

华南理工大学
2015年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(请在答题纸上做答, 试卷上做答无效, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 数学分析

适用专业: 基础数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 应用数学, 运筹学与控制论

共3页

1. (12分) 设

$$f(x) = \frac{2 \sin(x-2) + ([x]-1)x^2 - 2([x]+1)x + 8}{(x-2)^2},$$

求 $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x)$.

2. (12分) 在曲线 $x = 2t^2$, $y = 3t^2$, $z = 2t$ 上确定点, 使在该点处的切线平行于 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 在点 $(1, -1, \sqrt{2})$ 处的切平面.

3. (12分) 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x + 1, & \text{当 } x > 0, \\ 1, & \text{当 } x = 0, \\ \frac{2(1 - \cos x)}{x^2}, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

研究其导数的连续性.

4. (12分) 设 l 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$. 从 x 轴正向看去, 按逆时针方向, 计算曲线积分

$$\int_l 2y dx + 3z dy + 4x dz.$$

5. (12分) 计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^{xy}} dx,$$

其中 $y > 0$.

6. (12分) 求

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n+1}$$

的和函数.

7. (13分) 设 $f(x, y)$ 在区域 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续. 记 $D_{xy}: a \leq u \leq x, c \leq v \leq y$, 及

$$F(x, y) = \int \int_{D_{xy}} f(u, v) dudv.$$

试在 D 内求二阶混合偏导数 F_{xy} 及 F_{yx} .

8. (13分) 设 $y > 0$. 令

$$G(y) = \int_0^1 \frac{y dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad F(y) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + y^2} + y^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} \right],$$

证明 $G(y) = F'(y)$.

9. (13分) 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4}, & \text{当 } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{当 } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

研究以下性质:

- i) 该函数的连续性;
- ii) 一阶偏导的连续性;
- iii) 该函数的可微性.

10. (13分) 设 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{1+2x_n}{1+x_n}$, $n = 1, 2, \dots$, 试证 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

11. (13分) 证明 $f(x) = \frac{x - \sin x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 一致连续.

12. (13分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且满足

$$0 \leq f(x) \leq m + n \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b),$$

其中 $m \geq 0$ 及 $n > 0$ 是两个常数. 试证对任意 $x \in [a, b]$ 有

$$f(x) \leq me^{n(x-a)}.$$