

华南理工大学
2014年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(请在答题纸上做答, 试卷上做答无效, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 数学分析

适用专业: 基础数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 应用数学, 运筹学与控制论

共2页

1. (12分) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x^2 - x \tan x}{x^2 e^x - 3 \cos 2x + 3}.$$

2. (12分) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(n+1)!}}.$$

3. (12分) 证明不等式: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ ($x > 0$).

4. (12分) 求定积分

$$\int_0^1 \left[\frac{x(1+x)}{\sqrt{1+2x}} + \ln x \right] dx.$$

5. (12分) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$ 的收敛区间, 并说明其在收敛区间端点的敛散性.

6. (12分) 求曲面积分

$$\iint_S z dx dy,$$

其中 S 是曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 方向为外侧.

7. (13分) 设 $x_1 = a > 0, x_n = \sqrt{3 + x_{n-1}}, n = 2, 3, \dots$, 试证 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

8. (13分) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ 之和.

9. (13分) 证明 $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 一致连续.

10. (13分) 设 $f(x, y)$ 在 $[a, +\infty; c, d]$ 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛, 证明

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

11. (13分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶连续导数, 试证存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi)$.

12. (13分) 设 $f(x, y)$ 在区域 G 内对 x 和 y 分别连续, 且对 x 单增, 试证 $f(x, y)$ 在 G 内连续.