 Σ 略去，如下所示

$$S = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=1}^{n} a_ix^i = \sum_{k=1}^{n} a_kx^k = a_ix^i = a_kx^k = \cdots = a_jx^j$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{ij}x^iy^j = A_{ij}x^iy^j$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k}^{3} A_{ijk}x^iy^jz^k = A_{ijk}x^iy^jz^k$$

要注意的是，哑标必须是一上一下或上下数目对等，在每一项中的重复次数不能多于一次，不然就是错误的，没有意义，例如 $a_ib^ix_i$，$B_{ij}x^iy^iz^j$.

约定 2. 自由标，在表达式的每一项中，出现一次且仅出现一次，用同一字母表示的下角标，如 $A_{ij} = B_{ip}C_{jq}D^{pq}$，自由标是 i 和 j，哑标是 p 和 q；而像表示式 $a_i = b_j + c_i$ 和 $A_{ij} = A_{ik}$，都是无意义的. 利用自由标也可以简化数学公式，如 $y_i = A_{ij}x^j$，用自由标 i 和哑标 j 表示的求和，一般取值为：$i, j = 1, 2, 3$；$y_i = A_{ij}x^j$ 实际上是下述方程的缩写

$$y_1 = A_{1j}x^j = A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3$$

$$y_2 = A_{2j}x^j = A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + A_{23}x^3$$

$$y_3 = A_{3j}x^j = A_{31}x^1 + A_{32}x^2 + A_{33}x^3$$

约定 3. 数学表达式中，指标的 “高度” 是指上角标与下角标的属性，同一高度的意思就是同为上角标或同为下角标. 由上角标变为下角标是指标降低，反之是指标升高.

在斜角坐标系和曲线坐标系中，张量的重要内容是坐标、指标之间的转换，熟悉求和约定是很重要的.

1.3　坐标系

下面的讨论限于实空间 R^3，就是有实际意义并具有几何解释的情形. 先讨论笛卡尔直角坐标系，接着讨论斜角直线坐标系，然后再推广至曲线坐标系 (如图 1 所示).

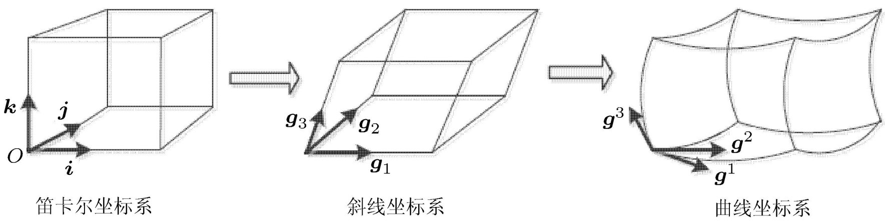

图 1　3 个坐标系

在实空间 R^3 中，有正交直角坐标系 (笛卡尔坐标系)，斜角直线坐标系 (仿射坐标系) 和曲线坐标系 (包括正交曲线坐标系)，记为 O–$x_1x_2x_3$. 对于这些坐标系均可以引入具有共同原点 O 的对偶坐标系 O–$x^1x^2x^3$，也就是用具有上、下角标的对偶表示方法区分两类坐标系，同一个矢量 $\boldsymbol{d}$ 在不同的坐标系中记为 $\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}^1$；它们在坐标系中，按照平行四边形分解的分量也用这种记法：$\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{a}^1x_1 + \boldsymbol{a}^2x_2 + \boldsymbol{a}^3x_3$ 和 $\boldsymbol{d}^1 = \boldsymbol{a}_1x^1 + \boldsymbol{a}_2x^2 + \boldsymbol{a}_3x^3$. 式中，$\boldsymbol{a}^1$，$\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{a}^3$ 是 O–$x_1x_2x_3$ 坐标系中的基矢量；$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 是 O–$x^1x^2x^3$ 坐标系中的基矢量. 之所以采用 $\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}^1$ 这样的上下角标记法，就是表示具有上角标的基矢量是具

有下角标的基矢量的“对偶”，这里上角标不是指数. 对偶记法在张量分析中非常有用：既区分不同的坐标系和它的基矢量，又便于微分和乘法运算. 现在，我们通过矢量的点乘运算说明对偶基矢量之间的关系，不同坐标系如何简化复杂的运算

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{d}^1 = &(\boldsymbol{a}^1 x_1 + \boldsymbol{a}^2 x_2 + \boldsymbol{a}^3 x_3)\cdot \\ &(\boldsymbol{a}_1 x^1 + \boldsymbol{a}_2 x^2 + \boldsymbol{a}_3 x^3) = \\ &\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^1 x_1 x^1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^1 x_2 x^1 + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^1 x_3 x^1 + \\ &\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^2 x_1 x^2 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^2 x_2 x^2 + \\ &\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^2 x_3 x^2 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^3 x_1 x^3 + \\ &\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^3 x_2 x^3 + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^3 x_3 x^3 \end{aligned} \tag{1}$$

有了式 (1)，就可以对不同的坐标系进行分析. 为了方便起见，可以把基矢量表示成矩阵形式

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^3 \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^3 \\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^3 \end{bmatrix}$$

$$(i,j=1,2,3)$$

1.3.1 笛卡尔直角坐标系

这时，矢量分解的平行四边形是矩形，它和矢量 $\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}^1$ 分别在 O–$x_1x_2x_3$ 坐标系和 O–$x^1x^2x^3$ 坐标系中各坐标轴上的投影完全等效，通过旋转和平移，O–$x_1x_2x_3$ 坐标系和 O–$x^1x^2x^3$ 坐标系完全重合 (也就是同胚映射或双方单值，光滑的恒等变换)，如图 2 所示. 由此很容易得出基矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{a}^i$ $(i=1,2,3)$ 的如下结果：

(1) 基矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{a}^i$ 是单位基矢量：$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}^1\to\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}^2\to\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}^3\to\boldsymbol{k}$；

(2) 它们是正交的基矢量：$\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}^1$，$\boldsymbol{a}_2\perp\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{a}_3\perp\boldsymbol{a}^3$；$\boldsymbol{a}_2\perp\boldsymbol{a}^1$，$\boldsymbol{a}_3\perp\boldsymbol{a}^1$；$\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{a}_3\perp\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}^3$，$\boldsymbol{a}_2\perp\boldsymbol{a}^3$；

(3) $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{a}^i$ 的点积具有单位正交基矢量的特性 $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j=\delta_i^j$：$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^1=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^3=1$；$\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^1=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^1=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^3=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^3=0$.

因此，两个矢量的点积运算具有如下简洁的形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}^1 = &\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^1 x_1x^1 + \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^2 x_2x^2 + \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^3 x_3x^3 = \\ &x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3\end{aligned} \tag{2}$$

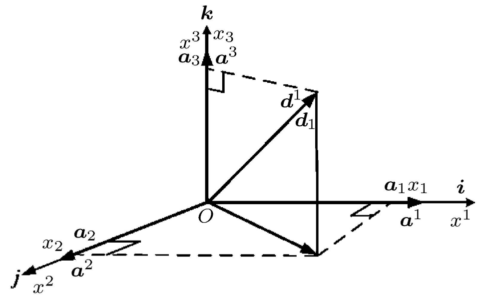

图 2 笛卡尔直角坐标系 (凡是笛卡尔坐标系，无论处于空间何处，都可以看成同一个坐标系，单位基矢量不变，因此，是整体坐标系. 至于处于其中的具体矢量，需要计入坐标系的平移和旋转后的效果)

矩阵 $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j$ 简化为单位对角矩阵

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}^1$ 本就是同一个矢量，它们在对偶坐标系中的对应分量是相等的，即 $x_1=x^1$，$x_2=x^2$，$x_3=x^3$，$\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}^1=(d)^2$ (注意：为了将对偶的上指标与指数区分开来，无圆括号的字符的上角标表示对偶，如 d^2；有圆括号的字符的上角标是指数，如 $(d)^2$). 由此可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}^1 = (d)^2 = &(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2 = \\ &(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\end{aligned} \tag{3}$$

矢量模的平方等于各坐标分量的平方和. 所以，笛卡尔直角坐标系只需要一组基矢量，就是我们熟悉的 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$. 在这里，可以把笛卡尔坐标系设想为两个正交的对偶坐标系的重合，为讨论和理解斜角直线坐标系和曲线坐标系中如何引入对偶基矢量以及张量分析奠定了基础.

1.3.2 斜角直线坐标系

如果不是笛卡尔直角坐标系，而是斜角直线坐标系，那情况将如何？在摄影和景物透视中经常遇到的仿射坐标系，就是现在要讨论的斜角直线坐标系，它本身不再是正交坐标系，因此，也就不能类似于在笛卡尔坐标系中所做的那样，引入正交对偶坐标系. 一个可行的办法是适当放宽正交性这个条件，如果斜角直线坐标系记为 O–$x_1x_2x_3$，引入的对偶坐标系记为 O–$x^1x^2x^3$，放宽正交性这个条件，就是不要求 O–$x^1x^2x^3$ 是正交的，而是仅仅要求

O–$x^1x^2x^3$ 坐标系的每一个坐标轴 (例如 x^1 轴) 分别垂直于 O–$x_1x_2x_3$ 坐标系中另两个坐标轴构成的坐标平面 (例如 Ox_2 轴与 Ox_3 轴构成的坐标平面 Ox_2x_3)，即

$$x^1 \perp Ox_2x_3\,,\quad x^2 \perp Ox_3x_1\,,\quad x^3 \perp Ox_1x_2 \qquad (4)$$

坐标轴之间的垂直关系如图 3 所示.

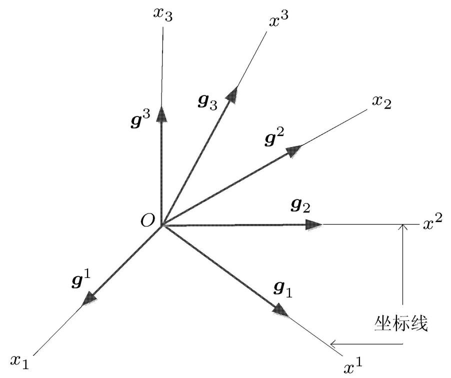

图 3　斜角直线坐标系，基矢量为上角标时，对应的坐标系是下角标；反之亦然；下角标是协变量，上角标是逆变量

图 3 中的 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{g}_3$ 是坐标系 O–$x^1x^2x^3$ 的基矢量，称作协变基矢量；$\boldsymbol{g}^1$，$\boldsymbol{g}^2$，$\boldsymbol{g}^3$ 是坐标系 O–$x_1x_2x_3$ 的基矢量，称作逆变基矢量 (具有上角标的基矢量处于具有下角标的坐标系，反之亦然). 不必规定它们是单位长度，也不要求是否具有量纲单位，由此区别于笛卡尔直角坐标系的基矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$. 虽然 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{g}_3$ 之间并不互相正交，$\boldsymbol{g}^1$，$\boldsymbol{g}^2$，$\boldsymbol{g}^3$ 也是如此，但是，根据式 (4)，它们具有正交坐标系的部分特性，即

$$\boldsymbol{g}_1 \perp \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{g}^3\,,\quad \boldsymbol{g}_2 \perp \boldsymbol{g}^3, \boldsymbol{g}^1\,,\quad \boldsymbol{g}_3 \perp \boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2$$

由此，逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^1$，$\boldsymbol{g}^2$，$\boldsymbol{g}^3$ 和协变基矢量 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{g}_3$ 联合起来，就具有了类似于笛卡尔坐标系中基矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 之间的关系

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1\,, i = j \\ 0\,, i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (5)$$

任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 既可以在协变基矢量中分解 $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i$，也可以在逆变基矢量中分解 $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{g}^i$，$v^i$ 和 v_i 是矢量 $\boldsymbol{v}$ 的逆变和协变分量，有如下简洁的表达式

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{g}^i = v_1 \boldsymbol{g}^1 + v_2 \boldsymbol{g}^2 + v_3 \boldsymbol{g}^3 =$$

$$v^j \boldsymbol{g}_j = v^1 \boldsymbol{g}_1 + v^2 \boldsymbol{g}_2 + v^3 \boldsymbol{g}_3$$

这也就是引入对偶坐标系的目的. 由图 3 可以看出，处于坐标系 O–$x^1x^2x^3$ 中的任一协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$，都可以沿着逆变基矢量分解为 3 个分量，在坐标系 O–$x_1x_2x_3$ 中的逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 也可以沿着协变基矢量分解为 3 个分量. 3 个协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 共有 9 个逆变基矢量分量，如下式所示

$$\boldsymbol{g}_i = g_{ij} \boldsymbol{g}^j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

式中，系数 g_{ij} 称为协变度量 (度规) 张量的分量，类似地，逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 沿着协变 $\boldsymbol{g}_j$ 基矢量分解也有 9 个分量

$$\boldsymbol{g}^i = g^{ij} \boldsymbol{g}_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

式中，系数 g^{ij} 称为逆变度量 (度规) 张量的分量. 由此可知，由 9 个分矢量构成一个新的量，就是张量，可以说这 9 个分矢量也是张量的 “实体”，称作二阶张量 (有 2 个指标，如 i, j). 通常，矢量有 3 个分矢量，称作一阶张量 (有 1 个指标，如 i)，标量自然是零阶张量 (无指标). 下面还会提到张量的另一种定义.

图 4 所示是一个矢量 $\boldsymbol{r}$ 在对偶的斜角直线坐标系中的分解，因为坐标系是非正交的，已经不能按投影方法分解，投影的平行四边形是矩形，在斜角直线坐标系中不适用，只能按平行四边形方法分解，它与投影不等价，这一点很重要，务必注意. 图中矢量 $\boldsymbol{r}$ 在对偶坐标系中可以表示为 $\boldsymbol{r} = r^i \boldsymbol{g}_i = r_i \boldsymbol{g}^i$，$r^i$ 是坐标系 O–$x^1x^2x^3$ 中的逆变分量，而 r_i 就是坐标系 O–$x_1x_2x_3$ 中的协变分量. 斜角直线坐标系的对偶基矢量在坐标 (轴) 线的空间各点的方向和长度都是不变的，但其长度不必要求是单位长度. 在笛卡尔坐标

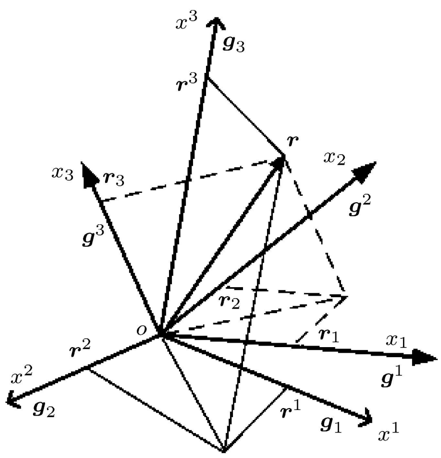

图 4　对偶的三维斜线坐标系，矢量是按平行四边形分解的，如细实线和虚线所示

系，基矢量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 既具有单位长度，又互相正交，因此，在运算中可以只考虑方向，而不考虑幅度. 对于斜角直线坐标系，基矢量的方向和幅度会影响运算结果，因此，需要确定基矢量的长度.

首先，斜角直线坐标系各轴线间的夹角与基矢量的长度有关，设基矢量 $\boldsymbol{g}^\alpha$ 与 $\boldsymbol{g}_\beta$ 之间的夹角为 ϕ，根据式 (5)，它们是按点积运算归一化的，即 $\boldsymbol{g}^\alpha \cdot \boldsymbol{g}_\alpha = 1$，由此可得

$$|\boldsymbol{g}^\alpha| = \frac{1}{|\boldsymbol{g}_\alpha|\sin\phi} \text{ 或 } |\boldsymbol{g}_\alpha| = \frac{1}{|\boldsymbol{g}^\alpha|\sin\phi} \tag{6}$$

其次，任一径矢量 $\boldsymbol{r}$ 在 3 个坐标轴上的分量是 r_i 或 r^i，既可以按协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 分解，也可以按逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 分解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} = r^i\boldsymbol{g}_i = r_i\boldsymbol{g}^i = r^1\boldsymbol{g}_1 + r^2\boldsymbol{g}_2 + r^3\boldsymbol{g}_3 = \\ r_1\boldsymbol{g}^1 + r_2\boldsymbol{g}^2 + r_3\boldsymbol{g}^3\end{aligned} \tag{7}$$

径矢量 $\boldsymbol{r}$ 实际上是空间变量 x, y, z $(x_1, x_2, x_3$ 或 $x^1, x^2, x^3)$ 的线性函数，微小改变或增量自然要通过它的全微分来确定，对式 (7) 按坐标 x^i 或 x_i 求微分，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \boldsymbol{g}^i\mathrm{d}x_i \tag{8}$$

由此给出了基矢量的定义 $\boldsymbol{g}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$ 或 $\boldsymbol{g}^i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_i}$. 它与笛卡尔坐标系的单位矢量之间的关系很容易从式 (7) 得出

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}x^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial x}{\partial x^1}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial x^2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial x^3}\boldsymbol{k} \tag{9}$$

1.3.3 曲线坐标系

前面，把本来简单的笛卡尔单位基矢量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 用对偶记法表示，其目的就是为更复杂的坐标系提供一个建立基矢量的参考方法. 因为对于笛卡尔坐标系，从坐标原点沿各坐标轴线取其单位长度，就是单位基矢量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$，并不复杂. 可是对于斜角直线坐标系，特别是曲线坐标系，基矢量的选取却很复杂. 有了上述思路，所得结果和相关公式，就有了参考可循. 笛卡尔坐标系和斜角直线坐标系的基矢量不会随着空间坐标点的改变而变化，是整体坐标系. 对于曲线坐标系，基矢量会随着空间点的变化而改变，例如受力作用的质点的运动，流体中某一点的流速，都是位置的函数，矢量分解也是针对该点的基矢量的分解，点的位置变化了，基矢量也就随之变化，因此是局部坐标系. 在引言中提到流形意义下的张量分析，其最重要的特点就是具有局部坐标系，在曲线的每一点上都可以借助标架建立同胚于笛卡尔坐标的局部坐标序列，而标架就是由自然基构成的，我们知道，线性空间 (或向量空间) 中的任一元素均可以用最大线性无关的一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ (或对偶的基组 $e^1, e^2, \cdots, e^n$) 表示，显然，这组基不是矢量 (向量)，通常称为自然基组，它在曲线每一点的邻域中，都有 $e^i \cdot e_k = \delta_i^k$.

曲线坐标系中的特例是正交曲线坐标系 (如球面坐标系和柱面坐标系)，可以看作是在连续变化的曲线上的每一点的局部坐标系，也就是所谓 “流形”. 当坐标 x^i 有单位增量时，弧长的增量 $\mathrm{d}s$ 可按下式计算

$$\mathrm{d}s^2 = (A_1\mathrm{d}x^1)^2 + (A_2\mathrm{d}x^2)^2 + (A_3\mathrm{d}x^3)^2 \tag{10}$$

式中 $A_1 = \sqrt{g_{11}}$, $A_2 = \sqrt{g_{22}}$, $A_3 = \sqrt{g_{33}}$. A_1, A_2 和 A_3 被称作 Lame 常数；在笛卡尔坐标系中: $A_1 = A_2 = A_3 = 1$. 因此，Lame 常数也是空间属性的一种度量.

上述对斜角直线坐标系的分析完全适合于曲线坐标系. 但要特别注意的是，曲线坐标系处理的是点运算，实际上就是一点处的基矢量组成的标架，逆变与协变基矢量都只具有局地 (点所在位置的邻域) 特性，它们不再是常矢量，在图 5 中，从参考坐标系的原点 O 到曲线坐标系的点 $p(x^1, x^2, x^3)$，有一径矢量 $\boldsymbol{r}$，它的增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 根据式 (7) 和式 (8) 可以表示为 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2 = \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$,

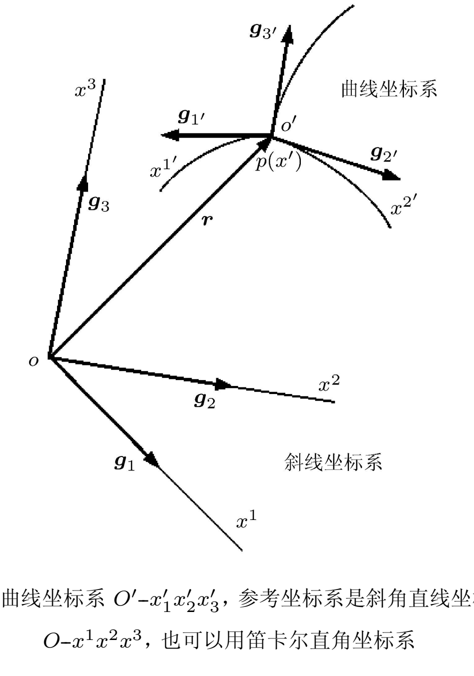

图 5 曲线坐标系 O'-$x_1'x_2'x_3'$，参考坐标系是斜角直线坐标系 O-$x^1x^2x^3$，也可以用笛卡尔直角坐标系

显然是式 (10) 的另一种表示，其中 g_{ij} 能反映空间两点距离 ds 的物理属性，因此，便称 g_{ij} 为度规或度量张量的分量，也就是张量的几何解释和它的物理意义.

既然曲线坐标系中的基矢量不再是常数，那么它随坐标是如何变化的呢？由于基矢量是坐标的连续可微函数，每一个基矢量 $\boldsymbol{g}_j$ 对坐标 x^i 求导，可得 9 个表示式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}=\partial_i\boldsymbol{g}_j=\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ijk}\boldsymbol{g}^k\\&\frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i}=\partial_i\boldsymbol{g}^j=-\Gamma^j_{ik}\boldsymbol{g}^k=-\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k\\&\Gamma_{ijk}=g_{kl}\Gamma^l_{ij}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

式中，i,j,k,l 的取值，按照惯例，各为 1, 2 ,3, 以下不再注明. $\partial_i\boldsymbol{g}_j\equiv\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}$，是偏微分的简化符号 (类似地，还有 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\equiv\partial_{,i}$; $\dfrac{\partial\,()}{\partial x^i}\equiv()_{,i}$)；$\Gamma_{ijk}$ 是第 1 类 Christoffel (克氏) 符号，Γ^k_{ij} 是第 2 类 Christoffel 符号 (其中，i 和 j 对 Γ 是对称的，实际上只有 18 个独立分量). 其实际意义是将矢量的微分运算从直角坐标系推广到曲线坐标系，因为一个矢量除了沿着基矢量分解，还需要计入基矢量本身随着坐标的改变而变化的情况，而这一点正是由克氏符号体现出来，它就是坐标改变引起基矢量变化的量值大小，是全微分中的附加项. 它们与基矢量 (也就是度规张量的分量) 有如下关系

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right)\\&\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

显然，对于笛卡尔直角坐标系，单位基矢量不随坐标的改变而变化，克氏符号为零. 因此，可以将克氏符号理解为基矢量的增量与坐标增量之间的比例系数 (也称作联络系数), 也可以理解为曲线坐标系中同一个矢量平移时，方向的改变引起的附加增量. 要注意，由 Lame 常数也可以表示克氏符号，但克氏符号不是张量的分量，只在曲线坐标系才有意义. 可以举一个简单的例子，矢量是一阶张量，如 $\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{g}_i=v_i\boldsymbol{g}^i$，对于逆变分量 $v^i\boldsymbol{g}_i$，按照复合函数求导，可得如下结果

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}&=\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\boldsymbol{g}_i+v^i\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}=\\&\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\boldsymbol{g}_i+v^k\Gamma^i_{kj}\boldsymbol{g}_i=\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+v^k\Gamma^i_{kj}\right)\boldsymbol{g}_i\end{aligned}$$

式中增加的这一项 $v^k\Gamma^i_{kj}$ 就是由于基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 随坐标 x^j 变化而产生的附加项. 要注意，如果是协变分量 $v_i\boldsymbol{g}^i$，附加项是 $-v_k\Gamma^k_{ij}$，协变分量的导数是 $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}=\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial x^j}-v_k\Gamma^k_{ij}\right)\boldsymbol{g}^i$.

对于张量 $\boldsymbol{T}$ 而言, 也有同样的求导公式，到此，我们对坐标系与基矢量的基本概念的介绍就告一段落，下面将介绍几种重要运算规则，它们对深刻理解张量的本质也是很有帮助的.

2　运算规则

2.1　指标升降

前面已经指出，协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 可以沿着逆变基矢量分解：$\boldsymbol{g}_i=g_{ij}\boldsymbol{g}^j$，逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 也可沿着协变基矢量分解：$\boldsymbol{g}^i=g^{ij}\boldsymbol{g}_j$，通过这种分解 (见式 (6))，基矢量的指标将由协变改为逆变，逆变改为协变，也就是下角标与上角标互易，这就是指标的升降. 矢量分解同样也会使指标升降，矢量 $\boldsymbol{p}$ 可以分解为 $\boldsymbol{p}=p^i\boldsymbol{g}_i=p_j\boldsymbol{g}^j$，再利用关系式 $\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=g_{ij}\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=g_{ij}$ 和 $\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j=g^{ij}\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=g^{ij}$，很容易得出如下公式

$$p^i=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}^i=p_k\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}^i=p_kg^{ki}$$

$$p_j=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_j=p^k\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}_j=p^kg_{kj}$$

指标的升降在斜角直线坐标系和曲线坐标系的张量运算中能简化公式的表达，笛卡尔直角坐标系没有指标升降的问题.

2.2　坐标变换与基矢量变换

坐标变换是一个经常遇到问题，人们比较熟悉的医学检查设备 CT，就是将等强度 X 射线发射和接受装置固定在同一个环形构架上，实现同步旋转，如果将起始位置的圆柱坐标系作为参考坐标系 (称作 “旧” 坐标系，记为 x^i)，检查中它将随着环形构架转动，形成不同时刻的动态坐标系 (称作 “新” 坐标系，记为 $x^{i'}$)，等强度 X 射线可以看作是同一矢量，旋转时，它在新旧坐标系中的投影 $x^{i'}$ 与 x^i 各不相同，坐标变换就是要确定 $x^{i'}$ 和 x^i 的关系，即 $x^{i'}=x^{i'}(x^1,x^2,x^3)=x^{i'}(x^i)$ 与 $x^i=x^i(x^{1'},x^{2'},x^{3'})=x^i(x^{i'})$. 如果 $x^{i'}$ 能由 x^i 表示, x^i 也能由 $x^{i'}$ 表示，那它们各自必须是单值、连续、可微函数，而且变换的雅可比 (Jacobi) 行列式不为零

$$J=\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|\neq0,\quad J'=\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|\neq0,\quad J\cdot J'=1\tag{13}$$

式 (7) 已经给出了矢量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标轴 x^i 上的分解：$\boldsymbol{r}=r^i\boldsymbol{g}_i$；或者在坐标轴 x_i 上的分解：$\boldsymbol{r}=r_i\boldsymbol{g}^i$，这表明，在对偶表示中，矢量的协变 (或逆变) 分量和逆变 (或协变) 基矢量的坐标变换矩阵 (方阵) 是互逆的，满足式 (13)，保证了矢量的不变性. 那么，该矢量 $\boldsymbol{r}$ 在不同的坐标系中的分解又是如何呢？这就需要先讨论基矢量 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}$ 在不同的坐标系中的分解，一般假设分解的关系式是线性的，如此有

$$\boldsymbol{g}_{i'}=A_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_i\,,\quad \boldsymbol{g}^{i'}=A_i^{i'}\boldsymbol{g}^i$$

我们已经知道 $\boldsymbol{g}_{i'}=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}}=\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(x^i\boldsymbol{g}_i\right)=\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}_i=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}=\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(x^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}\right)=\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\boldsymbol{g}_{i'}$，以及 $r_{i'}=A_i^{i'}r_i$，$r^{i'}=A_{i'}^{i}r^i$，$r_i=A_{i'}^{i}r_{i'}$，$r^i=A_i^{i'}r^{i'}$；$\boldsymbol{r}=r_i\boldsymbol{g}^i=r^i\boldsymbol{g}_i=r_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}=r^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}$，由此可得矢量 $\boldsymbol{r}$ 在新旧坐标系中的表示式

$$\boldsymbol{r}=r_{i'}A_i^{i'}\boldsymbol{g}^i=r^{i'}A_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_i\,,\quad \boldsymbol{r}=r_iA_{i'}^{i}\boldsymbol{g}^{i'}=r^iA_i^{i'}\boldsymbol{g}_{i'} \tag{14}$$

在笛卡尔坐标系，用基矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 代替 $\boldsymbol{g}_{i'}$，$\boldsymbol{g}^{i'}$，$\boldsymbol{g}_i$ 或 $\boldsymbol{g}^i$，就是我们熟悉的矢量分解方式.

2.3 张量的两种定义

提到张量，一定要记住它和坐标系的密切相关，而且是与对偶坐标系有关，在张量的表示中，必须指明张量是在对偶坐标系的哪个基矢量中分解的，张量不能离开对偶坐标系的基矢量而单独存在. 因此，说张量分析本质上是坐标系中基矢量之间的变换关系并不为过. 熟悉张量也就是熟悉基矢量的转换关系，需要理解的基本原理并不多，但是，需要记住的内容却很多，为此，准备一本包括张量的数学手册以供随时查阅，可以减轻记忆负担.

自然界中任一空间位置处的温度，空气密度只是位置的函数，与方向无关；电磁场中某一点的状态是由作用强度与方向共同确定的，例如电场强度，磁场强度，它们都是矢量. 然而，张量却与此不同，很难把它设想成像矢量那样具体的物理量，现在，通常用两种定义来解释张量，分述如下：

(1) 按照矢量分解的方式定义：一般而言，矢量与其分量是等价的，一个矢量有 3 个基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ $(i=1,2,3)$，它的对偶分解是 $\boldsymbol{g}^i$，也有 3 个分矢量，两次分解 ($\boldsymbol{g}_i$ 对 $\boldsymbol{g}^i$ 的分解或 $\boldsymbol{g}^i$ 对 $\boldsymbol{g}_i$ 的分解) 共有 9 个分量，这 9 个分矢量的集合就称作张量，如前面提到的度量张量 g_{ij} 和 g^{ij}. 但是，这种矢量分解的定义不能很好地体现张量的物理意义，我们给出一个更具体一些的解释. 考虑黏性流体中一个正六面体微元 dD (宏观小而微观大)，在每一个面元上的作用力都可以在空间上分解为 3 个互相正交的应力，其中正压力用 σ_{ii} 表示，只是需要注意，切应力是指面元正侧 (法线正方向一侧，如图 6 中实线所示) 对面元负侧的单位面积上的作用力 (图 6 中点画线表示对应的反作用力)；3 个互相正交的面元上的受力情况代表了任何形状微元体的受力情况. 这 3 个面元共有 9 个应力分矢量 (3 个正压力 $\boldsymbol{\sigma}_{ii}$，6 个沿面元切向的切应力 $\boldsymbol{\tau}_{ij}$)，它们在整体上确定了微元体的受力状态，因此，可以称作应力张量，它与矢量的区别是很明显的：矢量是一点上受力的局部描述，需要 3 个分量；应力张量是微元体受力的整体描述，需要 9 个分量.

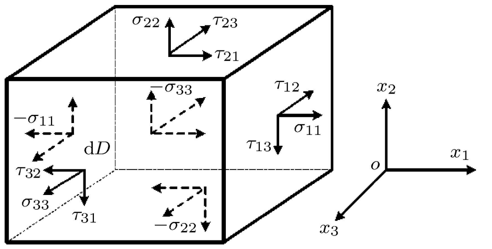

图 6 正六面体微元上的应力分量 (实线和虚线) 的平衡 [15]

前面已经指出，矢量 $\boldsymbol{r}$ 在新旧坐标系中的转换只需一个转换系数 $A_i^{i'}$，如式 (14) 所示，它将新坐标系中的矢量 $\boldsymbol{r}_{i'}$ 与旧坐标系中的矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 联系起来，如：$\boldsymbol{r}_{i'}=A_i^{i'}\boldsymbol{r}_i$ (其他变换形式还有：$\boldsymbol{r}^{i'}=A_{i'}^{i}\boldsymbol{r}^i$，$\boldsymbol{r}_i=A_{i'}^{i}\boldsymbol{r}_{i'}$，$\boldsymbol{r}^i=A_i^{i'}\boldsymbol{r}^{i'}$). 而二阶张量在新旧坐标系中的转换需要两个转换系数 $A_i^{i'}$ 和 $A_j^{j'}$，这样就可以将张量表示为：$\boldsymbol{T}=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=T^{ij}A_i^{i'}A_j^{j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$，但是，$T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=T^{i'j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$，由此可得 $T^{i'j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}=T^{ij}A_i^{i'}A_j^{j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$，由于 $\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$ 和 $\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$ 线性无关，只考虑张量的分量，就有 $T^{i'j'}=T^{ij}A_i^{i'}A_j^{j'}$，这就是张量 $\boldsymbol{T}$ 在新旧坐标系中的转换关系式. 或者，将基矢量 $\boldsymbol{g}_i=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}=\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(x^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}\right)$ 代入 $T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=T^{i'j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$，同样可得 $T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=T^{ij}\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}=T^{i'j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$，即：$T^{i'j'}=\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}T^{ij}$. 将此表示式推广至 k 协变和 s 逆变的混变张量，就有如下表示式 (也参考 Jacobi 公式 (13))

$$T_{i_1'\cdots i_k'}^{j_1'\cdots j_s'}=\frac{\partial x_1^{j'}}{\partial x_1^{j}}\cdots\frac{\partial x_s^{j'}}{\partial x_s^{j}}\frac{\partial x_1^{i}}{\partial x_1^{i'}}\cdots\frac{\partial x_k^{i}}{\partial x_k^{i'}}T_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_s} \tag{15}$$

或者指明逆变在前，协变在后的表示式

$$T^{j_1'\cdots j_s'}{}_{i_1'\cdots i_k'}=\frac{\partial x_1^{j'}}{\partial x_1^j}\cdots\frac{\partial x_s^{j'}}{\partial x_s^j}\frac{\partial x_1^i}{\partial x_1^{i'}}\cdots\frac{\partial x_k^i}{\partial x_k^{i'}}T^{j_1\cdots j_s}{}_{i_1\cdots i_k} \tag{16}$$

当然，也可以是协变在前，逆变在后，不再重复. 上述表示式是针对张量分量的表示，略去了基矢量.

(2) 按照并矢运算方式的定义：其实两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的并矢就是二者的相互作用，各自有 3 个分量，相互作用形成 9 个分量 (a_ib_j 或 a^ib^j) 的集合就是张量，这种相互作用用 $\otimes$ 符号表示，也可以省略，如下式所示

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\boldsymbol{ab}=a^ib^j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=a_ib_j\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$$

并矢的矩阵表示如下

$$[\boldsymbol{ab}]=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}(a_ib_j)=\boldsymbol{T}(i,j)$$

并矢不满足交换律，即 $\boldsymbol{ab}\neq\boldsymbol{ba}$. 可以看出，乘积的含义是表示自然界中的相互作用. 将并矢或张量在具体坐标系中用分量表示时，$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ 的分量 a_ib_j(或 a^ib^j) 或幅值记为 T^{ij}(或 T_{ij})，新旧坐标系分别记为 $\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$，$\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$，$\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j$，$\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i$ 或 $\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$，$\boldsymbol{g}^{i'}\boldsymbol{g}^{j'}$，$\boldsymbol{g}^{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$，$\boldsymbol{g}^{j'}\boldsymbol{g}_{i'}$. 幅值与坐标基矢量合在一起，就构成了张量的并矢表示：$T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$，$T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$，$T^{i'j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$ 和 $T_{i'j'}\boldsymbol{g}^{i'}\boldsymbol{g}^{j'}$. 此外，还有基矢量的混变表示，这时，一般要指明逆变和协变的先后顺序，通常用上圆点 "˙" 或下圆点 "." 将逆变与协变指标隔开，位于圆点前面的为先，如 $T_i^{\cdot j}$，$T^i_{\cdot j}$，表示指标 "i" 的变换先于 "j". 这样，混变张量的表示便是：$T_i^{\cdot j}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j$，$T^i_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$；三阶混变张量则如：$T^i_{\cdot jk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k$ 和 $T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k$，等等；有时省去圆点，只用空格隔开，如：$T_i^{\cdot j}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j\leftrightarrow T_i{}^j\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j$，$T^i{}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\leftrightarrow T^i_j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$，$T^i_{\cdot jk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\leftrightarrow T^i{}_{jk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k$，等等. 这里所说的并矢是指基矢量的并矢，它们相互作用的强度已经包含在 T^{ij}, $T^i{}_j$ 和 $T^i_{\cdot jk}$ 这样的符号中，基矢量的表示只是张量的属性，体现坐标系之间的变换. 下面给出张量的并矢表示的一般表示式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}=T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\,\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l=\\ T_{i\cdots j}{}^{k\cdots l}\,\boldsymbol{g}^i\cdots\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_k\cdots\boldsymbol{g}_l=\\ T^{i\cdots jk\cdots l}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k\cdots\boldsymbol{g}_l=\\ T_{i\cdots jk\cdots l}\boldsymbol{g}^i\cdots\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l\end{aligned}$$

根据并矢表示方法，度量张量可以表示为

$$\boldsymbol{G}=g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j=\delta^i_j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j=\delta^j_i\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j=g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$$

上式表明：度规张量的两个分量分别是混变分量 $\boldsymbol{g}^i_{\cdot j}=\delta^i_j$ 和 $\boldsymbol{g}_i^{\cdot j}=\delta^j_i$，在笛卡尔直角坐标系中，它的矩阵可以表示为单位对角矩阵 (i 为行元素，j 为列元素)

$$[\boldsymbol{G}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=1$$

因此 $\boldsymbol{G}$ 可以将矢量和张量分别映射为其自身，即：$\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}$.

2.4 重要的张量算符

将高阶张量分解为低阶张量时，需要用到两个算符，即 Kronecker 算符 δ_{ij}(单位张量) 和替换算符 e_{ijk}. 单位张量 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$, $\delta_{ii}=3$. 替换算符 e_{ijk} 的作用和取值 $(0,1,-1)$ 规则如下

$$e_{ijk}=e^{ijk}=\begin{cases}1,\ \text{当}\ i,j,k=1,2,3\to2,3,1\to3,1,2\to1,2,3\\ \quad\text{(顺时针循环)}\\ -1,\ \text{当}\ i,j,k=1,3,2\to3,2,1\to2,1,3\to1,3,2\\ \quad\text{(逆时针循环)}\\ 0,\ \text{当}\ i,j,k\ \text{中有两个的取值相同时}\end{cases}$$

这里介绍的有关 e_{ijk} 的内容在湍流文献中会经常遇到，只是一些数学表示的技巧，但熟悉它是有必要的，循环规则如图 7 所示. 利用 e_{ijk} 可以简化数学表示式，如

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_1&\boldsymbol{g}_2&\boldsymbol{g}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}&\dfrac{\partial}{\partial x_2}&\dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ \boldsymbol{v}_1&\boldsymbol{v}_2&\boldsymbol{v}_3\end{bmatrix}\leftrightarrow(\nabla\times\boldsymbol{v})_i=e^{ijk}\frac{\partial\boldsymbol{v}_k}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_i$$

e_{ijk} 与正交标准基矢量 $[\boldsymbol{e}_i\ \ \boldsymbol{e}_j\ \ \boldsymbol{e}_k]=\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k=1$ 有如下关系：$e_{ijk}=[\boldsymbol{e}_i\ \ \boldsymbol{e}_j\ \ \boldsymbol{e}_k]\varepsilon_{ijk}$. 替换算符 e_{ijk} 也称为 Ricci 符号，值得注意的是，它与另外一个称为 Eddington 置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}$ 的区别，e_{ijk} 不是张量，

而 ε_{ijk} 是张量，即 $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k$，$\varepsilon_{ijk}=[\boldsymbol{e}_i\ \ \boldsymbol{e}_j\ \ \boldsymbol{e}_k]\sqrt{g}e_{ijk}$，$\varepsilon^{ijk}=[\boldsymbol{e}_i\ \ \boldsymbol{e}_j\ \ \boldsymbol{e}_k]e^{ijk}/\sqrt{g}$，由此可得 $e_{ijk}e^{ijk}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}=2\delta_i^i=6$.

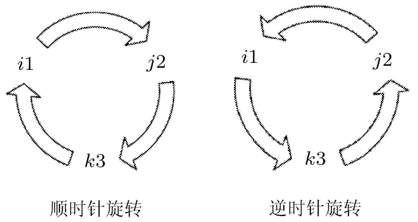

图 7 替换算符 e_{ijk} 的奇偶循环

3 运算规则

3.1 缩并

缩并是张量的内乘. 我们知道，两个矢量的内乘 (点积) 是一个标量 (数量)，张量的内乘或点积也是一个标量，这样，张量的缩并就是基矢量之间的内积运算. 因此，在张量的表示式中需要标明进行缩并的基矢量，在下面的例子中，符号 $\overset{\cdot}{\overbrace{\boldsymbol{T}}}$ 表示张量 $\boldsymbol{T}$ 需要缩并运算，符号 $\overset{\cdot}{\overbrace{\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_s}}$ 表明是基矢量 $\boldsymbol{g}_j$ 与 $\boldsymbol{g}^s$ 进行缩并运算，由于 $\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^s=\delta_j^s$，而 δ_j^s 就起到缩并自由标为哑标的作用，即

$$\begin{aligned}
\overset{\cdot}{\overbrace{\boldsymbol{T}}} &= T^{ijk}{}_{rst}\boldsymbol{g}_i\overset{\cdot}{\overbrace{\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^s}}\boldsymbol{g}^t= \\
&T^{ijk}{}_{rst}(\boldsymbol{g}_j\cdot\boldsymbol{g}^s)\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^t= \\
&T^{ijk}{}_{rst}\delta_j^s\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^t= \\
&T^{ijk}{}_{rjt}\delta_j^j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^t=S^{ik}{}_{rt}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^t
\end{aligned}$$

式中，$S^{ik}{}_{rt}$ 表示 $T^{ijk}{}_{rjt}$ 的缩并运算, 即对处于上、下同一哑标 j 求和的结果：$S^{ik}{}_{rt}=\sum\limits_j T^{ijk}{}_{rjt}$，指标 j 已经消失. 显然，张量 $\boldsymbol{S}$ 比原张量 $\boldsymbol{T}$ 的阶数降低两阶.

利用指标的升降和缩并，可以构成新的张量，例如，一个很重要的张量是 Riemann-Cristoffel 张量，它的分量是 $R_{ij\mu\nu}$，将指标 j 升为上角标，然后令 $j=\mu$，进行缩并运算，即：$R_{ij\mu\nu}\to R_{i\cdot\mu\nu}^{\cdot j\cdot\cdot}\to R_{i\cdot\mu\nu}^{\cdot\mu\cdot\cdot}\to R_{i\nu}$，$R_{i\nu}$ 是另一个重要的张量，称为 Riccii-Weyl 张量. 对此张量 $R_{i\nu}$ 进行缩并，就可以得到重要的曲率张量 $\boldsymbol{R}$(它与克氏符号密切相关)，由此可知，任意二阶张量进行缩并运算的结果是标量，称为二阶张量的迹 tr$\boldsymbol{D}$, 也就是标量矩阵的对角元素之和.

3.2 混合积

3 个矢量的混合积记为 $[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$，它是由 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 构成六面体的体积. 3 个基矢量的混合积记为 $[\boldsymbol{g}_1\ \ \boldsymbol{g}_2\ \ \boldsymbol{g}_3]$，有如下关系：$[\boldsymbol{g}_1\ \ \boldsymbol{g}_2\ \ \boldsymbol{g}_3]=\sqrt{g}$，$[\boldsymbol{g}^1\ \ \boldsymbol{g}^2\ \ \boldsymbol{g}^3]=1/\sqrt{g}$.

3.3 张量的对称

以二阶张量 (如应变率张量) 为例，若 $\boldsymbol{T}=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$ 是对称张量，即指标 i 和 j 对调，张量 $\boldsymbol{T}$ 不变，$T^{ij}=T^{ji}$，那么，$\boldsymbol{T}_+=\dfrac{1}{2}\left(T^{ij}+T^{ji}\right)\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$ 是对称张量，而 $\boldsymbol{T}_-=\dfrac{1}{2}\left(T^{ij}-T^{ji}\right)\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=\boldsymbol{0}$. 反之，如果张量 $\boldsymbol{T}$ 是反对称的 (如黏性流体中的旋转张量)，$T^{ij}=-T^{ji}$，则有 $\boldsymbol{T}_-=\dfrac{1}{2}\left(T^{ij}-T^{ji}\right)\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$，$\boldsymbol{T}_+=\dfrac{1}{2}\left(T^{ij}+T^{ji}\right)\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=\boldsymbol{0}$. 对称张量有 6 个独立分量，反对称张量有 3 个独立分量，二者合起来仍然有 9 个独立分量. 二阶张量是为描述流体微元的应力特性提出的，因此，二阶张量的特性必然反映了黏性流体的特性.

4 张量的导数运算

张量的运算是在矢量和矩阵运算的基础上发展起来的，继承和应用了矢量和矩阵在代数与微分运算中的许多规则，矢量是一阶张量，它的并矢就是二阶张量. 二阶张量运用最广，与矢量相比，自然有一些新的特点，张量在笛卡尔坐标系，仿射坐标系和曲线坐标系中的运算各有区别，特别是曲线坐标系，由于基矢量不再是常量，矢量和张量的导数运算，增加了克氏符号引起的附加项，在梯度、散度和旋度的运算中需要考虑附加项. 这里需要特别指出的是：协变导数是 Ricci 等先驱们定义的重大概念. 协变导数是协变微分学诞生的标志，是经典微分学与协变微分学的分水岭. 协变导数是梯度张量的分量，正因为是 “张量分量”，所以才有 “协变性”，才被称为 “协变导数”. 协变性在广义相对论中也具有及其重要的意义.

下面先讨论矢量，在此基础上，再介绍张量.

矢量 $\boldsymbol{V}$ 对坐标 x^j 的导数运算 (包括逆变导数和协变导数) 引起的附加项已如公式 (11) 所示，即 $v^i\varGamma_{ij}^k$ 或 $-v_i\varGamma_{ij}^k$. 如果用 $\nabla_j(\ )$ 表示协变导数，$\nabla^i(\ )$ 表示逆变导数，那么，$\dfrac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x^j}$ 的协变分量和逆变分量，

便可表示如下

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x^j}=\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+v^k\Gamma_k^{ij}\right)\boldsymbol{g}_i=\nabla_j v^i\boldsymbol{g}_i$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x^j}=\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}-v_k\Gamma_{ij}^k\right)\boldsymbol{g}^i=\nabla_j v_i\boldsymbol{g}^i$$

张量对坐标 x^i 的导数运算也有类似的表示式，以二阶张量 $T^{jk}\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k$ 为例，这时需要分别计入基矢量 $\boldsymbol{g}_j$ 和 $\boldsymbol{g}_k$ 各自的附加项，比矢量复杂一些

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^i}=\frac{\partial T^{jk}}{\partial x^i}\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k+T^{jk}\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}\boldsymbol{g}_k+T^{jk}\boldsymbol{g}_j\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^i}=$$

$$\frac{\partial T^{jk}}{\partial x^i}\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k+T^{jk}\underbrace{\Gamma_{ji}^l\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}_k}_{\text{附加项}}+T^{jk}\boldsymbol{g}_j\underbrace{\Gamma_{ki}^l\boldsymbol{g}_l}_{\text{附加项}}$$

显然，$\nabla_j(\ )$ 和 $\nabla^i(\ )$ 就是 Hamilton 微分算符 $\nabla(\ )$ 的协变和逆变导数分量. 在曲线坐标系中，$\nabla(\ )$ 的定义与笛卡尔坐标系类似：也是一个矢量，只是基矢量不同，如下式所示

笛卡尔坐标系

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

曲线坐标系

$$\nabla=\boldsymbol{g}^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\boldsymbol{g}^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\boldsymbol{g}^3\frac{\partial}{\partial x^3}$$

在与矢量或张量的并矢、叉积 ($\times$) 运算中，分为从左侧或右侧作用于矢量或张量，即左侧形式：$\nabla(\ )=\boldsymbol{g}^i\dfrac{\partial(\ )}{\partial x^i}$，右侧形式：$(\ )\nabla=\dfrac{\partial(\ )}{\partial x^i}\boldsymbol{g}^i$. 例如，$\nabla\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\boldsymbol{v}=\nabla_i v_j\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$，而 $\boldsymbol{v}\nabla=\nabla_j\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$，$\nabla\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{v}\nabla$；$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\nabla$；$\nabla\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\times\nabla$. 这些结果同样适用于张量 $\boldsymbol{T}$. 因此，理解和掌握了上述内容，已足够理解和处理包括张量在内的更多的微分运算，就不再详述了. 读者可以将此作为练习，检验自己对本文的理解和掌握程度.

5 结束语

如何理解张量呢？可以说，它是作用力与物体之间的一种整体描述. 矢量是作用于一个点的情形，只需要 3 个分矢量即可；张量是微元体受力作用时的整体描述，微元体是宏观小微观大的物理体元，至少需要 9 个分矢量描述，它们都是在笛卡尔直角坐标系的框架下的数学描述. 因为，受力作用的物体处于小形变状态，如流体力学，它并不特别关注流体的形变问题，而是着重研究在压力、应力和惯性力共同作用下，流速变化时，流体状态的改变，这从流体力学的基本方程就可以看出. 当然，流体微团受力作用产生形变也是局部的小变形，因此，处理流体力学问题一般应用笛卡尔坐标系中的张量分析即可. 而像弹塑性形变，或者桁架、薄壳等等，在超载荷作用下的结构大形变问题，需要在曲线坐标系中进行张量分析，基矢量已不再是常量，随坐标线上的不同点而变化，因此，对张量的微分运算就要计入基矢量的变化，也就是 Christoffel 符号代表的增量. 可见，学习张量，不在于掌握了多少系统的张量知识，而在于理解它能体现什么样的物理含义，是否能将一个物理思想转变为一个恰当的张量数学描述. 虽然物理规律与坐标系的选择无关，但是，一个恰当的坐标系能使数学描述凸显研究对象的本质和特性：牛顿的经典力学符合伽利略坐标系，狭义相对论符合洛伦兹坐标系，而广义相对论则符合闵柯夫斯基 (Minkowski) 坐标系，说明物理规律与坐标系的冲突是孕育新发现的突破口. 就连续介质力学而言，当客体受多个施加于不同点的力的作用时，它的状态由这些力的综合效果 (在坐标系中各个分量的加法或乘法运算) 来确定，状态的改变，同样由其综合效果的改变 (微分) 确定，这个综合效果的数学表示就是张量和它的微分运算，常用的是三维空间或四维空间中的二阶张量，因此，张量运算是非常重要的数学工具，应当学习、理解和掌握它的基本内容. 现在，张量的计算已有专用软件 Matlab 和 Mathematica 可资利用 [16].

在这里，需要特别指出的是，由于爱因斯坦在研究广义相对论时，采用张量分析这一数学工具，成功建立了弯曲时空中的引力理论，极大地推动了张量理论的发展. 但是，正如爱因斯坦所说：“自从数学家入侵了相对论以来，我本人就再也不能理解相对论了”(Since the mathematicians have invaded the theory of relativity, I do not understand it myself anymore). 对于数学家，追求张量理论的严谨和完美；对于物理学家，它只是一个有效的工具，在广义相对论中，空间坐标 $x^i(i=1,2,3)$ 以及与时间 t 相关的坐标 $x^0=ct$(c 为真空中的光速) 组成的四维闵柯夫斯基度规张量 $\mathrm{d}s^2=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\quad(i,j=0,1,2,3)$，刻画了引力场的几何特性，同时，自由质点在引力场中的运动轨迹是如下的测地线或短程线 (也称作 “世界线”，可以由 $\mathrm{d}s$ 的变分得出)

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma_{kj}^i\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}=0$$

式中的克氏符号 Γ_{kj}^{i} 可以通过度规张量 $\boldsymbol{g}$ 计算

$$\Gamma_{kj}^{i}=\frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{js}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{s}}\right)$$

有了这些知识，就可以进一步学习和阅读与相对论有关的专业书籍，理解爱因斯坦是如何通过张量分析得到引力场的张量方程的，感受他的数学方法的简单、和谐和美的统一 [17].

注释：由于张量分析仍然处于发展之中，表示符号的多变、不规范也是造成学习张量的困难之一，例如，变量对坐标的微分，一般有这样一些符号：$\partial_i A\leftrightarrow\partial_{,i}A\leftrightarrow A_{,i}\rightarrow\dfrac{\partial A}{\partial x^i}$，也就是说，$\partial_i A$，$\partial_{,i}A$，$A_{,i}$ 都表示 A 对坐标 x^i 或 x_i 的偏微分运算 $\dfrac{\partial A}{\partial x^i}$ 或 $\dfrac{\partial A}{\partial x_i}$；再如 v 的逆变分量的协变导数，通常的表示方式是：$\nabla_j v^i=\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}+v^k\Gamma_{kj}^{i}$，物理意义很清楚. 可是也有几种不同的表示符号，如：$\nabla_j v^i\equiv v_{;j}^{i}\leftrightarrow v^i|_j\leftrightarrow v_{|j}^{i}$. 这样，$\nabla_j v^i=\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}+v^k\Gamma_{kj}^{i}$ 就表示成 $v_{;j}^{i}$；$v^i|_j$ 或 $v_{|j}^{i}$. 这种过于简化的表示，失去了直观明显的物理意义，还有用 $\begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix}$ 代替具有纪念意义的符号 Γ_{kj}^{i}，学习和应用张量时，需要特别注意.

参 考 文 献

1 Simmonds JG. A Brief on Tensor Analysis (2nd edn). 北京：世界图书出版公司，2012
2 中国的百科全书. 数学卷. 北京：中国的百科全书出版社,1988
3 中国的百科全书. 物理卷. 北京：中国的百科全书出版社,1988
4 Pais A. 爱因斯坦传. 方在庆，李勇译. 北京：商务印书馆，2004
5 吕盘明. 张量算法简明教程. 合肥：中国科学技术大学出版社，2008
6 张若京. 张量分析简明教程. 上海：同济大学出版社，2010
7 黄克智，薛明德，陆明万. 张量分析. 北京：清华大学出版社，2009
8 郭仲衡. 张量 (理论和应用). 北京：科学出版社，1987
9 谢多夫 ЛИ 著. 李植译. 连续介质力学 (第一卷)(第 6 版). 北京：高等教育出版社，2007
10 冯元帧, 葛东云，陆明万. 连续介质力学初级教程 (第 3 版). 北京：清华大学出版社，2009
11 黄宝宗. 张量和连续介质力学. 北京：冶金工业出版社，2012
12 米先柯 AL, 福明柯 AT 著. 微分几何与拓扑学简明教程. 张爱和译. 北京：高等教育出版社，2014
13 Kundu PK, Cohen IM, Dowling DR. Fluid Mechanics (5th edn). Amsterdan: Elsevier, 2012
14 Pope SB. Turbulent Flows. 北京：世界图书出版公司，2000
15 赵松年，于允贤. 湍流问题十讲 —— 理解和研究湍流的基础. 北京：科学出版社，2016
16 余天庆，熊睿. 张量 —— 分析概要及演算. 北京：清华大学出版社，2014
17 范天佑. 弱引力场中 Einstein 引力波简介. 力学与实践, 2016, 38(3): 353-355

(责任编辑：胡 漫)

圆薄板轴对称弯曲问题的基本方程讨论

曹天捷 1)

(中国民航大学机场学院, 天津 300300)

摘要 首先通过级数展开和求极限运算的方法，确定了等厚度圆薄板轴对称大/小挠度问题的弯曲微分方程在圆心处的表达式. 其次，根据轴对称问题的特点，推导出了实心圆薄板在圆心处应满足边界条件的数学表达式，使圆薄板轴对称大/小挠度问题的弯曲微分方程应满足的边界条件达到了应有的数量. 本文工作进一步完善了圆薄板轴对称弯曲问题的微分方程形式和边界条件，从而使我们可以利用成熟的微分方程数值解法，对具有较复杂载荷的实心圆薄板轴对称弯曲微分方程进行数值求解.

关键词 轴对称圆薄板，弯曲微分方程，边界条件，数值解法

中图分类号：O343 **文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-15-123

2015–05–19 收到第 1 稿，2015–08–23 收到修改稿.

1) 曹天捷，教授，博士，主要从事弹塑性力学研究. E-mail: caotianjie@sohu.com

引用格式：曹天捷. 圆薄板轴对称弯曲问题的基本方程讨论. 力学与实践, 2016, 38(4): 442-448

Cao Tianjie. Discussions on the fundamental equations for axisymmetric thin circular plates. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(4): 442-448