第七章

可压缩气体的流动和射流简介

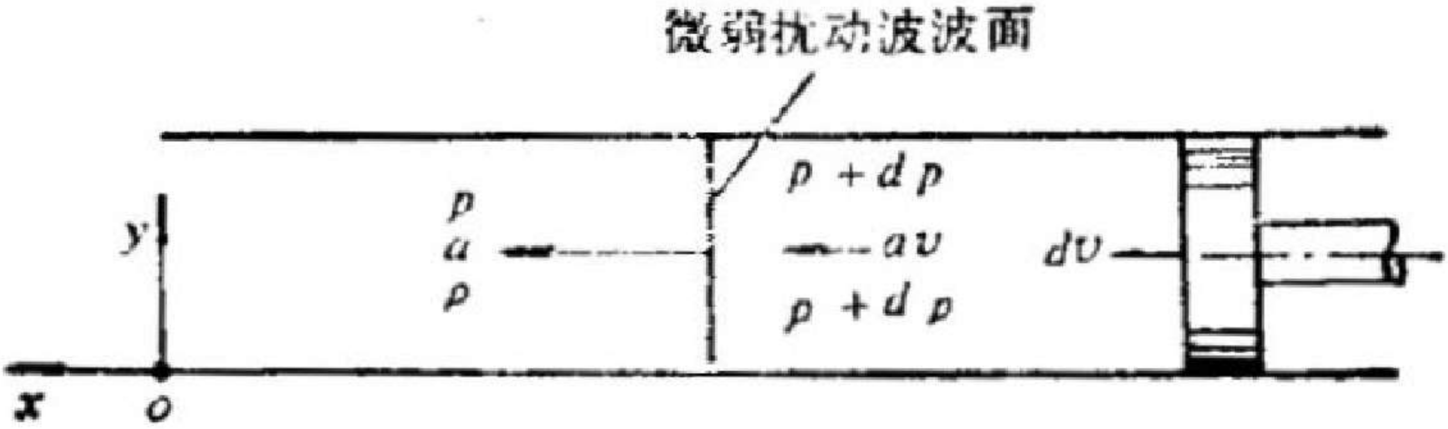
- 7.1 可压缩气体的相关概念
- 7.2 可压缩气体一元稳定等熵流动的基本方程
- 7.3 一元稳定等熵流动的基本特性
- 7.4 气流参数与流通截面的关系
- 7.5 喷管的计算与分析
- 7.6 射流和气液两相流动

7.1 可压缩气体的相关概念

一、压缩性与音速

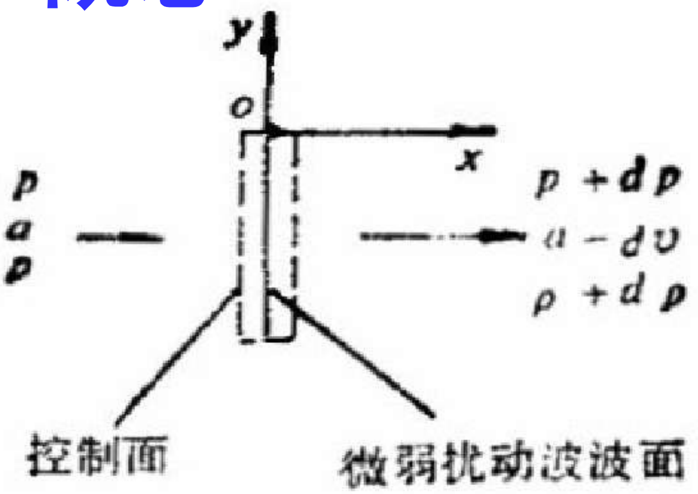
- 当气体的出流速度很高时(接近或超过音速)，必须按可压缩气体来处理(工程上的蒸汽、氧气、压缩空气、天然气的出流过程，出流速度高达数百米，其出流过程必须按不可压缩流体处理)；
- 在可压缩气体流动时，要注意两个速度：
  - 一气体流速的大小
  - 一气体内微小扰动的传播速度—即声音在流体中的传
- ________ 动使压力发生一个微小变化，从而引起介质的密度也发生一个微小变化。

- 在可压缩气体流动时，气流速度的大小与气流内微小扰动的传播速度之比值，对流动有很大的影响。
- 设有一个充满静止状态的可压缩气体的等截面园管，其一端装一个活塞，如图。活塞以微小的速度 dv向左运动，则紧挨着活塞左侧的气体也随之以微小的速度 dv向左运动，并产生微小的压强增量dP，向左一层一层传下去，即压力波的传播。



7.1 基本概念

如果把坐标放在波面上，并取一与波面同步运动的控制面(截面积为A)，如右图，相对坐标波面是静止不动的。气流则以音速a流向波面。



动量方程：

$$PA-(P+dP)A=\rho aA[(a-d\upsilon)-a] \quad \text{或} \quad d\upsilon=\frac{1}{\rho a}dP$$

连续性方程： $a\rho A=(a-d\upsilon)(\rho+d\rho)A \Rightarrow d\upsilon=\frac{a}{\rho}d\rho$

由上两个方程可得：

$$a=\sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

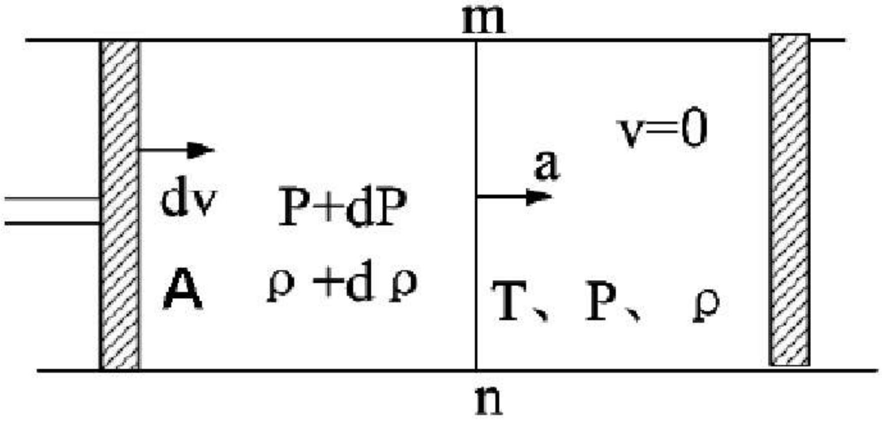
7.1 基本概念

- 当不同的气体受到相同的dP作用时，密度变化$d\rho$大者(即气体易压缩)，则音速较小。所以，音速可作为表征气体压缩性的一个指标。
- 相同的dP作用下，若$d\rho$大，流体易压缩和音速小。
- 因扰动微小，被扰动的流体压力、温度、密度变化极小，因而扰动过程接近于可逆过程。
- 因扰动传播迅速，与外界来不及热交换，因而扰动过程认为是绝热。
- 所以扰动过程既可逆又绝热，即为等熵(记为S)过程。

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$$

7.1 基本概念

- 音速(声速)：微弱扰动在介质中的传播速度。用字母a表示。



- 如右图所示音速在等直径管内的传播(向右产生一个微小速度dv)，一层一层传下去，在管中形成一个扰动面mn，以速度a向前稳定推进，未扰动的部分处于静止状态。

等熵过程关系式：$\dfrac{P}{\rho^k}=C$

气体状态方程：$P=\rho RT$

- 利用前面两个关系式可得：

$$\frac{dP}{d\rho}=\frac{kP}{\rho}$$

7.1 基本概念

$$a=\sqrt{\frac{dP}{d\rho}}=\sqrt{kRT}$$

K-绝热指数，c_p/c_v ,其中c_p为等压热容，c_v为等温热容，kJ/(kg·℃)

- 单原子分子：k=1.67；双原子(空气)：k=1.4；三原子分子(水蒸汽)：k=1.33
- 气体的音速随气体的状态参数T变化而变化，若同一流场中各点的状态参数不同，则音速也不同，音速指的是流场中某一点在某一时刻的音速，称为**当地音速**。
- 音速与气体的种类有关，且与气体绝对温度的平方根成正比。
- 常压下，15℃空气中的音速为340m/s；氢气中的音速1295m/s。

7.1 基本概念

二、马赫数

- 马赫数是判断气体压缩性对流动影响的一个准数，其定义为气体流速与当地音速的比值，即

$$(Ma)=\frac{\upsilon}{a}$$

$\upsilon \longrightarrow$ 振动源的传播速度（气体流速）

$a \longrightarrow$ 振动波的传播速度（当地音速）

$$\sin\alpha=\frac{a}{\upsilon}=\frac{1}{(Ma)}$$

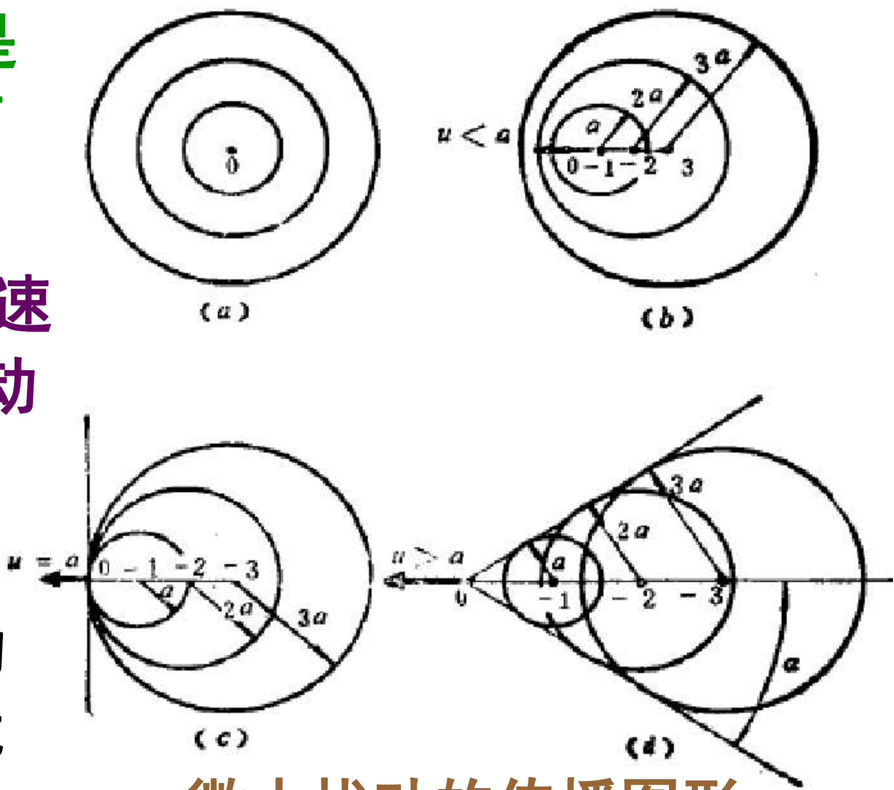
式中 α 称为马赫角。

- 相同马赫数具有相似的流场特性。
- 根据马赫数的大小，气体流动分为：

$(Ma)<<1$：不可压缩流动；$(Ma)<1$：为亚音速流动；$(Ma)=1$：为音速流动；$(Ma)>1$：为超音速流动。

7.1 基本概念

- (a)为点扰源相对气体是静止的。不同时刻球面波都是同心圆；
- (b)为点扰源以小于a的速度v从右向左移动，扰动总是走在点扰源前；
- (c)为点扰源以音速a从右向左移动，微小扰动的球面半径正好与点扰源的运动距离相等；



微小扰动的传播图形

- (d)为点扰源以大于音速a的速度v从右向左移动，点扰源总是走在扰动前面，只有在圆锥内的气体才受扰动。

7.1 基本概念

三、可压缩流体和不可压缩流体的差别

①不可压缩气体中，声速传播很快，只要其中有压力扰动，就立即传播到各处。当$(Ma)<<1$时，扰动传播特性与不可压缩流体中扰动的传播特性很接近。因此，只有在气流速度很低的情况下，气体才可视为不可压缩流体。

②当气体流动的速度达到与声速可比，但$(Ma)<1$时，虽然压力扰动向各个方向传播，并且扰动波仍走在扰动源的前面，但扰动传播的图形已不对称了。这时气体表现出可压缩性，见图b。

③当$(Ma)>1$时，情况发生了根本变化。此时压力扰动不仅不能跑到扰动源的前面，而且仅限于圆锥内，如图d所示。马赫数越大，马赫角越小。

7.2 可压缩气体一元稳定等熵流动的基本方程

一、连续性方程

$$\rho\upsilon A = C \qquad (\text{或}\frac{d\rho}{\rho}+\frac{d\upsilon}{\upsilon}+\frac{dA}{A}=0)$$

二、动量方程

- 考虑一维的**欧拉**方程， $\rho\frac{D\upsilon}{Dt}=-\nabla P+\rho F)$
- 由于气体密度很小，可略去质量力，在稳定流动时：

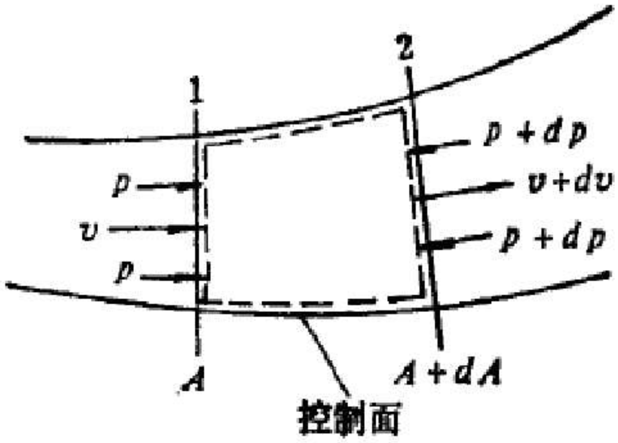
$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{d\upsilon_x}{dt} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}=\upsilon\frac{d\upsilon}{dx}} \Rightarrow \frac{dP}{\rho}+\upsilon d\upsilon=0$$

积分形式

$$\int\frac{dP}{\rho}+\frac{\upsilon^2}{2}=C \quad \text{或} \quad \int\frac{dP_1}{\rho_1}+\frac{\upsilon_1^2}{2}=\int\frac{dP_2}{\rho_2}+\frac{\upsilon_2^2}{2}$$

7.2 可压缩气体一元稳定等熵流动的基本方程

三、能量方程



- 控制体如右图所示
理想流体，能量守
示为

$$di = de + d\Bigg(—$$

- 式中，di为外界给控
为单位质量流体的内
服所有外力作的功，

$$\big[\big(P+dP\big)(A+dA$$

$$\big[PAd\upsilon + P\upsilon dA + \upsilon AdP\big]dt = \big[Pd\big(\upsilon A\big) + \upsilon AdP\big]dt$$

7.2 可压缩气体一元稳定等熵流动的基本方程

- 因为 $\rho\upsilon A = G$，则上式右侧可改写成：

$$\left[GPd\left(\frac{1}{\rho}\right)+G\frac{1}{\rho}dP\right]dt = Gd\left(\frac{P}{\rho}\right)dt$$

- 克服压力作的功：

$$\boxed{dl = Pd\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}dP = d\left(\frac{P}{\rho}\right)}$$

体积压缩或膨胀功：$Pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$　　移动功：$d\left(\frac{P}{\rho}\right)$

$$\boxed{dq = de + d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)+d(\frac{P}{\rho})}$$

7.2 可压缩气体一元稳定等熵流动的基本方程

根据单位质量焓 *i*的定义 $di = de + d\left(\frac{P}{\rho}\right)$

$\Rightarrow$ $dq = di + d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)$ 绝热过程，$dq=0$

一元稳定等熵流动的能量方程的微分形式

$$di + d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = 0 \xrightarrow{\text{积分形式}} i + \frac{\upsilon^2}{2} = \mathrm{C}$$

$$i = c_p T = \frac{c_p}{R}\frac{P}{\rho} = \frac{c_p}{c_p - c_v}\frac{P}{\rho} = \frac{k}{k-1}\frac{P}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{k}{k-1}\frac{P}{\rho} + \frac{\upsilon^2}{2} = \mathrm{C}}$$

四、状态方程

$$\boxed{\frac{P}{\rho} = RT}$$

7.2 可压缩气体一元稳定等熵流动的基本方程

- 由连续方程、动量方程、能量方程和状态方程组成的方程组构成了可压缩气体一元定常流动的基本方程如下：

$$
\left\{
\begin{aligned}
& P\upsilon A = \text{常数} \\
& \int \frac{dP}{\rho} + \frac{\upsilon^2}{2} = \text{常数} \\
& \frac{k}{k-1}\frac{P}{\rho} + \frac{\upsilon^2}{2} = \text{常数} \\
& \frac{P}{\rho} = RT
\end{aligned}
\right.
\qquad \Rightarrow \qquad
\left\{
\begin{aligned}
& P\upsilon A = \text{常数} \\
& \frac{k}{k-1}\frac{P}{\rho} + \frac{\upsilon^2}{2} = \text{常数} \\
& \frac{P}{\rho^k} = \text{常数} \\
& \frac{P}{\rho} = RT
\end{aligned}
\right.
$$

7.3 一元稳定等熵流动的基本特性

一、滞止状态

- 在流动中**某一截面**上气流速度为0的状态(v=0)；
- 该状态下的参数称为滞止参数，以下标“$_0$”表示，如T_0、P_0等；
- 性质：a (Ma)=0 (v=0，(Ma)=v/a)；

  b 气体的焓值变为最大 i_0($i+v/2$=C)；

  c 气体的温度最大 ($i=c_pT$)；

  d 滞止音速a_0也达到最大值($a=(kRT)^{1/2}$)

➢ 应用：气体从大容器中流出，容器中的气体参数可以认为是滞止参数。

7.3 一元稳定等熵流动的基本特性

$$i_0 = i + \frac{\upsilon^2}{2} \Rightarrow \frac{i}{i_0} = 1 - \frac{\upsilon^2}{2i_0}$$

理想气体：

c_p=常数

$c_pT=i$

$$\frac{i}{i_0} = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\upsilon^2}{2i_0}$$

$$P = \rho RT$$

$$\frac{P}{\rho^k} = C$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{2i_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{2i_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

在等熵或绝热情况下，υ减少→P、T、ρ都增大；υ增大→P、T、ρ都减少。

体现了热焓减小转化为动能的过程，速度变化时，压强变化最快。表明气流速度增加时，气体在膨胀。

7.3 一元稳定等熵流动的基本特性

二、临界状态

- 气体速度υ恰好等于当地音速a的状态，(即$(Ma)=1$)；
- 该状态下的参数为临界参数，用“$_*$”表示。由下式可导出临界参数与滞止参数的关系 $a_0=\sqrt{kRT_0}=\sqrt{kP/\rho}$

$$\frac{k}{k-1}\frac{P}{\rho}+\frac{\upsilon^2}{2}=\text{常数} \longrightarrow \frac{a^2}{k-1}+\frac{\upsilon^2}{2}=\text{常数}$$

$$\frac{T_*}{T_0}=\frac{2}{k+1} \qquad \frac{P_*}{P_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad \frac{\rho_*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

当$k=1.4$时(如空气、氧气)

$$\left\{\frac{T_*}{T_0}=0.833;\quad \frac{P_*}{P_0}=0.528;\quad \frac{\rho_*}{\rho_0}=0.634\right\}$$

- 因为随着υ减少，P、T、ρ都增大，在亚音速时，比值为>临界值，而超音速时比值为<临界值。

7.3　一元稳定等熵流动的基本特性

三、极限状态

- 如果一维稳定等熵气流某一截面上的T=0，则该截面上的气流速度达到最大值υ_{max}。此时P、ρ、a的值均等于0，分子停止热运动。
- 极限状态是达不到的，因为气体降到绝对0度以前，早已液化了，故叫极限状态。
- 极限状态下的能量方程和极限速度公式如下：

$$\upsilon_{\max}=\sqrt{2i_0}=\sqrt{\frac{2kP_0}{(k-1)\rho_0}}=\sqrt{\frac{2kRT_0}{(k-1)}}$$

➢ 由前面的公式可见，极限速度除与气体种类有关外，也仅由滞止温度计算。

7.4 气流参数与流通截面的关系

- 确定一维稳定等熵流速度、压强、密度与流通截面变化的关系；
- 联立运动方程和能量方程，可以得到：

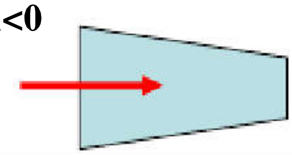
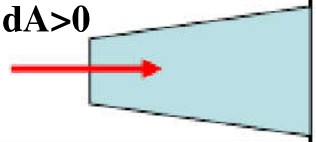
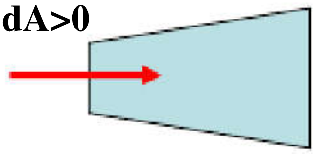
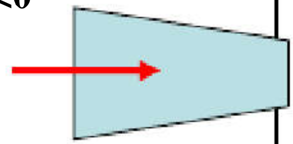
$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{d\upsilon}{\upsilon}+\frac{dA}{A}=0 \qquad \frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\frac{dP}{\upsilon^2\rho} \qquad a^2=\frac{dP}{d\rho}$$

$$\frac{dA}{A}=-\frac{d\upsilon}{\upsilon}(1-(Ma)^2)$$

在渐缩喷管中，亚音速气流靠压力推动增加速度。其极限为音速。

在渐扩喷管中，超音速气流靠气体膨胀增加速度。

7.4 气流参数与流通截面的关系

气流参数的变化	M<1（亚音速)	M>1 (超音速)
$dv>0$，$dP<0$， $d\rho<0$，$dT<0$	dA<0 	dA>0 
$dv<0$，$dP>0$， $d\rho>0$，$dT>0$	dA>0 	dA<0 

- 在M<1，dA与dP同号而与dv异号，气体在截面变小的管道中速度增加，而压强减少，而在截面变大，情况相反；
- 在M>1，dA与dP异号而与dv 同号，气体在截面变小的管道中速度减少，而压强增加，同样在截面变大后，情况相反。

7.4 气流参数与流通截面的关系

由前面公式：$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{d\upsilon}{\upsilon}+\frac{dA}{A}=0$$

$$\frac{dA}{A}=-\frac{d\upsilon}{\upsilon}(1-(Ma)^2)$$

可以给出：$$\frac{d\rho}{\rho}=-(Ma)^2\frac{d\upsilon}{\upsilon}$$

当$M<1$时：$$\left|\frac{d\upsilon}{\upsilon}\right|>\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|$$

当$M>1$时：$$\left|\frac{d\upsilon}{\upsilon}\right|<\left|\frac{d\rho}{\rho}\right|$$

在渐缩喷管中，亚音速气流靠压力推动增加速度。其极限为音速。

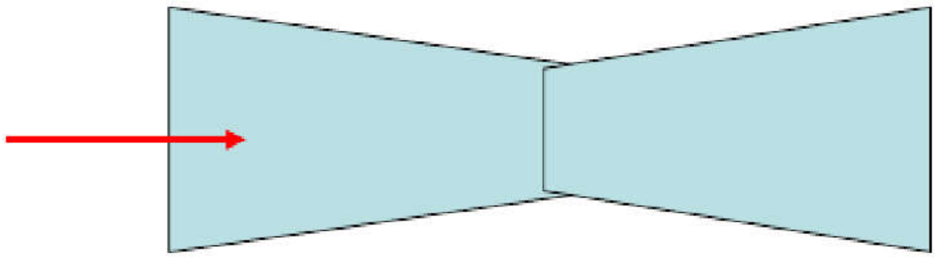
在渐扩喷管中，超音速气流靠气体膨胀增加速度。

- $M=1$时，$dA/A=0$ 说明截面积变化必有一极值。
- $a=1$ 只能在最小截面上才能达到。

7.4 气流参数与流通截面的关系

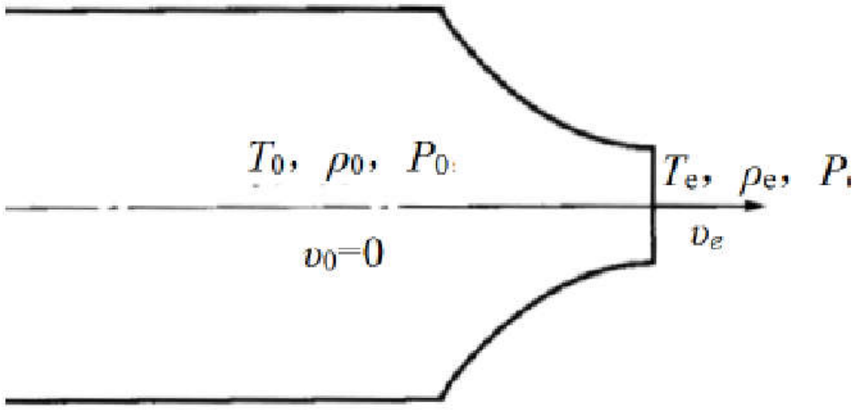
- 欲使气体从静止加速到超音速，除了要满足 $(P/P_0)<0.528$，即足够大的静止压力外，还应使气体在一渐缩管中加速，直至在最小截面上达到音速。再在截面下游加一渐扩管，气体继续加速到超音速。
- 这种先收缩后扩张的变截面管称为拉瓦尔喷管。
- 其最小面称为喉口，前面的p为出口处的气体压力。

拉瓦尔喷管：



7.5 喷管的计算与分析

一、收缩喷管



- 收缩喷管右图所示。

气体从一大容器通过收缩喷管出流，由于容器比出流口要大得多，可将其中的气流速度看作零$v_0=0$，则容器内的运动参数为滞止参数，分别为T_0，ρ_0，P_0。喷管出口处气流参数分别为v_e，T_e，ρ_e，P_e，A_e，外界压强为P_B。

收缩出口处各参数的计算式：

$$\upsilon_e=\sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{P_e}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

7.5 喷管的计算与分析

$$\rho_e = \rho_0 \left(\frac{P_e}{P_0} \right)^{1/k} \qquad T_e = \frac{P_e}{\rho_e R} = \frac{P_0^{1/k} P_e^{(k-1)/k}}{\rho_0 R}$$

$$G = \rho_e \upsilon_e A_e = \rho_0 A_e \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{2/k} - \left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right]}$$

对于收缩喷管，最大速度和最大质量流量为：

$$\upsilon_{\max} = \upsilon_* = a_* = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{P_*}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{P_0}{\rho_0}\left[1-\frac{2}{k+1}\right]} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{P_0}{\rho_0}}$$

$$G_{\max} = \rho_e \upsilon_* A_* = \rho_* \upsilon_* A_* = \rho_0 \left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{P_0}{\rho_0}}$$

7.5 喷管的计算与分析

$$G_{max}=\rho_0\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{P_0}{\rho_0}}A_*=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}A_*\sqrt{kP_0\rho_0}$$

上式可以改写为：

$$\boxed{G_{max}=\frac{P_0A_*}{\sqrt{T_0}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2k}{2(k-1)}}\left(\frac{k}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

对于空气$k=1.4$，代入上式可得：

$$G_{max}=0.0404\frac{P_0A_*}{\sqrt{T_0}}$$

例题1：已知容器中空气的$P_0=1.6\times10^5\text{N/m}^2$，$\rho_0=1.69\text{kg/m}^3$，$T_0=330\text{K}$。容器上渐缩喷管出口压强$P=105\text{N/m}^2$，喷管出口面积A=19.6cm²。

7.5 渐缩喷管与拉瓦尔喷管

求①喷管出口速度 υ 以及通过喷管的质量流量G；②如容器中的P_0=2.5×10^{5}N/m^2，T_0=330K时， υ 和G又各为多大。

解：① 先求P_e/P_0看它与P^*/P_0=0.528那一个大。如大于0.528，则为亚音速流动，可将P_e/P_0代入公式直接计算或查函数表计算。如小于0.528，则应为超音速流动，但渐缩喷管不可能达到超音速，故按照临界状态计算。

$$\frac{P_e}{P_0}=\frac{10^5}{1.6\times10^5}=0.625>0.528$$

故为亚音速流动。所以：

$$\upsilon_e=\sqrt{\frac{2\times1.4}{1.4-1}\times\frac{1.6\times10^5}{1.69}\left[1-(0.625)^{\frac{1.4-1}{1.4}}\right]}=289m/s$$

$$G = 1.69\times 19.6\times 10^{-4}\sqrt{\frac{2\times 1.4}{1.4-1}\times\frac{1.6\times 10^{5}}{1.69}\left(0.625^{2/1.4}-0.625^{1.4+1/1.4}\right)}$$

$$=0.684kg/s$$

如用函数表进行计算。由P_e/P_0=0.625，查附录可知

$$M\approx 0.85,\quad \frac{T_e}{T_0}\approx 0.874,\quad \frac{\rho_e}{\rho_0}\approx 0.714$$

于是可求出，T_e=0.874×330=288K，ρ_e=0.714×1.69=1.21 kg/m^3，所以

$$\upsilon_e = Ma = M\sqrt{kRT_e} = 0.85\sqrt{1.4\times 287\times 288} = 289m/s$$

$$G = \rho_e\upsilon_e A_e = 1.21\times 289\times 19.6\times 10^{-4} = 0.684kg/s$$

② $$\frac{P_e}{P_0} = \frac{10^5}{2.5\times 10^5} = 0.4 < 0.528$$

7.5 渐缩喷管与拉瓦尔喷管

应为超音速流动，但渐缩喷管出口速度最大只能达到音速，即$Ma=1$，所以按照$Ma=1$进行计算。查附录可知：

$$Ma=1; \qquad \frac{T_*}{T_0}=0.833; \qquad \frac{\rho_*}{\rho_0}=0.634$$

$$\rho_0=\frac{P_0}{\mathrm{R}T_0}=\frac{2.5\times10^5}{287\times330}=2.64kg/m^3$$

于是可求出：$T_*=0.833\times330=275K$

$$\rho_*=0.634\times2.64=1.67\mathrm{kg}/m^3$$

$$Ma\approx0.85; \qquad \frac{T_e}{T_0}\approx0.874; \qquad \frac{\rho_e}{\rho_0}\approx0.714$$

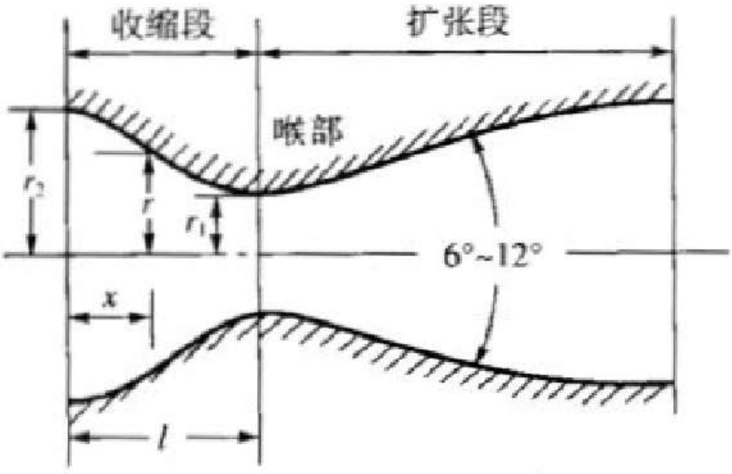
所以：$\upsilon_e=a_*=\sqrt{1.4\times287\times275}=332m/s$

$$G_{\max}=\rho_*a_*A_e=1.67\times332\times19.6\times10^{-4}=1.09kg/s$$

7.5 渐缩喷管与拉瓦尔喷管

二、拉瓦尔喷管

- 右图为拉瓦尔喷管，是先收缩后扩张的管，其作用是能使气流加速到超声速。
- 拉瓦尔喷管截面上的关系可通过连续性方程和流动参数导出。



拉瓦尔喷管示意图

$$\rho \upsilon A = \rho_* \upsilon_* A_* = \rho_* a_* A_* \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A_*} = \frac{\rho_*}{\rho}\frac{a_*}{\upsilon}$$

流动参数

$$\frac{\upsilon}{a} = M \qquad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \qquad \frac{\rho_*}{\rho} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{a_*}{a} = \left(\frac{T_*}{T}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{T_*}{T_0}\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

7.5　渐缩喷管与拉瓦尔喷管

- 代入连续方程并整理得：

$$\boxed{\frac{A}{A_*}=\frac{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}{M\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}}$$

- 当k=1.4时，简化为：

$$\frac{A}{A_*}=\frac{\left(1+0.2M^2\right)^3}{1.73M}$$

- 为了方便看出 与M数的关系，同样可列入函数表中，以便查表使用。

7.5　渐缩喷管与拉瓦尔喷管

- 例题2　空气由压缩机送入贮气罐的压强P_0=4×10^5 N/m^2，T_0=308K。贮气罐与一拉瓦尔喷管相连，喷管出口面积A=5000mm^2。设计要求喷管出口马赫数Ma=2。求①喷管出口断面上的参数P、T、v；②喉口面积；③通过喷管的质量流量。

- 解：①查附录5，当Ma=2时，有

$$\frac{P_e}{P_0}=0.128;\qquad \frac{\rho_e}{\rho_0}=0.23;\qquad \frac{T_e}{T_0}=0.556$$

于是可得：$P_e=0.128\times4\times10^5=5.12\times10^4\,N/m^2$

7.5 渐缩喷管与拉瓦尔喷管

$$\rho_e = 0.23\rho_0 = 0.23\frac{p_0}{RT_0} = 0.23\times\frac{4\times10^5}{287\times308} = 1.04kg/m^3$$

$$T_e = 0.556\times308 = 171\,K$$

$$\upsilon_e = Ma\cdot a_e = 2\times\sqrt{1.4\times287\times171} = 524m/s$$

② 查附录5，当*Ma*=2时，有：$\dfrac{A}{A_*} = 1.69$

于是可得：$A_* = \dfrac{A_e}{1.69} = \dfrac{5000}{1.69} = 2960mm^2 = 29.6cm^2$

③ $G = \rho_e\upsilon_e A_e = 1.04\times524\times50\times10^{-4} = 2.72kg/s$

7.5 渐缩喷管与拉瓦尔喷管

- **例题3 飞机以每小时900km的速度飞行，飞行高度的空气温度为223.5K，求机头顶部滞点的温度。**

解：当地音速： $a=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times\frac{8313}{29}\times 223.5}=299.5m/s$

以飞机为参照物，周围空气的流速为： $\upsilon=\frac{900km}{3600s}=250m/s$

所以，马赫数为： $Ma=\frac{\upsilon}{a}=\frac{250}{299.5}=0.8347$

查表得， $\frac{T}{T_0}=0.8801$

机头滞点的温度： $T_o=\frac{223.5K}{0.8801}=253.9K$

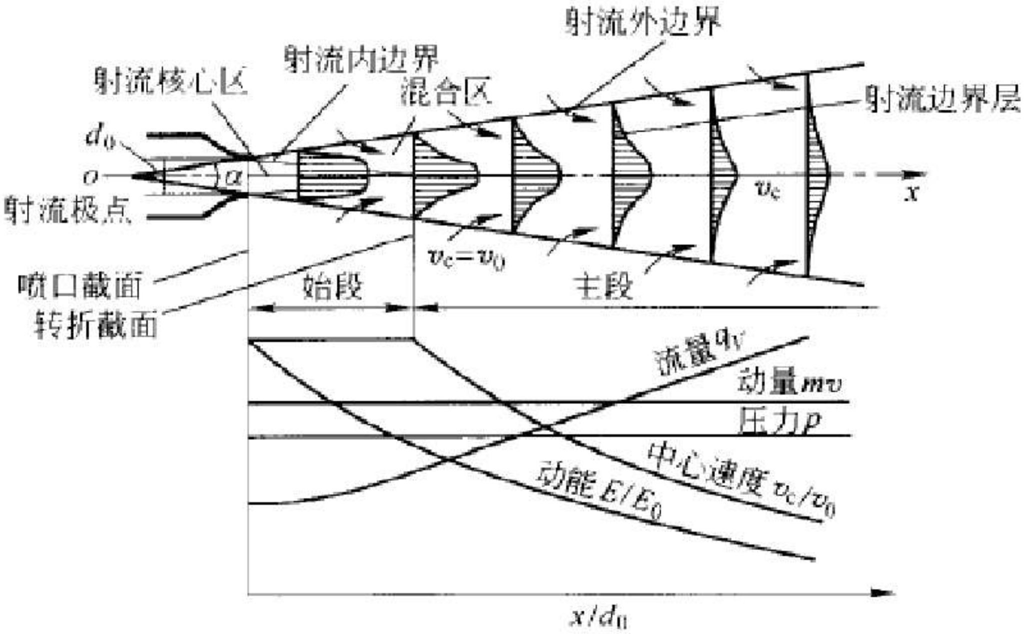
7.6　射流和气液两相流动

- 射流是指流体经由喷嘴流出到一个足够大的空间，不再受固体边界限制而继续扩散的一种流动。
- 冶金过程中，气体和液体的射流起到重要作用，如气体、液体燃料的燃烧，转炉吹氧炼钢，连铸二冷喷水，炉外精炼，高炉喷吹等均涉及射流问题。
- 射流就其机理而言，主要分为自由射流、半限制射流、限制射流及旋转射流等。
- 本节先对自由射流进行简单介绍，然后对冶金过程中常出现的气液两相流动进行初步的分析。

7.6 射流和气液两相流动

一、自由射流

- 流体自喷嘴流入无限大的自由空间中称为自由射流，如下图所示。形成自由射流必须具备两个条件：一是周围介质的物理性质(如温度及密度等)与射流流体相同；二是周围介质静止不动，且不受任何固体或液体表面的限制。



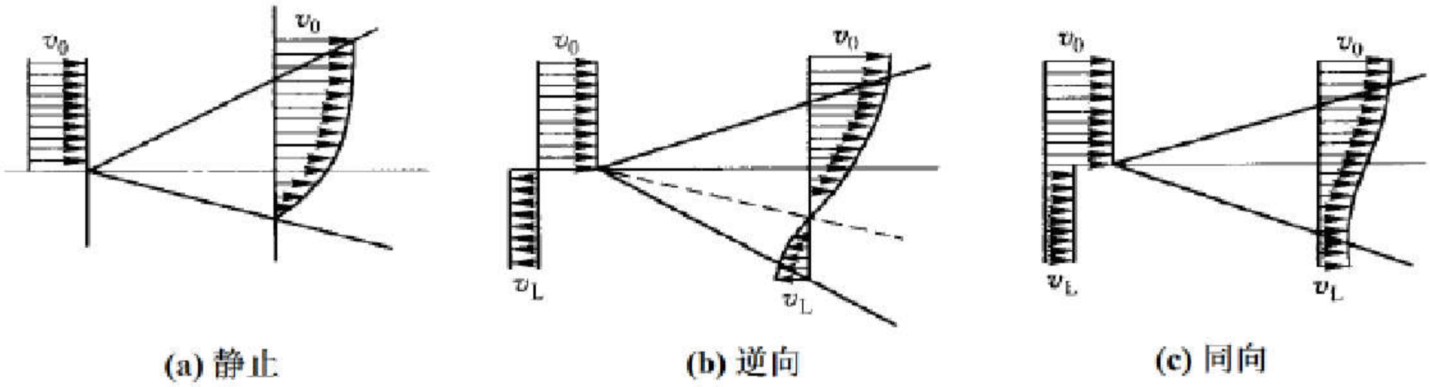
自由射流示意图

7.6 射流和气液两相流动

- 射流边界层沿x方向逐渐扩宽，在某一处边界层扩展到轴心处，只有射流中心点处的流速还保持着初始速度v_0，射流的这一截面称为转折截面。在转折截面以前，射流的轴心速度还保持着初始速度；而在转折截面之后，射流中心流速逐渐下降。
- 自由射流可分为几个主要区域：
- 初始段：它指从喷出口截面到转折截面之间的区域。
- 主段：也称基本段。转折截面以后的区域称为主段。
- 射流核心区：在射流始段中，具有初始速度的区域称为射流核心区。
- 射流极点：射流外边界逆向延长线的交点o称为射流极点，张角$\alpha=18°\sim26°$

7.6　射流和气液两相流动

二、气体流过液体表面的流动



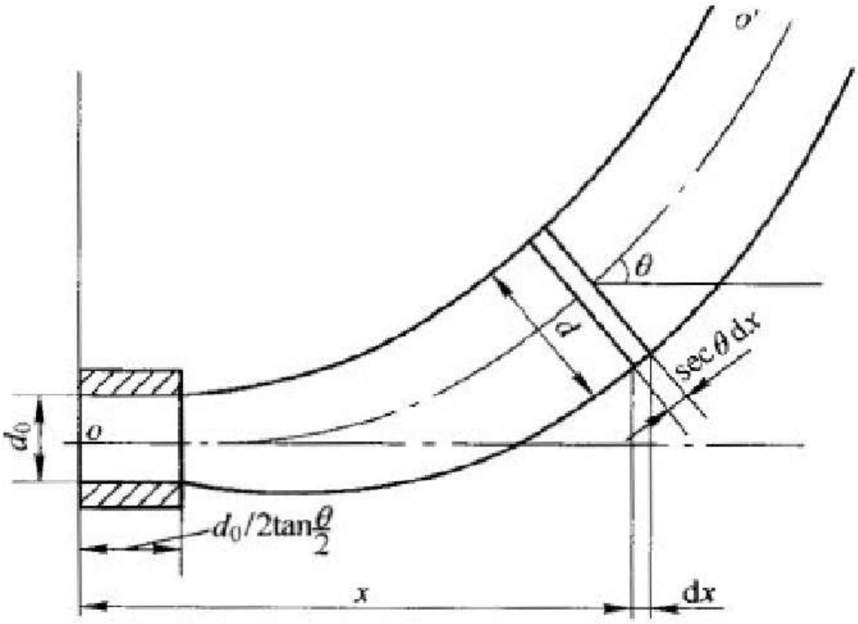
气体射流掠过液体表面

- 一股初速度为v_0的气体射入静止液体表面、与气体逆向或同向的液体表面的情况如图所示。气体流过液体表面时，当射流速度不大时，形成具有一定厚度的层流射流边界层；当流动速度增大，雷诺数增加并超过某一临界值时，将出现紊流边界层。雷诺数的临界值与来流的扰动情况有关。

7.6 射流和气液两相流动

三、气体喷入液体中的流动

- 当气体自直径为d_0的喷口以速度v_0喷入液体中时，气流喷入液体一定深度后将转向，其运动轨迹oo'，将与水平线呈一角度θ，如右图所示。θ值由气体的单位时间的原始动量与所受液体浮力的比值确定，即：



气体水平喷入液体的运动轨迹

$$\tan\theta = \frac{\text{浮力}(F)}{\text{单位时间原始动量}(M_0)} \Rightarrow \frac{d(\tan\theta)}{dx} = \frac{1}{M_0}\cdot\frac{dF}{dx}$$

基本公式

7.6 射流和气液两相流动

当喷口水平布置时：

$$\frac{d^2Y}{dX^2}=4\left[\frac{\left(\rho_1-\rho_g\right)gd_0}{\rho_1 v_0^2}\tan^2\left(\frac{\theta_c}{2}\right)\right]\left[1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}x^2c$$

当喷口与水平线呈θ_0角布置时：

$$\boxed{\frac{d^2Y}{dX^2}=4\left[\frac{\left(\rho_1-\rho_g\right)gd_0}{\rho_1 v_0^2}\right]\left[\frac{\tan^2\left(\frac{\theta_c}{2}\right)}{\cos\theta_0}\right]\left[1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}x^2c}$$

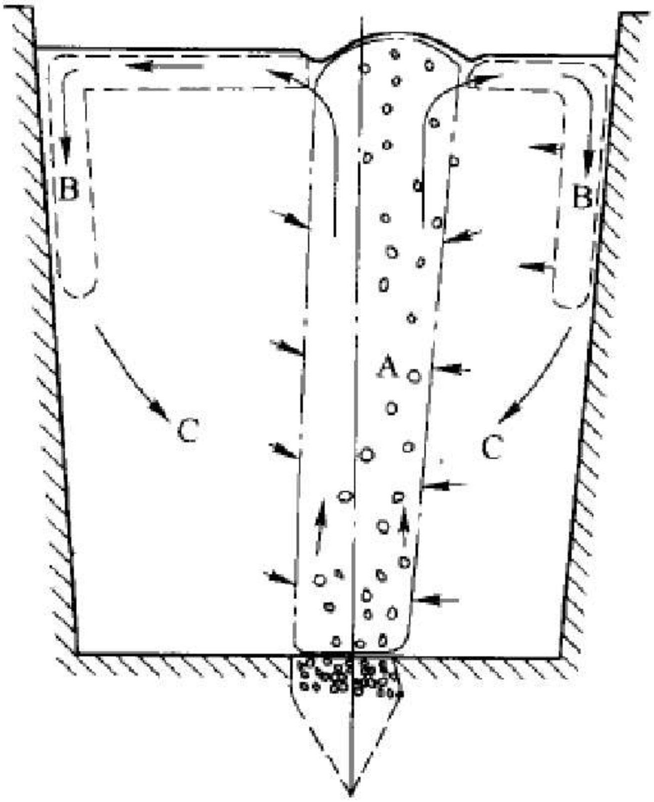
若给出边界条件，求解上两式可得气体水平喷入液体中的流动规律。

7.6　射流和气液两相流动

四、气体垂直喷入液体中的流动

- 气体流股从容器底部垂直喷入液体介质中的流动特征，如右图所示。整个气体流动分为A-力作用区，B-射流区，C-回流区。对流循环的流股和整个容器内的紊流扩散，使得液体可以迅速混合。喷入所需的最低压力与液体密度及深度有关，其计算式如下：

$$P_c = \rho_1 g H$$



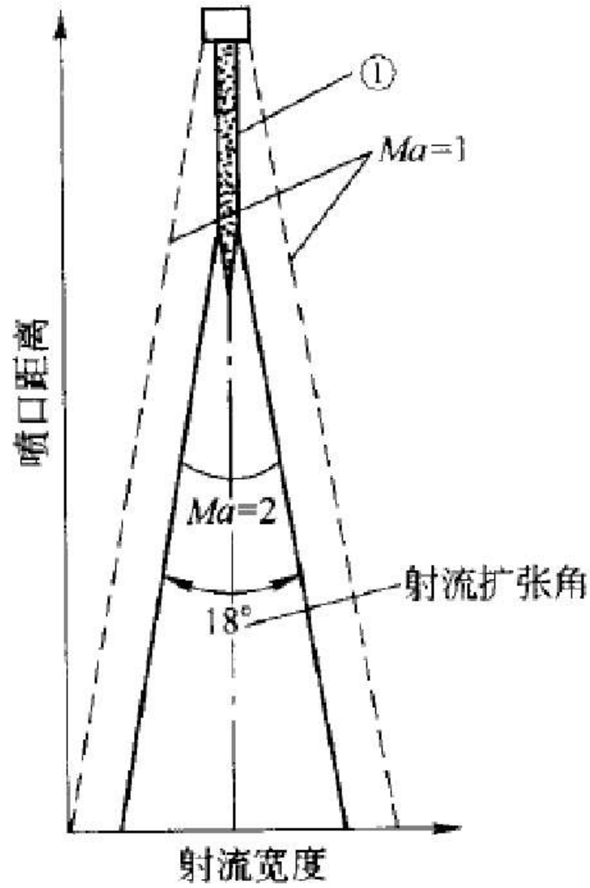
A-力作用区；B-射流区；C-回流区

气体垂直喷入液体中的流动

7.6 射流和气液两相流动

五、气体垂直喷入液体表面的流动

- 右图所示为气体以超声速从喷嘴流出后的射流。气流喷出后，存在一个超声速核心，如图中①所示。超声速核心在与喷嘴相距一定距离处消失，此后整个射流都为声速及亚声速。在超声速核心区，射流沿高度几乎不扩张，达到衰变点后，射流就以一定的夹角扩张，而且马赫数越大，扩张角越小。



超声速射流图

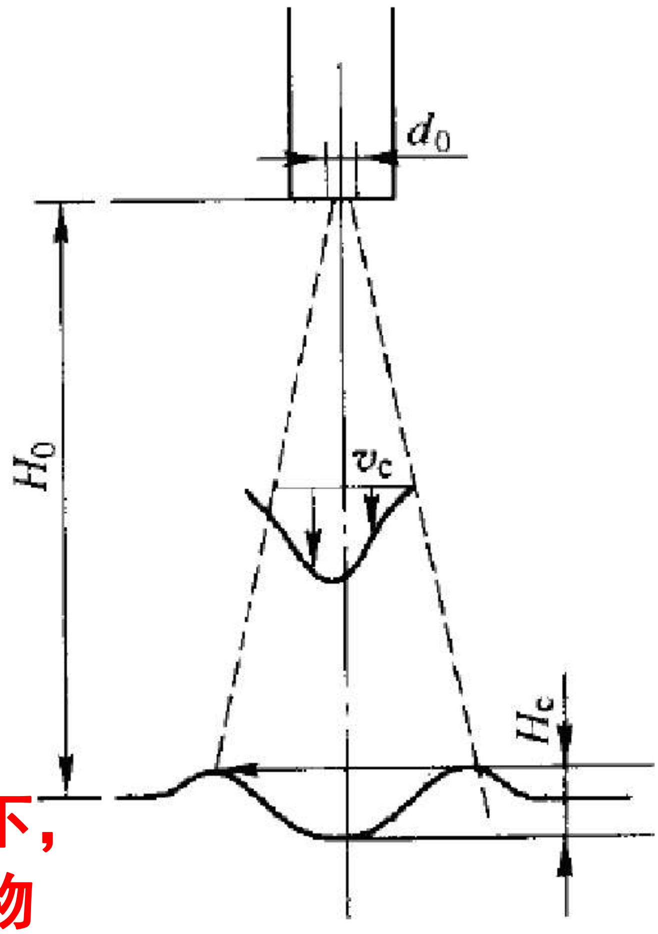
7.6 射流和气液两相流动

- 当超声速气流从初速度v_0喷向液体表面时，则形成如右图所示的凹坑，显然，射流特性对凹坑的形状有决定性影响。动量和穿透深度的关系式：

$$\frac{H_c}{H_0}\left(\frac{H_0+H_c}{H_0}\right)^2=\frac{154M_0}{2\pi g\rho_1 H_0^3}$$

$$M_0=\frac{\pi}{4}d_0^2\rho_g v_0^2$$

- 喷溅现象：在冲击波作用下，液体被破碎成液滴并呈抛物线状飞散



超声速射流喷向液面的流动

7.7 小结

- 本章讨论了不可压缩气体的基本概念，介绍了一维稳定等熵(绝热可逆过程)流动的基本方程，说明了流动参数的变化规律，以及渐缩喷管与拉瓦尔喷管的特性等。虽然这些知识仅涉及可压缩气体流动的最简单情况，但对炼钢中氧枪的理论设计却非常重要。
- 可压缩气体一元定常流动的基本方程是本章的基本方程。由该方程可以给出滞止状态、临界状态和极限状态的参数方程。
- 由气流参数与流通截面的关系，可以理解可获得亚声速、声速的收缩喷管和超声速的拉瓦尔喷管的工作原理。