

华南理工大学
2015 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(试卷上做答无效, 请在答题纸上做答, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 系统工程基础综合

适用专业: 系统分析与集成; 系统工程

共 2 页

一、(21 分) 求解如下微分方程:

$$(1) \quad (x^2 - 1)(y^2 + 1)dx + xydy = 0$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x - y}$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - x^3}{2y}$$

二、(16 分) 考虑微分方程组:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) 求其通解 $x(t)$, $y(t)$;

(2) 计算 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ 。

三、(18 分) 求非齐次微分方程

$$y''' - 2y'' - 3y' + 10y = x + e^{-2x}$$

的通解。

四、(20 分) 求解微分方程组

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

五、(20分) 按要求解下列各题:

(1) 假设事件 A 与事件 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 试证明:

$$p(C) \geq p(A) + p(B) - 1$$

(2) 假设某袋中共有 9 个球, 其中 4 个白球, 5 个黑球, 现从中任取两个球, 试求下列事件发生的概率:

(i) 两个球均为白球;

(ii) 两个球中一个是白球, 另一个是黑球。

六、(15分) 设二维随机变量 (ξ, η) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

试求: (1) ξ 和 η 的边缘密度函数 $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$;

(2) $\zeta = 2\xi - \eta$ 的密度函数 $p_\zeta(z)$;

$$(3) P\left\{\eta \leq \frac{1}{2} \mid \xi \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

七、(20分) 若随机变量 ξ 服从几何分布: $P\{\xi = k\} = p(1-p)^k$, ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$),

其中, $0 < p < 1$ 。求 ξ 的特征函数 $f(t)$, 数学期望 $E(\xi)$, 方差 $D(\xi)$ 。

八、(20分) 设 $\{\xi_n\}$ 为独立随机变量序列, 对每个 $k \geq 1$, ξ_k 服从区间 $(-\sqrt{k}, \sqrt{k})$ 上的均匀分布。

(1) 写出 ξ_k 的密度函数 $p_k(x)$;

(2) 证明: $\{\xi_n\}$ 满足中心极限定理。