

# 基于残余力向量的桁架梁损伤识别研究<sup>1)</sup>

孙增寿<sup>2)</sup> 王 冉

(郑州大学土木工程学院, 450001, 郑州)

**摘要** 定义残余力向量为结构的损伤指标, 给出了根据结构特征值方程详细推导残余力向量的理论过程. 并以简支桁架梁为研究对象, 利用残余力向量进行桁架梁的局部损伤识别, 成功识别出桁架梁的单一和多处局部损伤; 同时考虑实际测量中存在噪声影响, 引入了损伤定位指数, 分析了噪声对损伤识别精度的影响. 理论分析和数值仿真结果表明, 残余力向量能有效识别桁架梁的局部中小损伤, 且有较好的抗噪性.

**关键词** 残余力向量, 损伤识别, 刚度连通矩阵, 抗噪分析

中图分类号: TU323.4, TH165.3 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-16-018

## DAMAGE RECOGNITION OF TRUSS STRUCTURE BASED ON RESIDUAL FORCE VECTOR<sup>1)</sup>

SUN Zengshou<sup>2)</sup> WANG Ran

(School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

**Abstract** In this paper, we define the residual force vector as a structure damage index, and give the detailed theoretical derivation for residual force vector according to the structure eigenvalue equation. Taking a simple supported truss as a research target, we carry the local damage identification of truss by use of residual force vector, and identify the single and multiple local damage of truss structure. We further explore the impact of noise on the accuracy of damage identification by introducing damage localization index and considering the existence of noise in actual measurements. Theoretical analysis and numerical results show that the residual force vector can identify local small damage of the truss structure beam effectively and have good noise immunity.

**Key words** residual force vector, damage identification, stiffness connectivity matrix, noise immunity

为了保障土木工程结构的安全, 近年来结构损伤识别和健康监测已成为土木工程领域的研究热点. 基于结构动力特性的损伤识别是研究较多的一种方法, 其中残余力向量法具有概念明确、测试便捷、可实时监测的优点<sup>[1-9]</sup>. 2004年 Liu等<sup>[10]</sup>和刘济科等<sup>[11]</sup>提出了基于残余力向量损伤识别的两步法, 先用单元的损伤定位标准值来判断损伤单元, 再采用最佳逼近向量法精确定位

损伤程度; 并于 2006 年分析了模型缩聚给残余力向量法造成的误差, 对残余力向量法进行了改进<sup>[12]</sup>. 2009 年何伟等<sup>[13]</sup>为降低自由度凝聚及测量等因素带来的误差, 提出了一种改进的残余力向量: 先用改进的残余力向量确定可能损伤单元, 再用筛选法计算单元损伤程度. 2011 年 Zhao等<sup>[14]</sup>对不完全测量的模态数据采用振型扩展方法, 克服了残余力向量识别结构损伤过程中测试信

2016-01-13 收到第 1 稿, 2016-03-04 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (50878198).

2) 孙增寿, 教授, 主要从事结构损伤检测和结构监测研究. E-mail: zengshou@zzu.edu.cn

引用格式: 孙增寿, 王冉. 基于残余力向量的桁架梁损伤识别研究. 力学与实践, 2016, 38(5): 526-530

Sun Zengshou, Wang Ran. Damage recognition of truss structure based on residual force vector. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(5): 526-530

息不完备的影响. 2014 年毛卓能<sup>[15]</sup>在改进的残余力向量损伤识别法中引入子结构概念, 对一平面桁架结构进行 3% 噪声条件下 53% 的重度损伤识别的数值模拟. 但现有研究仅着眼于单一损伤, 且假定的损伤程度比较大, 而且对噪声影响的分析和研究较少. 为此, 本文采用改进的新残余力向量法, 对桁架单一和多处局部损伤进行识别研究, 同时分析了较高噪声水平对早期轻度损伤识别精度的影响.

## 1 基于残余力向量的损伤识别法

### 1.1 残余力方程

假设结构损伤不改变结构质量, 对于忽略阻尼的多自由度损伤结构有

$$(\mathbf{K}_d - \lambda_{dj} \mathbf{M}) \phi_{dj} = 0 \quad (1)$$

其中  $\mathbf{K}_d$ ,  $\lambda_{dj}$  和  $\phi_{dj}$  分别是损伤后结构的整体刚度矩阵、第  $j$  阶特征值、第  $j$  阶特征向量;  $\mathbf{M}$  为该结构有限元模型的整体质量矩阵.

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_u - \Delta \mathbf{K} \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{K}_u$  是完好结构整体刚度矩阵,  $\Delta \mathbf{K}$  是由损伤引起的结构整体刚度矩阵变化量.

将式 (2) 代入式 (1) 得

$$(\mathbf{K}_u - \lambda_{dj} \mathbf{M}) \phi_{dj} = \Delta \mathbf{K} \phi_{dj} \quad (3)$$

由于方程 (3) 左边已知, 并记  $\mathbf{b}_j = (\mathbf{K}_u - \lambda_{dj} \mathbf{M}) \phi_{dj}$  为第  $j$  阶残余力向量, 则式 (3) 可写为

$$\Delta \mathbf{K} \phi_{dj} = \mathbf{b}_j \quad (4)$$

方程 (4) 即为残余力方程.

### 1.2 损伤矩阵

对多自由度体系, 结构整体刚度矩阵  $\mathbf{K}$  表示为<sup>[16]</sup>

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T \quad (5)$$

损伤后结构整体刚度矩阵变化量  $\Delta \mathbf{K}$  可表示为

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{P} \mathbf{A}^T \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{A}$  为结构刚度连通矩阵,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$ , 向量  $\mathbf{a}_i$  为第  $i$  个单元刚度参数  $k_i$  的刚度连通向量,  $n$  为结构有限元模型的单元总数, 无论有无损伤, 结构刚度连通矩阵  $\mathbf{A}$  不变.  $\mathbf{P} = \text{diag}(k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n)$ ,  $\Delta \mathbf{P} = \text{diag}(\Delta k_1 \ \Delta k_2 \ \cdots$

$\Delta k_n)$ ,  $k_i$  为多自由度结构第  $i$  个刚度参数,  $\Delta k_i$  为第  $i$  个刚度参数的改变量. 记  $\alpha_i = \Delta k_i / k_i$  为多自由度结构第  $i$  个单元损伤参数,  $\alpha_i \in [0, 1]$ , 如果单元未损伤, 则相应单元  $\alpha_i$  的值为 0; 如果该单元完全损伤, 则相应值为 1, 由此易知,  $\Delta \mathbf{P}$  中的非零元素数目即结构中的损伤数目, 同时也等于  $\Delta \mathbf{P}$  的秩.

因为  $\Delta \mathbf{P}$  是对角矩阵, 根据式 (6),  $\Delta \mathbf{K}$  中元素的值可以写为

$$\Delta K_{ij} = [A_{i1} A_{j1} \ A_{i2} A_{j2} \ \cdots \ A_{in} A_{jn}] \begin{Bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \cdots \\ \Delta k_n \end{Bmatrix} \quad (7)$$

根据整体刚度矩阵  $\mathbf{K}$  中元素对各单元刚度变化的敏感关系, 可得

$$\Delta K_{ij} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial k_\beta} (\Delta k_\beta) \quad (i, j, \beta = 1, 2, \cdots, n) \quad (8)$$

由式 (7) 和式 (8) 可得

$$A_{i\beta} A_{j\beta} = \frac{\partial k_{ij}}{\partial k_\beta} \quad (i, j, \beta = 1, 2, \cdots, n) \quad (9)$$

从式 (9) 求出  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \cdots, n$ ), 即得到刚度连通矩阵  $\mathbf{A}$ .

如果实测中共得到  $m$  个结构模态, 对每一个测量模态, 可得到如式 (4) 的一个表达式, 将各表达式合并起来写成矩阵形式为

$$\Delta \mathbf{K} \Phi = \mathbf{B} \quad (10)$$

式中

$$\Phi = [\phi_{d1} \ \phi_{d2} \ \cdots \ \phi_{dm}]$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_m]$$

将式 (6) 代入式 (10) 得

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{P} \mathbf{A}^T \Phi = \mathbf{B} \quad (11)$$

在式 (11) 两边左乘  $\Phi^T$  得

$$\Phi^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{P} \mathbf{A}^T \Phi = \Phi^T \mathbf{B} \quad (12)$$

令  $\mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D} = \Phi^T \mathbf{B}$ , 则得到

$$\mathbf{C} \Delta \mathbf{P} \mathbf{C}^T = \mathbf{D} \quad (13)$$

其中  $m$  阶方阵  $D$  称为损伤矩阵, 其特征向量分解为

$$D = U\Lambda U^T \tag{14}$$

其中,  $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n)$

将式 (14) 代入式 (13) 中得到

$$C\Delta PC^T = U\Lambda U^T \tag{15}$$

从式 (15) 可以看出, 对角矩阵  $\Delta P$  的秩应当和矩阵  $\Lambda$  的秩相等, 因此可以通过矩阵  $\Lambda$  对角元素中非零特征值个数预先判定结构中损伤单元的数目.

### 1.3 损伤的定位和定量

因为  $U^{-1} = U^T$ , 式 (15) 等同于

$$\Lambda = U^T C\Delta PC^T U \tag{16}$$

令

$$E = U^T C = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] \tag{17}$$

式中, 矩阵  $E$  称为损伤定位矩阵, 矩阵的每一列称为损伤定位向量, 对应于结构中的一个单元, 当单元损伤后, 相关列中与  $\Lambda$  对角线上零元素对应的元素将全部为零. 因此可以通过矩阵  $E$  来定位结构中的损伤单元.

在确定损伤所在单元后, 可以进一步获知单元损伤程度. 假设结构中有  $q$  个损伤单元, 对应的损伤向量分别为  $e_1, e_2, \dots, e_q$ , 这些向量可以组集为  $m \times q$  阶的矩阵  $S$

$$S = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_q] \tag{18}$$

矩阵  $S$  中将有  $m - q$  行零元素, 对应这  $m - q$  行, 从损伤定位矩阵中提取  $(m - q) \times N$  阶矩阵  $E^*$ , 设各单元损伤定位指数为矩阵  $E^*$  各列元素绝对值之和, 损伤指数为零则说明相应单元存在损伤.

此时, 式 (16) 可以缩减成

$$\Lambda = S\Delta P^* S^T \tag{19}$$

式中,  $\Delta P^* = \text{diag}(\Delta k_1 \ \Delta k_2 \ \dots \ \Delta k_q)$ , 将矩阵  $S$  中元素全部为零的行移去,  $m \times q$  阶矩阵将缩减成  $q \times q$  阶矩阵  $S^*$ ; 相应地, 也将  $\Lambda$  中对角线上元素为零的行列移去,  $m$  阶方阵  $\Lambda$  将缩减成  $q$  阶方阵  $\Lambda^*$ . 这样, 式 (19) 变成

$$\Lambda^* = S^* \Delta P^* S^{*T} \tag{20}$$

则损伤程度矩阵为

$$\Delta P^* = (S^*)^{-1} \Lambda^* (S^{*T})^{-1} \tag{21}$$

### 1.4 噪声影响分析

在实际应用中, 结构的特征值往往通过振动测试获得, 测量数据中不可避免地存在噪声影响. 为此, 采用在理论分析得到的模态参数上加入噪声以检验损伤识别方法的适用性. 噪声公式为 [17-18]

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_j (1 + \gamma_i^\phi \rho^\phi) \tag{22}$$

$$\bar{\phi}_{ij} = \phi_{ij} (1 + \gamma_i^\phi \rho^\phi |\phi_{\max,j}|) \tag{23}$$

其中  $\bar{\lambda}_j$  和  $\lambda_j$  分别为第  $j$  阶频率的模拟值和精确值,  $\bar{\phi}_{ij}$  和  $\phi_{ij}$  分别为第  $j$  阶振型的第  $i$  个自由度处的含噪声值和精确值,  $\gamma_i^\phi$  为均值为 0 方差为 1 的随机数,  $\rho^\phi$  为噪声水平,  $\phi_{\max,j}$  为第  $j$  个振型中最大的元素值.

经分析, 在式 (15) 中, 不考虑噪声影响时, 可通过矩阵  $\Lambda$  对角元素中非零特征值个数判定结构中损伤单元的数目. 对于含有测量噪声的数据而言, 则可由矩阵  $\Lambda$  中相对绝对值很大的元素个数判定损伤单元的个数. 损伤指数近似为零的单元即为可能损伤单元.

## 2 数值模拟

为了验证所提出的损伤识别方法, 下面对图 1 所示简支平面桁架梁模型进行损伤检测和识别. 桁架梁上下弦杆和竖直腹杆长 0.5m, 斜腹杆长 0.707m. 各杆件均由两根等边角钢 2 $\angle$ 50 $\times$ 4 焊接组合而成, 材料密度  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ , 弹性模量  $E = 207 \text{ GPa}$ . 节点编号为 1~12, 单元编号为 ①~⑳. 桁架梁在节点 1 处为固定铰支座, 在节点 12 处为滑动铰支座. 结构节点编号和自由度编号之间的对应关系如表 1 所示, 第 I 行为节点编号, 第 II 行为自由度编号.

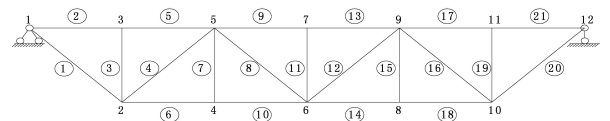


图 1 桁架结构

表 1 节点和自由度编号之间的对应关系

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
II	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

通过式 (9) 求得  $21 \times 21$  阶刚度连通矩阵  $\mathbf{A}$ , 限于篇幅, 仅取部分列于下式

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.0681 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1.0681 & 0 & -1.7963 & \cdots & 0 \\ 0 & 1.7963 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1.7963 \end{bmatrix} \times 10^4$$

因桁架在节点力作用下, 各杆件主要以拉(压)受力为主, 所以, 将杆件截面削弱来模拟结构损伤, 各损伤工况如表 2 所示.

表 2 损伤工况列表

损伤工况	工况 1	工况 2	工况 3	工况 4	工况 5
损伤数量	单处损伤		两处损伤		
杆件类型	下弦杆	竖腹杆	斜腹杆	上弦杆	下弦杆 + 腹杆
损伤位置	单元 10	单元 7	单元 4	单元 5	单元 10+ 单元 4
损伤程度	10%	10%	10%	10%	10%+20%

### 2.1 单一局部小损伤识别

对表 2 四种单一损伤情况, 以工况 1 单元 10 的损伤识别为例予以说明. 令单元 10 截面刚度降低 10%, 通过上面提出的方法和程序识别损伤位置及程度. 采用前 2 阶模态数据, 求得损伤矩阵  $\mathbf{D}$  的特征值  $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.6017 \end{bmatrix} \times 10^4$$

可以看出在  $\mathbf{\Lambda}$  矩阵的对角线元素上, 有 1 个明显非零元素, 因此可知结构中存在 1 处损伤. 进一步由式 (17) 求出损伤定位矩阵

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 10 & \cdots & 21 \\ -33.6490 & \cdots & -0.0000 & \cdots & 64.3364 \\ -367.5079 & \cdots & 400.2070 & \cdots & -132.8145 \end{bmatrix}$$

根据上面提出的理论, 可判断出单元 10 损伤, 损伤程度为  $\alpha_{10} = (\mathbf{S}^*)^{-1} \mathbf{\Lambda}^* (\mathbf{S}^{*T})^{-1} = (400.2070)^{-1} \times 1.6017 \times 10^4 \times (400.2070)^{-1} = 0.1000$ , 与实际的损伤位置和程度相符. 对其他 3 个单一损伤工况, 均能精确识别出损伤位置及程度.

### 2.2 两个损伤的识别

对表 2 工况 5, 令单元 4 杆件截面面积削弱 20%, 单元 10 杆件截面面积削弱 10%. 取前 4 阶

模态数据, 求得损伤矩阵  $\mathbf{D}$  的特征值  $\mathbf{\Lambda}$  如下, 在损伤矩阵  $\mathbf{D}$  的特征值  $\mathbf{\Lambda}$  中有两个非零特征值, 说明存在两个单元体损伤. 对应的损伤定位指数如图 2 所示, 可以明显看出单元 4 和单元 10 的损伤定位指数低于其他单元, 由此可以判断出单元 4 和单元 10 为损伤单元. 进一步由式 (21) 可分别求得损伤程度为:  $\alpha_4 = 0.2000$ ,  $\alpha_{10} = 0.1000$ , 与假定损伤位置和程度完全相符.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 4.9737 & & & 0 \\ & 1.1181 & & \\ & & -0.0000 & \\ 0 & & & 0.0000 \end{bmatrix} \times 10^5$$

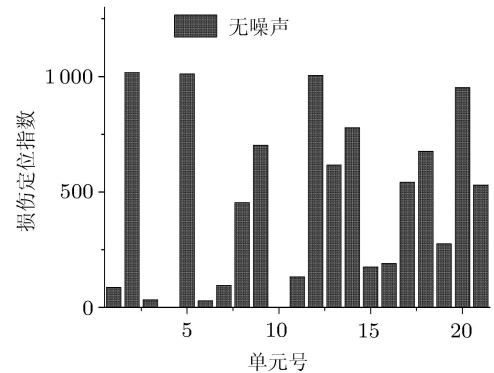


图 2 两个单元损伤时定位指数

### 2.3 实用性分析

为了研究残余力向量损伤识别法的实用性, 考虑实测数据中的噪声影响, 按式 (22) 和式 (23) 在理论分析模态参数中加入 5% 的噪声. 以单元 4 损伤 20%、单元 10 损伤 10% 的工况 5 进行说明, 特征值  $\mathbf{\Lambda}_{5\%}$  (下标代表噪声水平) 为

$$\mathbf{\Lambda}_{5\%} = \begin{bmatrix} 4.9465 & & & 0 \\ & 1.1726 & & \\ & & 0.0282 & \\ 0 & & & 0.0109 \end{bmatrix} \times 10^5$$

与最大值的比值为  $1.1726/4.9465 \approx 0.2371$ ,  $0.0282/4.9465 \approx 0.0006$ ,  $0.0109/4.9465 \approx 0.0002$ , 显然前两个特征值比后两个特征值要大得多. 所以, 在 5% 的噪声水平下, 仍可以从损伤矩阵的特

征值  $\Lambda$  中判别出有两个单元发生损伤. 进一步可得到 5% 噪声水平下结构的损伤指数, 如图 3 所示. 由图 3 可以看出, 单元 3, 4, 10 的损伤定位指数较低, 按穷举法分 3 种情况讨论: 情况 1 是单元 3 和单元 4 损伤; 情况 2 是单元 3 和单元 10 损伤; 情况 3 是单元 4 和单元 10 损伤. 在 3 种情况下按式 (21) 求得的损伤程度依次为  $\alpha_3 = 1.1028 > 1$ ,  $\alpha_4 = 0.2928$ ;  $\alpha_3 = 2.4347 > 1$ ,  $\alpha_{10} = 0.3703$  和  $\alpha_4 = 0.2020$ ,  $\alpha_{10} = 0.1031$ , 在第 1 种情况和第 2 种情况中出现不合理损伤程度 (损伤程度超出 100%), 只有情况 3 符合要求, 也就是说单元 4 和单元 10 存在损伤, 损伤程度分别为 20.2% 和 10.3%. 所以, 在 5% 噪声水平下, 仍然可成功识别出损伤位置和损伤程度, 损伤程度识别误差仅有 1.0% 和 3.0%.

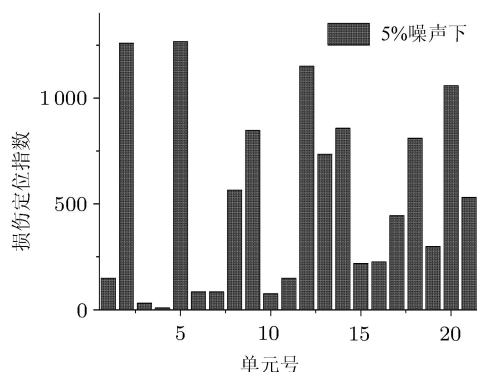


图 3 5% 噪声下两个单元损伤时定位指数

### 3 结论

通过理论研究和数值模拟分析, 可得出下列结论:

- (1) 对桁架梁结构, 改进的新残余力向量法能准确识别出单处或多处损伤的损伤位置和损伤程度;
- (2) 改进的新残余力向量法的鲁棒性较好, 对实际结构损伤检测, 在较高噪声水平下仍能较好地识别出损伤位置和损伤程度;
- (3) 针对实测特征参数在噪声影响下不够精确, 较难有效识别结构损伤程度的问题, 也作了一些探索, 相关工作将在以后进一步研究.

### 参考文献

- 1 王中要, 郭秀文, 王珂等. 用残余力向量进行连续梁损伤诊断. 昆明理工大学学报, 2000, (5): 64-67
- 2 Fukunaga H, Kameyama M, Ogi Y. Damage identification of laminated composite structures based on dynamic residual forces. *Advanced Composite Materials*, 2001, 10(2-3): 209-218
- 3 邹万杰, 瞿伟廉, 罗臻. 基于改进残余力向量法的桁架结构损伤诊断. 力学与实践, 2009, 31(4): 41-44
- 4 李范春, 李成, 杜玲. 结构损伤识别的残余向量法及数值仿真. 哈尔滨工业大学学报, 2009, (3): 250-253
- 5 韦灼彬, 吴森. 基于残余力向量法的结构损伤位置识别. 中外公路, 2011, (1): 177-180
- 6 蔡小双, 纪国宜. 基于残余力向量法的桁架结构损伤识别. 工业建筑, 2013, (s1): 211-213
- 7 孟志飞. 基于残余力向量的结构损伤识别方法研究. [硕士论文]. 西安: 西安电子科技大学, 2014
- 8 Zou WJ, Zhang YX, Li CG. Study on truss structure damage identification base on residual force vector. *Applied Mechanics and Materials*, 2014, 477-478: 759-764
- 9 张干, 熊洪峰, 张宝华等. 基于残余力向量法的基桩损伤诊断. 水运工程, 2015, (6): 61-64
- 10 Liu J, Yang Q. A two-step method for structural damage identification based on residual force vector. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2004, 43(4): 1-4
- 11 刘济科, 杨秋伟. 基于残余力向量的结构损伤识别两步法. 中山大学学报 (自然科学版), 2004, (4): 1-4
- 12 杨秋伟, 刘济科. 损伤识别一种改进的残余力向量法. 固体力学学报, 2006, (1): 83-85
- 13 何伟, 陈淮, 王博等. 运用改进残余力向量法的结构损伤识别研究. 振动、测试与诊断, 2009, (4): 379-382
- 14 Zhao JH, Zhang L. A method for structural damage identification using residual force vector and mode shape expansion. International Conference on Multimedia Technology, Hangzhou, 2011
- 15 毛卓能. 基于残余力向量的平面桁架结构损伤识别研究. [硕士论文]. 保定: 河北大学, 2014
- 16 Doebling SW. Minimum-rank optimal update of elemental stiffness parameters for structural damage identification. *AIAA Journal*, 1996, 34(12): 2615-2621
- 17 杨秋伟. 基于模型修正的结构损伤识别方法研究. [博士论文]. 广州: 中山大学, 2006
- 18 Shi ZY, Law SS. Structural damage detection from model strain energy change. *Journal of Engineering Mechanics*, 2000, 126(12): 1216-1231

(责任编辑: 刘希国)