864

华南理工大学
2016年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：高等代数

适用专业：基础数学, 应用数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 运筹学与控制论

1. (15分) 设$f(x)$和$g(x)$都是数域P上的次数不小于1的多项式.

证明: $(f(x),g(x))=1$当且仅当存在唯一的多项式$u(x),v(x)\in P[x]$使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$, 这里$\partial(u(x))<\partial(g(x))$且$\partial(v(x))<\partial(f(x))$.

2. (15分) 设$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$, ε_0, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}$为全部的$n$次单位根, 证明:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix}=\prod_{i=0}^{n-1}f(\varepsilon_i).$$

3. (20分) 设A为n阶方阵, 满足$A^2=A$. 证明:

(1) $r(A)+r(A-E)=n$;

(2) $r(A^k)+r(A-E)^{\ell}=n$, 这里k,ℓ为任意自然数.

4. (15分) 设$\ell_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n$, $i=1,2,\ldots,p+q$, 这里$c_{ij}\in\mathbb{R}$. 试证明实二次型$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\ell_1^2+\ell_2^2+\cdots+\ell_p^2-\ell_{p+1}^2-\cdots-\ell_{p+q}^2$的正惯性指数$\leq p$, 负惯性指数$\leq q$.

5. (15分) 对λ 的不同的值判断下述方程组是否有解？当有解时求出全部的解.

$$\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$$

6. (15分) 设矩阵$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 求$A^{2016}$.

7. (20分) 设$V = \mathbb{R}_n[x]$, 若$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i \in V$, 规定内积$(f(x), g(x)) = \sum_{i=0}^n a_i b_i$, 则$V$为欧氏空间. 令

$$W = \{f(x) \in V \mid f(1) = 0\}.$$

(1) 证明W为V 的子空间，决定其维数并举出它的一组标准正交基;

(2) 举出$W^{\perp}$的一组标准正交基.

8. (20分) 设$\mathbb{R}^2$中的线性变换$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1 = (1,2)$, $\varepsilon_2 = (2,1)$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 线性变换$\mathscr{B}$在基$\eta_1 = (1,1), \eta_2 = (1,2)$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) 求$\mathscr{A} + \mathscr{B}$在基$\eta_1, \eta_2$下的矩阵;

(2) 求$\mathscr{A}\mathscr{B}$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2$下的矩阵;

(3) 设$\alpha = (3,3)$, 求$\mathscr{A}\alpha$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2$下的坐标;

(4) 求$\mathscr{B}\alpha$在基η_1, η_2下的坐标.

9. (15分) 设A, B均为n阶正交矩阵，满足$|A| + |B| = 0$. 证明: $|A + B| = 0$.