第二章　连续系统的时域分析

- 连续时间系统的数学模型是：微分方程。

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mf^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1f'(t)+b_0f(t)$$

- 系统的输入与输出是通过它们的时间函数及它们对时间**t**的各阶导数的线性组合来联系起来的。
- 系统分析的任务是对给定的系统模型和输入信号求系统的输出响应。

第二章 连续系统的时域分析

本章内容：

- 微分方程的经典解
- 零输入响应与零状态响应
- 冲激响应与阶跃响应
- 卷积运算

1.齐次解
2.特解

1. 0_-到0_+的跳跃
2. 响应的求解

1. 冲激响应的物理意义
2. 阶跃响应的物理意义
3. 响应的求解

1. 定义
2. 性质

§2.1 LTI连续系统的响应

一、微分方程的经典解

微分方程:

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y'(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mf^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1f'(t)+b_0f(t)$$

系统的完全解由齐次解和特解组成

$y(t)$ **(完全解)** $=y_h(t)$ **(齐次解)** $+y_p(t)$ **(特解)**

齐次解是方程右边都为零的齐次方程的解

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0$$

齐次解的函数形式仅与系统本身的特性有关，而与激励**f(t)**的函数形式无关，称为系统的固有响应或自由响应；

特解的函数形式由激励确定，称为强迫响应.

齐次解的形式是形如 $Ae^{\alpha t}$函数的线性组合。

一、微分方程的经典解

齐次方程的解的形式

$$a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)=0$$

$$\frac{dy(t)}{y(t)}=-\frac{b}{a}dt$$

两边求积分 $\ln[y(t)]=-\frac{b}{a}t+C$

$$y(t)=Ae^{-\frac{b}{a}t}$$

一、微分方程的经典解

令 $y(t)=Ce^{\lambda t}$ 代入齐次方程

$$C\lambda^n e^{\lambda t}+Ca_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t}+\ldots+Ca_1\lambda e^{\lambda t}+Ca_0 e^{\lambda t}=0$$

化简得 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0$ ----特征方程

特征方程的根 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 叫特征根

又叫系统的自然频率或固有频率

反映系统时域特性 $\left\{\begin{array}{l}\text{响应时变规律}\\ \text{系统的稳定性}\end{array}\right.$

反映系统频域特性（ω、s域频率特性）

一、微分方程的经典解

不同的特征根对应的齐次解:

特征根	齐次解
单实根	$Ce^{\lambda t}$
r重实根	$(C_{r-1}t^{r-1}+C_{r-2}t^{r-2}+\ldots+C_1t+C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根α±jβ	$e^{\alpha t}(C\cos\beta t+D\sin\beta t)$　　$Ae^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta)$
r重共轭复根α±jβ	

$$A_{r-1}t^{r-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_{r-1})+A_{r-2}t^{r-2}e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_{r-2})+\ldots+A_0e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_0)$$

$$r_h(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\ldots+C_ne^{\lambda_n t}=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{\lambda_i t}$$

一、微分方程的经典解

特解的函数形式与激励函数有关,根据激励函数的形式假设特解函数式,代入方程后求得特解函数的解析式中的待定系数,即可求出特解.

激励函数	特 解	
C(常数)	P	
t^m	$P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \ldots + P_1 t + P_0$	所有特征根均不等于0
	$t^r\left[P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \ldots + P_1 t + P_0\right]$	有r重等于0的特征根
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}$	α不等于特征根
	$(P_1 t + P_0)e^{\alpha t}$	α等于特征单根
	$(P_r t^r + P_{r-1} t^{r-1} + \ldots + P_1 t + P_0)e^{\alpha t}$	α等于r重特征根
$\cos\beta t$ 或 $\sin\beta t$	$P\cos\beta t + Q\sin\beta t$	所有特征根均不等于±jβ
$t^m e^{\alpha t}\cos\beta t$ $t^m e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\left(P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \ldots + P_1 t + P_0\right)e^{\alpha t}\cos\beta t$ $+\left(P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \ldots + P_1 t + P_0\right)e^{\alpha t}\sin\beta t$	所有特征根均不等于0和α±jβ

一、微分方程的经典解

例，求微分方程 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$ 的齐次解

解：　由特征方程：$\lambda^2+3\lambda+2=0$

解得特征根：$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$

因此该方程的齐次解

$$y_h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$$

例, 求微分方程y”(t)+2y’(t)+y(t)=f(t)的齐次解

解：由特征方程 $\lambda^2+2\lambda+1=0$

解得二重根 $\lambda_1=\lambda_2=-1$

因此该方程的齐次解

$$y_h(t)=(C_1t+C_2)e^{-t}$$

一、微分方程的经典解

例，求微分方程y”(t)+y(t)=f(t)的齐次解

解：　由特征方程：　$\lambda^2+1=0$

解得特征根：　$\lambda_1=\lambda_2=\pm j$

因此该方程的齐次解

$$y_h(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$$

一、微分方程的经典解

经典法基本步骤

1）求系统数学模型；

2）求齐次方程通解$y_h(t)$；

3）求非齐次方程特解$y_p(t)$；

4）写出非齐次方程通解

$$y(t)= y_h(t) + y_p(t)$$；

5）根据初始值求待定系数；

6）写出给定条件下非齐次方程解。

一、微分方程的经典解

例1：已知某系统初始值y(0)=2, y'(0)=1, 描述系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$$

求 $f(t)=2e^{-t}$ 系统的响应 y(t)。

解：系统的特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+6=0$

系统的特征根为: $\lambda_1=-2, \lambda_2=-3$

微分方程的齐次解为: $y_h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}$

(2) 微分方程的特解为: $y_p(t)=Pe^{-t}$

将特解代入方程得: $Pe^{-t}-5Pe^{-t}+6Pe^{-t}=2e^{-t}$

$$P=1$$

所以特解为： $y_p(t) = e^{-t}$

完全解为： $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} + e^{-t}$

$$y'(t) = -2A_1 e^{-2t} - 3A_2 e^{-3t} - e^{-t}$$

$$\begin{cases} y(0) = A_1 + A_2 + 1 = 2 \\ y'(0) = -2A_1 - 3A_2 - 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 5 \\ A_2 = -4 \end{cases}$$

所以系统的解为： $y(t) = \underbrace{\overbrace{5e^{-2t} - 4e^{-3t}}^{\text{齐次解}}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\overbrace{e^{-t}}^{\text{特解}}}_{\text{强迫响应}} \quad t \geq 0$

一、微分方程的经典解

例2：已知某系统初始值**y(0)=2, y'(0)=1,** 描述系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f'(t)+f(t)$$

求(1) $f(t)=t^2$ (2) $f(t)=e^{-2t}$系统的响应 **y(t)**。

解：系统的特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+6=0$

系统的特征根为： $\lambda_1=-2, \lambda_2=-3$

微分方程的齐次解为： $y_h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}$

(2) 微分方程的特解为： $y_p(t)=B_1te^{-2t}+B_2e^{-2t}$

将特解代入方程得：

$$-2B_1e^{-2t}-2B_1e^{-2t}+4B_1te^{-2t}+4B_2e^{-2t}$$

$$+5(B_1e^{-2t}-2B_1te^{-2t}-2B_2e^{-2t})\quad +6(B_1te^{-2t}+B_2e^{-2t})=-2e^{-2t}+e^{-2t}$$

一、微分方程的经典解

化简得 $B_1 e^{-2t} = -e^{-2t}$　　$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

所以特解为: $y_p(t) = -te^{-2t} + B_2 e^{-2t}$

$$y(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} - te^{-2t} + B_2 e^{-2t} = -te^{-2t} + Ce^{-2t} + A_2 e^{-3t}$$

$$y'(t) = -e^{-2t} + 2te^{-2t} - 2Ce^{-2t} - 3A_2 e^{-3t} = (2t - 1 - 2C)e^{-2t} - 3A_2 e^{-3t}$$

$$\begin{cases} y(0) = C + A_2 = 2 \\ y'(0) = -1 - 2C - 3A_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = 8 \\ A_2 = -6 \end{cases}$$

所以系统的解为: $y(t) = (-t + 8)e^{-2t} - 6e^{-3t} \quad t \ge 0$

(1)的解为: ?

二、关于0_-与0_+值

- 在系统分析中,把响应时间确定为激励信号$f(t)$加入之后系统状态变化区间.
- 若输入$f(t)$是在$t=0$时接入系统，则确定待定系数C_i时用$t = 0_+$时刻的初始值，即$y^{(j)}(0_+)$ ($j=0,1,2…$，$n-1$)。
- 而$y^{(j)}(0_+)$包含了激励信号的作用，不便于描述系统的历史信息。
- 在$t=0_-$时，激励尚未接入，该时刻的值$y^{(j)}(0_-)$反映了系统的历史情况而与激励无关。称这些值为初始状态或起始值。
- 通常，对于具体的系统，初始状态一般容易求得。这样为求解微分方程，就需要从已知的初始状态$y^{(j)}(0_-)$设法求得$y^{(j)}(0_+)$。下列举例说明。

二、关于0_-与0_+值

例：描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+y(t)=f'(t)+f(t)$$

已知$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=0$，$f(t)=\varepsilon(t)$，求$y(0_+)$和$y'(0_+)$。

解:将激励代入方程有:

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=\delta(t)+\varepsilon(t)$$

利用系数匹配法分析: 上式对于$t=0_-$也成立，在$0_-<t<0_+$区间等号两端$\delta(t)$项的系数应相等。

由于等号右端为$\delta(t)$，故$y''(t)$应包含冲激函数，从而$y'(t)$在$t=0$处将发生跃变，即$y'(0_+)\neq y'(0_-)$

但$y'(t)$不含冲激函数，否则$y''(t)$将含有$\delta'(t)$项。由于$y'(t)$中不含$\delta(t)$，故$y(t)$在$t=0$处是连续的。

故$y(0_+)=y(0_-)=2$

二、关于0_-与0_+值

对式(1)两端积分有

$$\int_{0_-}^{0_+} y''(t)dt + 5\int_{0_-}^{0_+} y'(t)dt + 6\int_{0_-}^{0_+} y(t)dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t)dt + \int_{0_-}^{0_+} \varepsilon(t)dt$$

由于积分在无穷小区间[0_-，0_+]进行的，且y(t)在t=0连续， 故

$$\int_{0_-}^{0_+} y(t)dt = 0, \quad \int_{0_-}^{0_+} \varepsilon(t)dt = 0$$

于是由上式得 $y'(0_+) - y'(0_-) + 5[y(0_+) - y(0_-)] = 1$

考虑 $y(0_+) = y(0_-) = 2$

所以 $y'(0_+) - y'(0_-) = 1 \quad y'(0_+) = y'(0_-) + 1 = 1$

由上可见，当微分方程等号右端含有冲激函数（及其各阶导数）时，响应y(t)及其各阶导数中，有些在t=0处将发生跃变。但如果右端不含δ(t)时，则不会跃变。