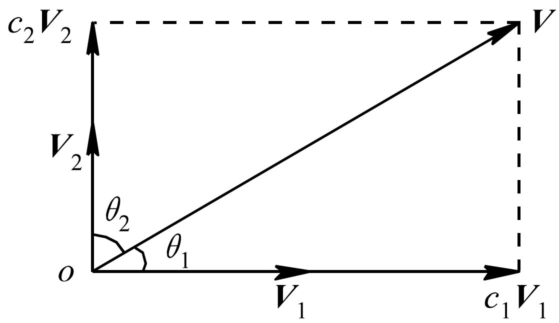
第四章　连续系统的频域分析

第4章 连续系统的频域分析

4.1 信号的正交分解

1.矢量的分解



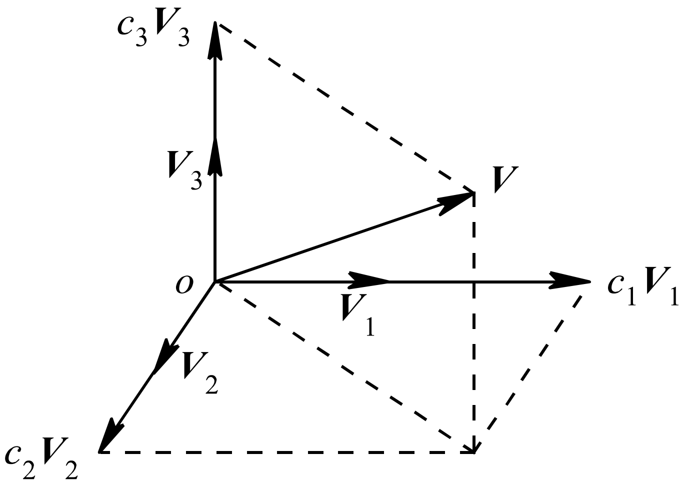
$$V = c_1 V_1 + c_2 V_2$$

式中，$\boldsymbol{V_1 \cdot V_2 = 0}$。

$$c_1 = \frac{|V|\cos\theta_1}{|V_1|} = \frac{V \cdot V_1}{V_1 \cdot V_1}$$

$$c_2 = \frac{|V|\cos\theta_2}{|V_2|} = \frac{V \cdot V_2}{V_2 \cdot V_2}$$

4.1 信号的正交分解



$$V = c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3$$

$$\boxed{c_i = \frac{|V|\cos\theta_i}{|V_i|} = \frac{V\cdot V_i}{V_i\cdot V_i}}$$

4.1 信号的正交分解

***n*维空间**

$$V = c_1V_1 + c_2V_2 + \cdots + c_rV_r + \cdots + c_nV_n$$

矢量集{$V_1, V_2, \ldots, V_n$}为n维空间的完备正交矢量集

式中，$V_i \cdot V_j = 0(i \neq j)$。

第r个分量的系数 $$c_r = \frac{V \cdot V_r}{V_r \cdot V_r}$$

4.1 信号的正交分解

2. 正交函数集

信号展开成一组多项式的加权和:

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(t) \quad \text{(i,n为整数)}$$

其中$\varphi_i(t)$为完备正交函数集

4.1 信号的正交分解

正交:$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$ 在区间(t_1, t_2)内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = 0$$

正交函数集: $\{\varphi_i(t)\}$ 在区间(t_1, t_2) 内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases}$$ （k_i为与之有关的常量）

完备正交函数集:不存在函数$\phi(t)$满足等式

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\varphi_i(t)dt = 0$$ （i=1,2,…,n)

4.1 信号的正交分解

三角函数集{cosmΩt,sinnΩt}在区间(t_0,t_0+T)是完备的正交函数集.

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\Omega t \cdot \cos n\Omega dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \\ T & m = n = 0 \end{cases} \\
&\int_{t_0}^{t_0+T} \sin m\Omega t \cdot \sin n\Omega dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases} \\
&\int_{t_0}^{t_0+T} \sin m\Omega t \cdot \cos n\Omega dt = 0
\end{aligned}\right\}$$

4.1 信号的正交分解

复函数集$\{\varphi_i(t)\}$在区间(t_1, t_2)正交

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j{}^*(t)dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k_i & i = j \end{cases}$$

例 $\{e^{jn\Omega t}\}(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jm\Omega t}(e^{jn\Omega t})^* dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(m-n)\Omega t} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T & m = n \end{cases}$$

区间(t_0, t_0+T)

3. 信号的正交分解

任一函数

$$f(t) \approx c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j}\varphi_j(t)$$

最佳近似

准则： 在区间(t_1, t_2)内，最小均方误差最小。

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(t)]^2 dt$$

为求均方误差最小的第i个系数c_i，必须使

$$\boxed{\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial c_i}=0}$$

即 $$\frac{\partial}{\partial c_i}\left\{\int_{t_1}^{t_2}[f(t)-\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(t)]^2dt\right\}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\int_{t_1}^{t_2}[-2c_if(t)\varphi_i(t)+c_i^2\varphi_i^2(t)]dt=0$$

4.1 信号的正交分解

$$-2\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)dt + 2c_i\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t)dt = 0$$

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t)dt} = \frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)dt$$

$$\boxed{K_i = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t)dt}$$

最小误差值 $\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(t)]^2 dt$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 K_j]$$

最小误差值 $\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt-\sum_{j=1}^{n} c_j^2 K_j]$

当$n\to\infty,\ \overline{\varepsilon^2}=0$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt=\sum_{j=1}^{n} c_j^2 K_j}$$ 帕斯瓦尔方程

$$\boxed{f(t)=\sum_{j=1}^{\infty} c_j\varphi_j(t)}$$

4.2 傅里叶级数

一、周期信号的分解：

周期信号：$f(t)=f(t+mT)$

周期为T，周期的倒数称为该信号的频率。

角频率 $\Omega=2\pi F=\dfrac{2\pi}{T}$

1.满足Dirichlet可由三角函数的线性组合来表示.

(1)在一个周期内**,**如果有间断点存在**,**则间断点的数目应是有限个**.**

(2)在一个周期内**,**极大值和极小值的数目应是有限个**.**

(3)在一个周期内**,**信号应是绝对可积的**,**即 $\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|dt<\infty$

4.2 傅里叶级数

一、周期信号的分解：

在区间(t_0,t_0+T)可以展开成在完备正交空间中的无穷级数。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos(\Omega t)+a_2\cos(2\Omega t)+\ldots+b_1\sin(\Omega t)+b_2\sin(2\Omega t)+\ldots$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

系数：$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)dt,\quad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)dt,\quad n=1,2,\ldots$$

4.2 傅里叶级数

在区间(t_0,t_0+T) 展开成在完备正交空间中的无穷级数。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos(\Omega t)+a_2\cos(2\Omega t)+\ldots+b_1\sin(\Omega t)+b_2\sin(2\Omega t)+\ldots$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

系数： $$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)dt,\quad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)dt,\quad n=1,2,\ldots$$

4.2 傅里叶级数

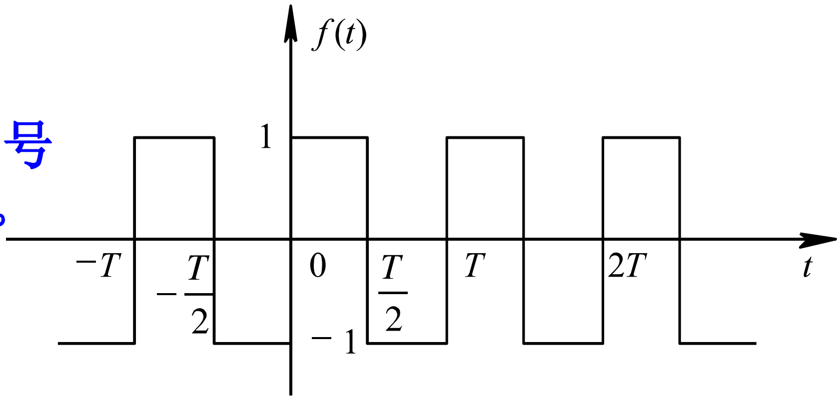
系数：

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \varphi_n &= \arctan(\frac{a_n}{b_n}) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= A_0 \\ a_n &= \cos\varphi_n \qquad n = 1, 2, \ldots \\ b_n &= -\sin\varphi_n \end{aligned}\right\}$$

4.2 傅里叶级数

例：试将下图所示的方波信号 f(t)展开为傅里叶级数。



$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\Omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} (-1)\cos(n\Omega t)dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} 1\bullet\cos(n\Omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\frac{1}{2\pi nf}[-\sin(n\Omega t)]\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{2}{T}\frac{1}{2\pi nf}[\sin(n\Omega t)]\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} (-1)\sin(n\Omega t)dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} 1\bullet\sin(n\Omega t)dt$$

$$= -\frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}[-\cos(n\Omega t)]\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{2}{T}\frac{1}{n\Omega}[-\cos(n\Omega t)]\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n = 2,4,6,\cdots \\ \dfrac{4}{n\pi} & n = 1,3,5,\cdots \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}[\sin\Omega t + \frac{1}{3}\sin 3\Omega t + \frac{1}{5}\sin 5\Omega t + \cdots + \frac{1}{n}\sin n\Omega t + \cdots]$$

$n = 1,3,5,\cdots$

4.2 傅里叶级数

误差：$t_2=\frac{T}{2},\ t_1=-\frac{T}{2},\ K_i=\frac{T}{2}$

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t)-\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(t)]^2dt$$

$$=\frac{1}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt-\sum_{j=1}^{n}b_j^2\cdot\frac{T}{2}]$$

$$=\frac{1}{T}[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt-\frac{T}{2}\sum_{j=1}^{n}b_j^2]$$

$$=1-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}b_j^2$$

只取基波：

$$\overline{\varepsilon^2}=1-\frac{1}{2}(\frac{4}{\pi})^2=0.189$$

只取基波和三次谐波：

$$\overline{\varepsilon^2}=1-\frac{1}{2}(\frac{4}{\pi})^2-\frac{1}{2}(\frac{4}{3\pi})^2=0.0994$$

取一三五次谐波：

$$\overline{\varepsilon^2}=1-\frac{1}{2}(\frac{4}{\pi})^2-\frac{1}{2}(\frac{4}{3\pi})^2-\frac{1}{2}(\frac{4}{5\pi})^2=0.0669$$

取一三五七次谐波：

$$\overline{\varepsilon^2}=1-\frac{1}{2}(\frac{4}{\pi})^2-\frac{1}{2}(\frac{4}{3\pi})^2-\frac{1}{2}(\frac{4}{5\pi})^2-\frac{1}{2}(\frac{4}{7\pi})^2=0.0504$$