第二章　连续系统的时域分析

本章内容：

- 微分方程的经典解
  - 1.齐次解
  - 2.特解
- 零输入响应与零状态响应
  - 1. 0_-到0_+的跳跃
  - 2. 响应的求解
- 冲激响应与阶跃响应
  - 1. 冲激响应的物理意义
  - 2. 阶跃响应的物理意义
  - 3. 响应的求解
- 卷积运算
  - 1. 定义
  - 2. 性质

一、微分方程的经典解

经典法基本步骤

1）求系统数学模型；

2）求齐次方程通解$y_h(t)$；

3）求非齐次方程特解$y_p(t)$；

4）写出非齐次方程通解

$$y(t)= y_h(t) + y_p(t)$$；

5）根据初始值求待定系数；

6）写出给定条件下非齐次方程解。

零输入与零状态响应

- 零输入响应和零状态响应
  - 零输入响应
    - 写出特征方程,求出特征根.
    - 写出解的形式,并根据初始条件求出待定系数.
  - 零状态响应
    - 根据特征根写出固有响应形式
    - 根据激励写出特解的形式,并求出特解.
    - 根据奇异函数系数平衡法求出初始状态
    - 求出待定系数.

2.2 冲激响应与阶跃响应

总结： $y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+...+a_0y(t)=f(t)$

冲激响应求解

$$\begin{cases} h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+...+a_0h(t)=\delta(t) \\ h^{(j)}(0_-)=0, \quad j=0,1,...,n-1 \end{cases}$$

阶跃响应求解

方程右边 $=\varepsilon(t)$

- 求微分方程的特征根
- 写出系统的冲激响应的形式
- 初值： $\begin{cases} h^{(j)}(0_+)=0, \quad j=0,1,...,n-1 \\ h^{(n-1)}(0_+)=1 \end{cases}$

$g^{(j)}(0_+)=g^{(j)}(0_-)=0,$
$j=0,1,...,n-1$

特解 $y_p(t)=\dfrac{1}{a_0}$

- 求出待定系数：
- 写出系统的冲激响应

$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)dt$

例2—17 已知某线性非时变系统(LTI)的动态方程式为

$$y'(t)+3y(t)=f''(t)+2f'(t)+5f(t) \qquad t\ge 0$$

试求系统的冲激响应h(t)。

解:设动态方程式 $y_1'(t)+3y_1(t)=f(t) \qquad t\ge 0$

则冲激响应为 $h_1(t)=Ae^{-3t}\varepsilon(t)$

初始值为: $h_1(0_+)=1$

所以子系统的冲激响应为 $h_1(t)=e^{-3t}u(t)$

系统的冲激响应为 $h(t)=h_1''(t)+2h_1'(t)+5h_1(t)$

$$h_1'(t)=-3e^{-3t}\varepsilon(t)+\delta(t)$$

$$h_1''(t)=9e^{-3t}\varepsilon(t)-3\delta(t)+\delta'(t)$$

$$h(t)=\delta'(t)-3\delta(t)+9e^{-3t}\varepsilon(t)+2[-3e^{-3t}\varepsilon(t)+\delta(t)]+5e^{-3t}\varepsilon(t)$$

$$h(t)=\delta'(t)-\delta(t)+8e^{-3t}\varepsilon(t)$$

例2—18若描述系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=\tfrac{1}{2}f'(t)+2f(t) \qquad t\geq 0$$

试求系统的阶跃响应。

解:先求解 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t) \qquad t\geq 0$

其阶跃响应为: $g_1(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+\tfrac{1}{2}$

初始值为: $g(0_+)=g'(0_+)=0$

得到: $\begin{cases} C_1+C_2+\tfrac{1}{2}=0 \\ -C_1-2C_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1=-1 \\ C_2=\tfrac{1}{2} \end{cases}$

所以阶跃响应为: $g_1(t)=(-e^{-t}+\tfrac{1}{2}e^{-2t}+\tfrac{1}{2})\varepsilon(t)$

系统的阶跃响应为:

$$g(t)=\tfrac{1}{2}g_1'(t)+2g_1(t) \;=\tfrac{1}{2}[e^{-t}-e^{-2t}]\varepsilon(t)+0\cdot\delta(t)+2(-e^{-t}+\tfrac{1}{2}e^{-2t}+\tfrac{1}{2})\varepsilon(t)$$

$$=(1-\tfrac{3}{2}e^{-t}+\tfrac{1}{2}e^{-2t})\varepsilon(t)$$

例2—19 已知某线性非时变(LTI)系统在$f_1(t)=4\varepsilon(t-1)$作用下，产生的零状态响应为

$$y_1(t)=e^{-2(t-2)}\varepsilon(t-2)+4\varepsilon(t-3) \qquad t\geq 0$$

试求系统的冲激响应h(t)。

解:已知系统在$f_1(t)$作用下产生响应为$y_1(t)$，而系统的冲激响应h(t)为系统在冲激信号δ(t)作用下产生的零状态响应。因此，为求得系统的冲激响应h(t)，只需找出$f_1(t)$与冲激信号δ(t)之间的关系即可。

已知 $f_1(t)=4\varepsilon(t-1) \Rightarrow y_1(t)=e^{-2(t-2)}\varepsilon(t-2)+4\varepsilon(t-3)$

$$f_2(t)=f_1(t+1)=4\varepsilon(t) \Rightarrow y_2(t)=y_1(t+1)=e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)+4\varepsilon(t-2)$$

$$f_3(t)=\frac{1}{4}f_2(t)=\varepsilon(t) \Rightarrow y_3(t)=\frac{1}{4}y_2(t)=\frac{1}{4}e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)+\varepsilon(t-2)$$

$$f_4(t)=\frac{df_3(t)}{dt}=\delta(t) \Rightarrow y_4(t)=\frac{df_3(t)}{dt}=-\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)+\frac{1}{4}\delta(t-1)+\delta(t-2)$$

例2—20 已知某线性非时变系统(LTI)的动态方程式为

$$y'(t)+3y(t)=f''(t)+2f'(t)+5f(t) \qquad t\geq 0$$

试求系统的阶跃响应h(t)。

例2—21 若描述系统的微分方程为

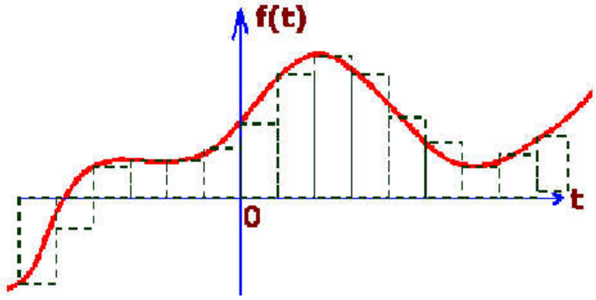
$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=\tfrac{1}{2}f'(t)+2f(t) \qquad t\geq 0$$

试求系统的冲激响应。

2.3 卷积运算

1.定义：

在第一章信号的分解中,我们得到



任意连续时间信号可分解为冲激信号的连续和

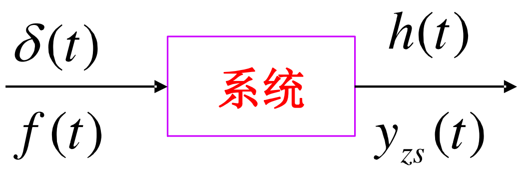
$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\tau)p_n\left(t-k\Delta\tau\right)\Delta\tau$$

当$\Delta\tau \to 0$时 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ $= f(t)*\delta(t)$

2.3 卷积运算

卷积定义：$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \;\; = f_1(t)*f_2(t)$

卷积物理意义



定义了一个映射 $h(t)= T[\delta(t)]$ $\quad y_f(t)=T[f(t)]$

将映射作用在任意信号e(t)

$$y_{zs}(t)=T[f(t)]=T[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau]=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)T[\delta(t-\tau)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad = f(t)*h(t)$$

2.3 卷积运算

2.性质

- 运算法则：

1.交换律 $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

2.分配律 $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

3.结合律 $f(t)*h_1(t)*h_2(t)=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$

- 性质：

1.积分性 $\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]d\tau=f_1(\tau)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)d\tau*f_2(\tau)$

2.微分性 $\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{d}{dt}f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*\frac{d}{dt}f_2(t)$

3.微积分性 $f_1(t)*f_2(t)=\frac{d}{dt}f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)d\tau*\frac{d}{dt}f_2(t)$

3.常用信号的卷积积分：

- **f(t)与冲激信号卷积**

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

$$f(t)*\delta(t-T)=f(t-T)$$

$$f(t-t_0)*\delta(t-T)=f(t-t_0-T)$$

- **斜坡信号与阶跃信号卷积**

$$t\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t \tau d\tau$$

$$=\frac{1}{2}t^2\varepsilon(t)$$

- **f(t)与冲激偶信号卷积**

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$$

- **f(t)与阶跃信号卷积**

$$f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^{\infty}f(t-\tau)d\tau$$

$$f(t)*\varepsilon(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}f(\tau)d\tau$$

$$=\int_{t_0}^{\infty}f(t-\tau)d\tau$$

4.卷积积分的计算：

- 利用定义计算 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$
- 利用常用信号卷积与有关性质计算
- 利用图解法计算 $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

1）$f_1(t)$、$f_2(t) \rightarrow f_1(\tau)$、$f_2(\tau)$

2）$f_2(\tau) \rightarrow f_2(-\tau)$（折叠）

3）$f_2(-\tau) \rightarrow f_2(t-\tau)$（平移）

4）$f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)$（相乘）

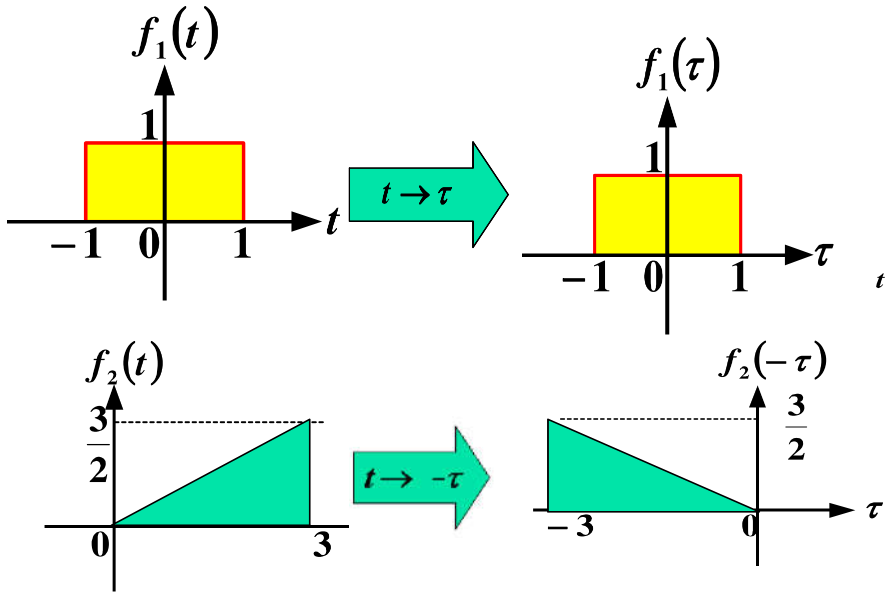
5）计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

2.3 卷积运算

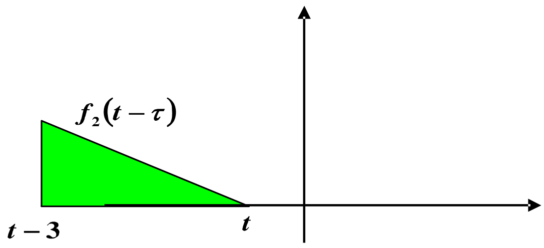
图解法计算卷积积分：

$$f_1(t)=\begin{cases}1 & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases},\quad f_2(t)=\frac{t}{2},\quad (0\le t\le 3)$$

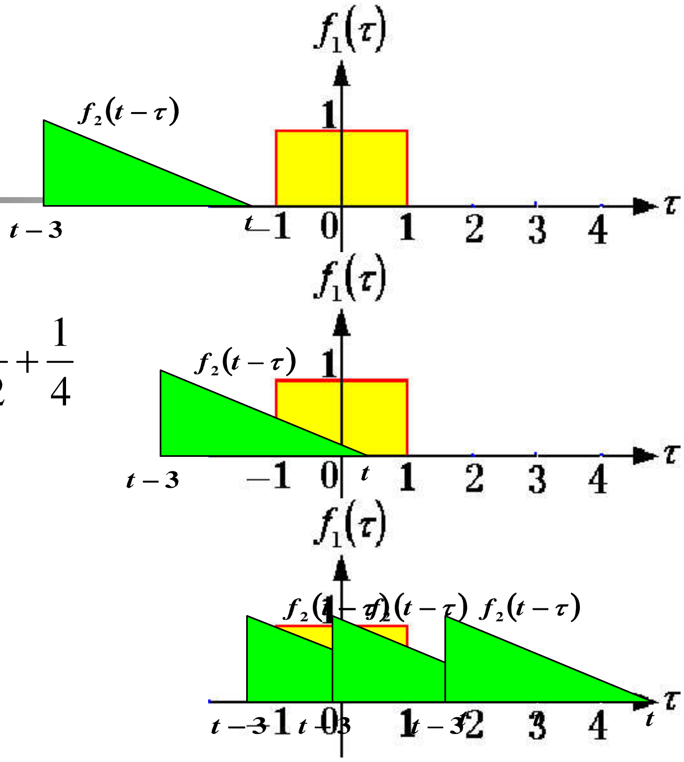
①变量代换与②反折：



③移位：



④计算：



当t<-1 $f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)=0 \quad y(t)=f_1(t)*f_2(t)=0$

当-1<t<1 $y(t)=\int_{-1}^{t} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau=\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}$

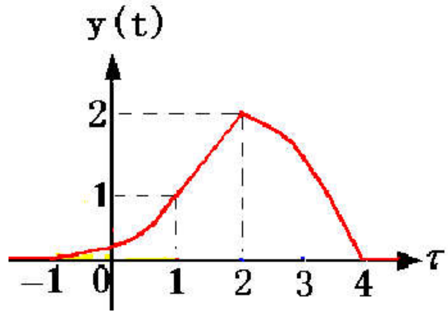
当1<t<2 $y(t)=\int_{-1}^{1}.\frac{1}{2}.(t-\tau)d\tau=t$

当2<t<4 $y(t)=\int_{t-3}^{1}1.\frac{1}{2}.(t-\tau)d\tau$

$$=-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+2$$

当t>4 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)=0$

$$y(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{1}{4} & -1\le t\le 1\\ t & 1\le t\le 2\\ -\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+2 & 2\le t\le 4\\ 0 & \text{其它}t\end{cases}$$



计算下列函数的卷积积分(2-13):

$f_1(t)=\varepsilon(t), f_2(t)=e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

$$\varepsilon(\tau) \longrightarrow \tau>0$$

$$\varepsilon(t-\tau) \longrightarrow t-\tau>0 \longrightarrow \tau<t$$

$$=e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}d\tau=e^{-\alpha t}\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\tau}\Big|_0^t$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}[e^{\alpha t}-1]\varepsilon(t)=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\varepsilon(t)$$

卷积积分的计算—根据定义计算

例1 已知$f_1(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$，$f_2(t)=e^{-5t}\varepsilon(t)$，试计算两信号的卷积 $f_1(t)*f_2(t)$。

解 根据卷积积分的定义，可得

$$
\begin{aligned}
f_1(t)*f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\bullet f_2(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau}\varepsilon(\tau)\cdot e^{-5(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{0}^{t} e^{-3\tau}\bullet e^{-5(t-\tau)}d\tau \\
&= e^{-5t}\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_0^t \\
&= \frac{1}{2}(e^{-3t}-e^{-5t})\varepsilon(t) \\
&= \frac{1}{2}(e^{-3t}-e^{-5t})\bullet\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

起点从0+0=0开始

例已知信号$f_1(t)=e^{-3(t-1)}\varepsilon(t-1)$与$f_2(t)=e^{-5(t-2)}\varepsilon(t-2)$，试计算两信号的卷积$f_1(t)*f_2(t)$。

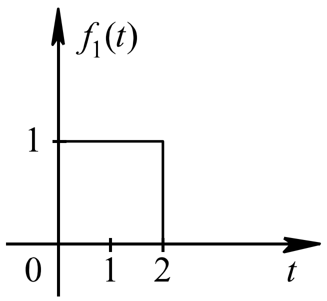
解 根据卷积积分的定义，可得

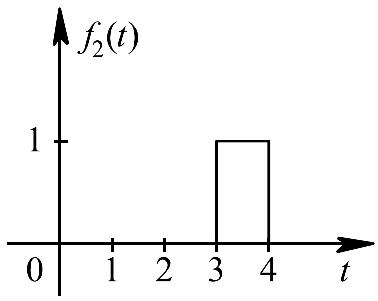
$$
\begin{aligned}
f_1(t)*f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\bullet f_2(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3(\tau-1)}\varepsilon(\tau-1)\cdot e^{-5(t-\tau-2)}\varepsilon(t-\tau-2)d\tau \\
&= \int_{1}^{t-2} e^{-3(\tau-1)}\bullet e^{-5(t-\tau-2)}d\tau \\
&= e^{-5t+13}\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{1}^{t-2} \\
&= \frac{1}{2}e^{-5t+13}[e^{2(t-2)}-e^{2}]\varepsilon(t-3) \\
&= \frac{1}{2}[e^{-3(t-3)}-e^{-5(t-3)}]\varepsilon(t-3) \\
&= \frac{1}{2}(e^{-3(t-3)}-e^{-5(t-3)})\bullet\varepsilon(t-3)
\end{aligned}
$$

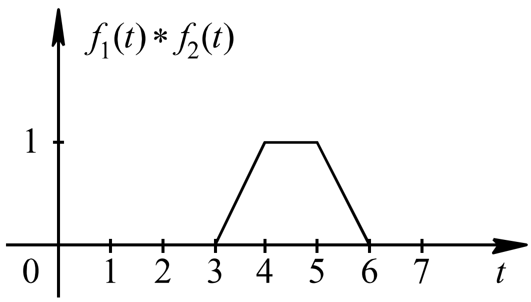
起点从1+2=3开始

卷积积分的计算—根据定义计算

终点之间的关系







例 已知 $f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$，$h(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$，试求两信号的卷积**y(t)=f(t)*h(t)**。

解 根据卷积运算的分配律，有

$$
\begin{aligned}
y_f(t)=f(t)*h(t)&=f(t)*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]\\
&=f^{(-1)}(t)*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]'\\
&=f^{(-1)}(t)*[\delta(t)-\delta(t-2)]\\
&=f^{(-1)}(t)-f^{(-1)}(t-2)
\end{aligned}
$$

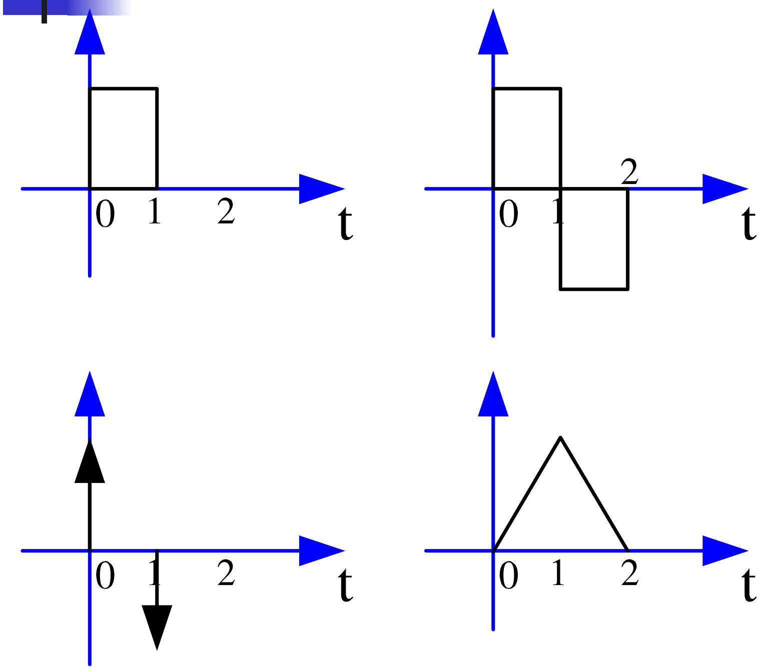
亦可利用卷积的等效特性来计算，即

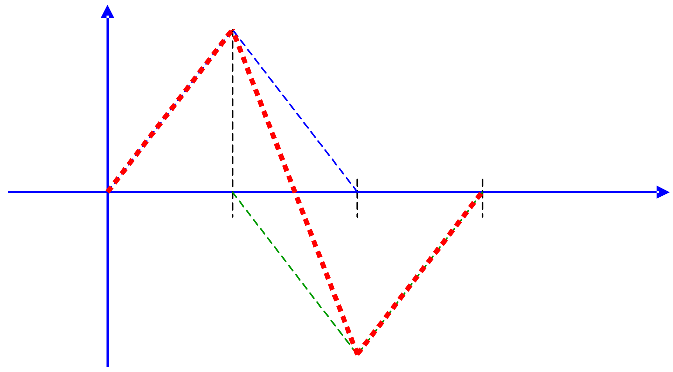
$$
\begin{aligned}
y_f(t)=f(t)*h(t)&=f(t)*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]\\
&=f(t)*\varepsilon(t)-f(t)*\varepsilon(t-2)\\
&=f^{(-1)}(t)-f^{(-1)}(t-2)
\end{aligned}
$$

进一步求解可得 $f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau}\varepsilon(\tau)d\tau=(1-e^{-t})\varepsilon(t)$

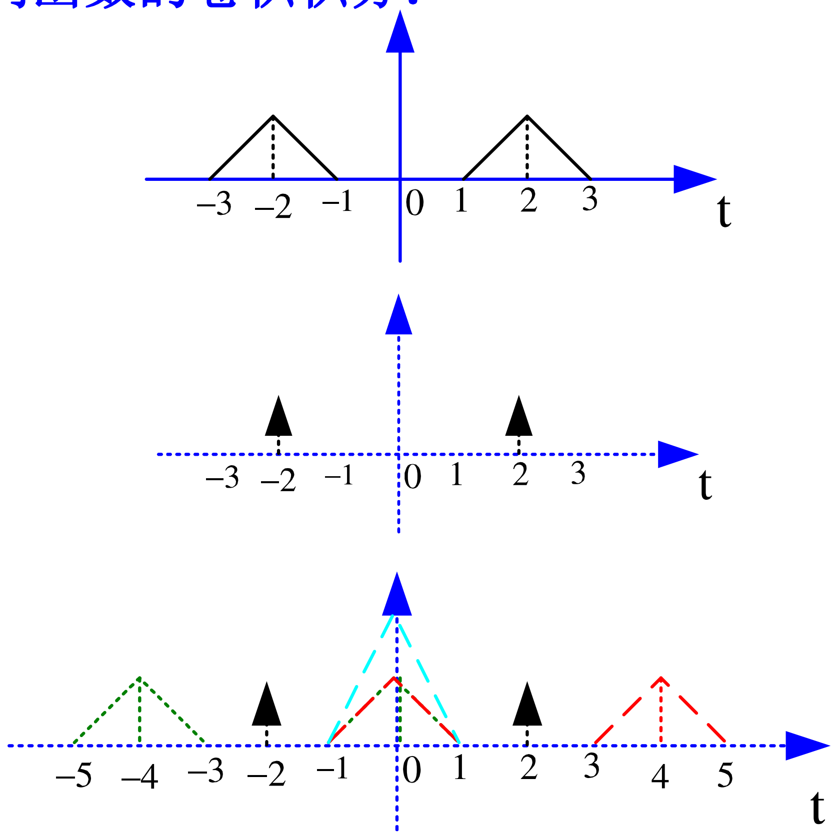
$$
\begin{aligned}
y_f(t)=f(t)*h(t)&=f^{(-1)}(t)-f^{(-1)}(t-2)\\
&=(1-e^{-t})\varepsilon(t)-[1-e^{-(t-2)}]\varepsilon(t-2)
\end{aligned}
$$

$$f(t)*h(t)=f^{(-1)}(t)*h'(t)$$



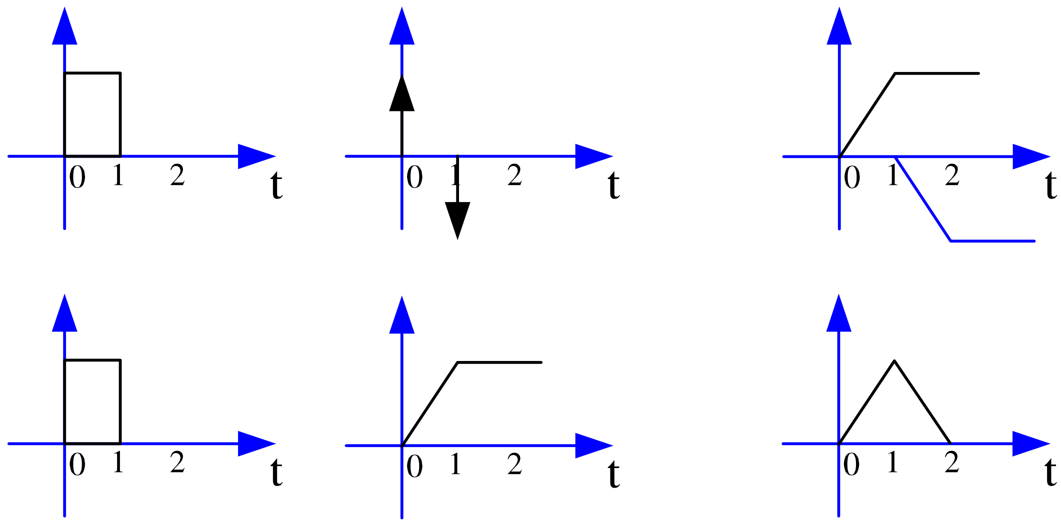


计算下列函数的卷积积分：



卷积积分的计算 — 根据性质

计算下列函数的卷积积分：



$f_1(t)=\varepsilon(t+2),\ f_2(t)=\varepsilon(t-3)$ $\quad f_1(t)*f_2(t)=?$

$f_1(t)=e^{-2t}\varepsilon(t),\ f_2(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$ $\quad f_1(t)*f_2(t)=?$

$f_1(t)=t\varepsilon(t),\ f_2(t)=\varepsilon(t+3)$ $\quad f_1(t)*f_2(t)=?$