第十七章

结构的极限荷载

17.1 概述

结构的弹性分析：

假定应力应变关系是线性的，结构的位移与荷载关系是线性的。荷载卸去后，结构会恢复到原来形状无任何残余变形。

结构的塑性分析：

利用材料塑性性质的结构分析。其任务是确定结构破坏时所能承受的荷载 ---极限荷载。

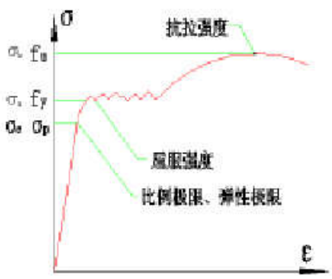
计算假定：

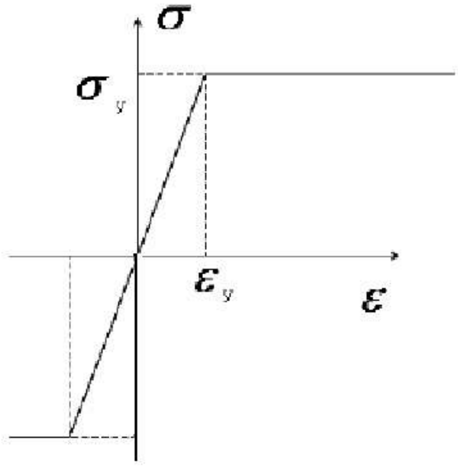
（1） 材料为理想弹塑性材料。拉压性质相同。

（**2**） 所有的荷载均为单调增大，不出现卸载现象。

（**3**） 在加载过程中，所有各荷载均保持固定的比例倍数，因而可以用同一个参数**(**荷载因子**)**的倍数来表示。

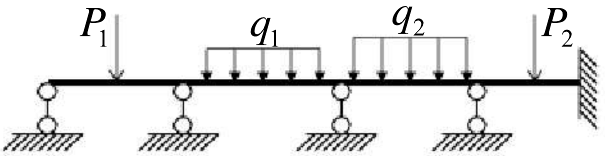
比例加载





比例加载

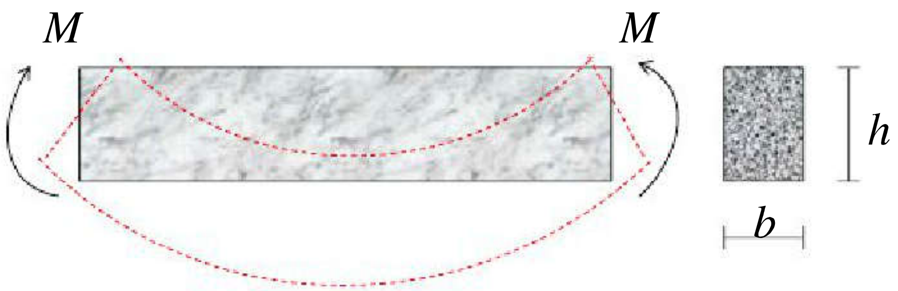
$P_1 = \alpha_1 P \qquad P_2 = \alpha_2 P$



$q_1 = \beta_1 P \quad q_2 = \beta_2 P$

17.2极限弯矩、塑性铰和极限状态

1. 极限弯矩——理想弹塑性材料的矩形截面梁

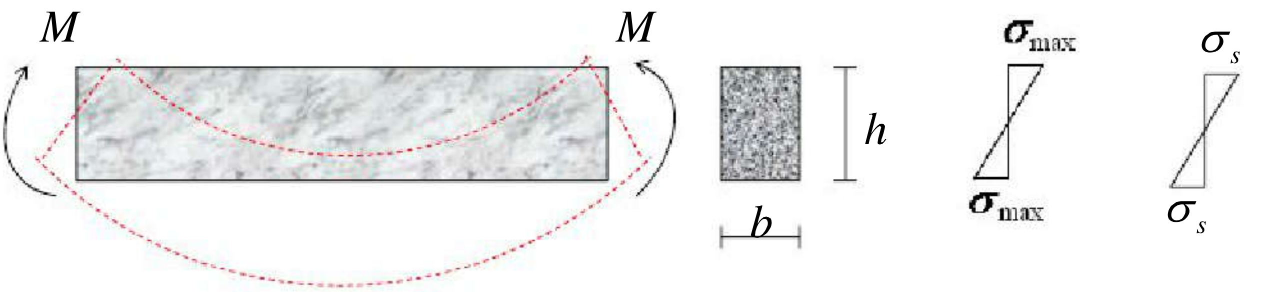


1）弹性阶段

$$\sigma_{\max} < \sigma_s \qquad \left.\begin{array}{ll} \sigma = E\varepsilon = \dfrac{My}{I} & \text{---应力应变关系} \\ \varepsilon = y\kappa & \text{---应变与曲率关系} \\ \sigma = Ey\kappa & \text{---应力与曲率关系} \\ M = \int_A \sigma y dA = EI\kappa & \text{---弯矩与曲率关系} \end{array}\right\} \text{线性关系}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_s \qquad M_s = 2\int_0^{\frac{h}{2}} \sigma \cdot bdy \cdot y = 2\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\sigma_s}{h/2} y \cdot bdy \cdot y = \frac{1}{6} bh^2 \sigma_s$$

---弹性极限弯矩(屈服弯矩)



2）弹塑性阶段

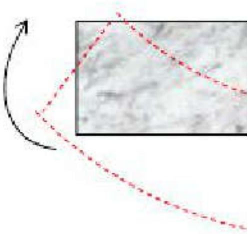
中性轴附近处于弹性状态.处于弹性的部分称为弹性核.

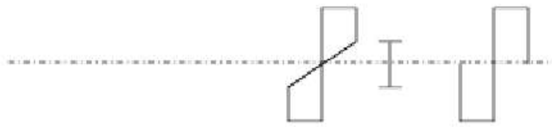
3）塑性流动阶段 M h h 1

极限弯矩与

$\alpha =$

M





$M_s = \frac{\quad}{6} \sigma_s$

有一个对称轴的任意截面梁

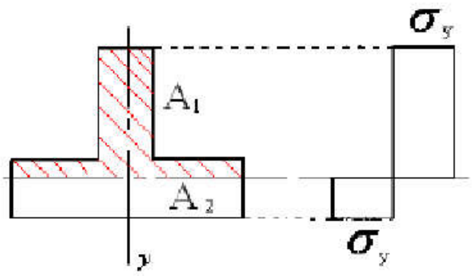
设截面上受压和受拉的面积分别为 A_1 和 A_2，当截面上无轴力作用时

$$\sigma_s A_1 - \sigma_s A_2 = 0 \qquad A_1 = A_2 = A/2$$

中和轴等分截面轴。

由此可得极限弯矩 $$M_u = \sigma_s A_1 a_1 + \sigma_s A_2 a_2 = \sigma_s (S_1 + S_2)$$

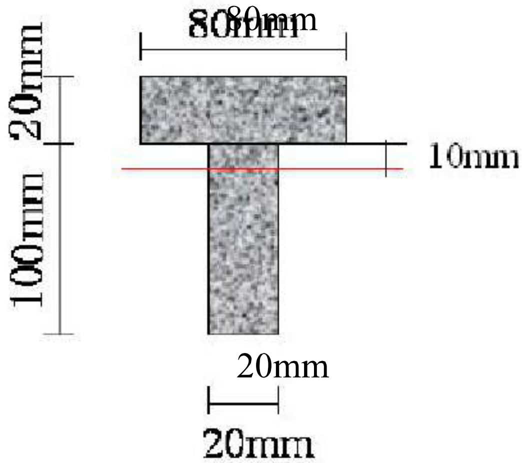
式中 S_1、S_2为A_1、A_2对该轴的面积矩。



$$M_u = \frac{bh^2}{4}\sigma_s$$ ---矩形截面塑性极限弯矩(简称为极限弯矩)

例：已知材料的屈服极限 $\sigma_s = 240\,\mathrm{MPa}$，求图示截面的极限弯矩。

解:



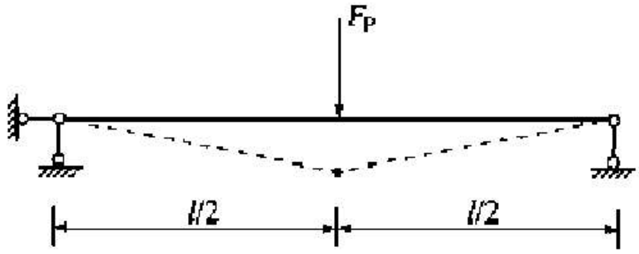
$$A = 0.0036\mathrm{m}^2$$

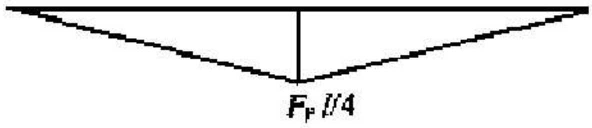
$$A_1 = A_2$$

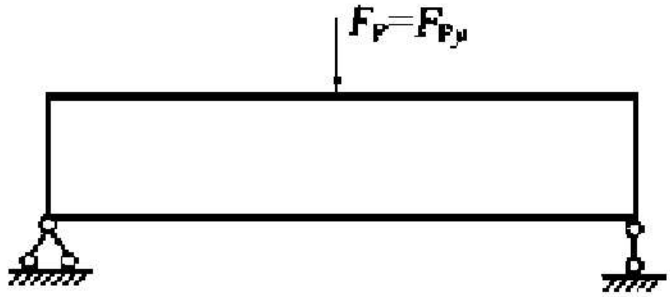
$$M_u = \sigma_s(S_1 + S_2)$$

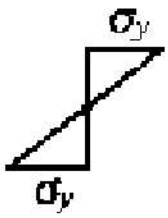
$$= 240 \cdot 10^6 \cdot (80\times20\times20 + 10\times20\times5 + 90\times20\times45)\cdot10^{-9}\cdot10^{-3}$$
$$= 27.36kNm$$

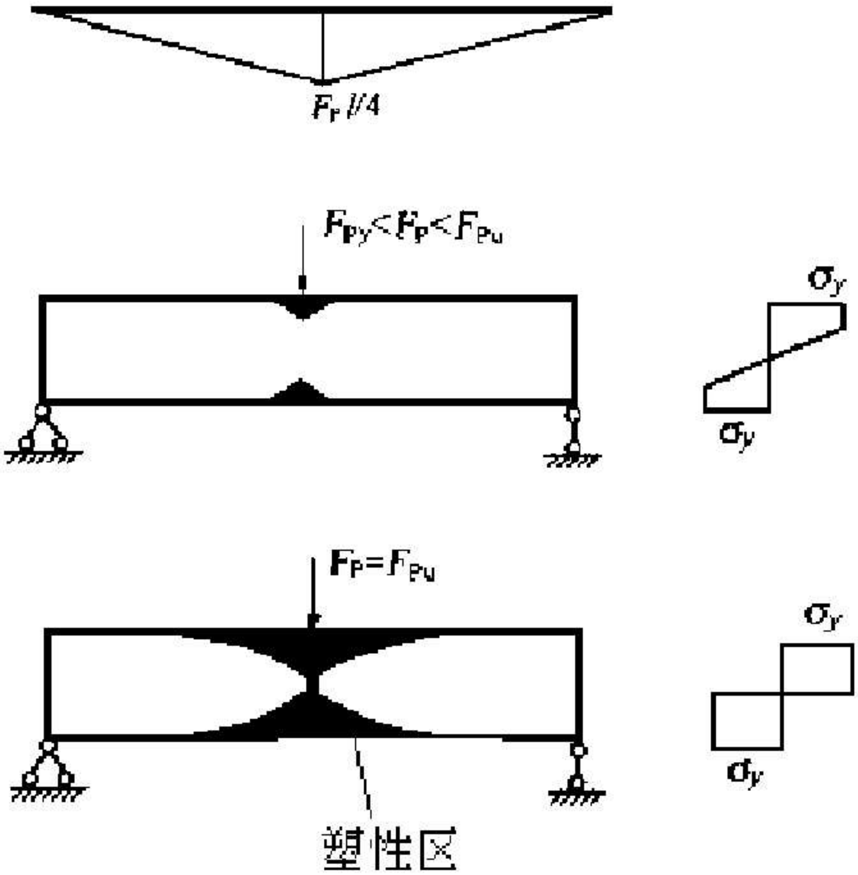
2.塑性铰的概念











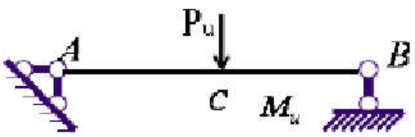
$F_P l/4$
$F_{Py}<F_P<F_{Pu}$
σ_y
σ_y
$F_P=F_{Pu}$
σ_y
σ_y
塑性区

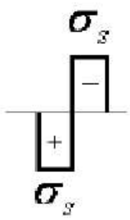
塑性铰与真实铰的差别：

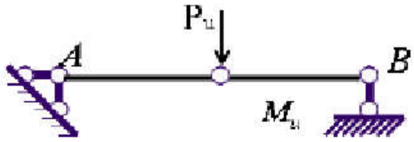
1. 塑性铰可承受极限弯矩；

2. 塑性铰是单向的，卸载时消失；

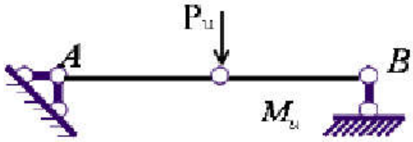
3. 随荷载分布而出现于不同截面。





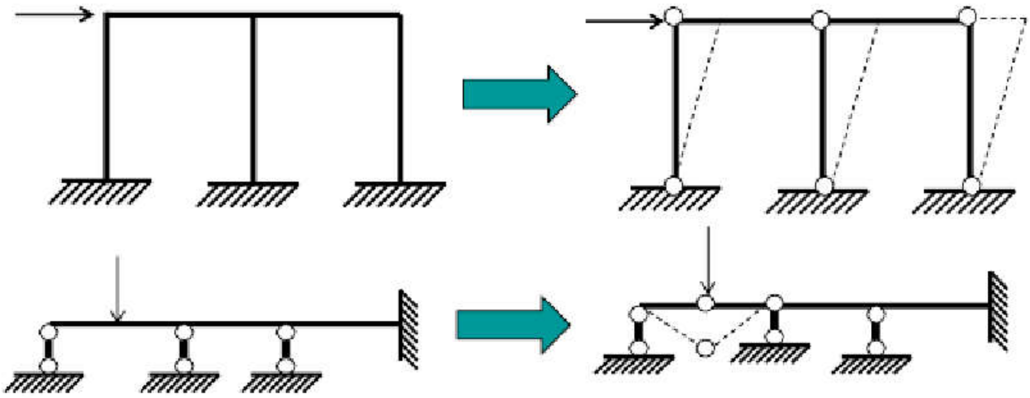


破坏机构



结构由于出现塑性铰而形成的机构称为破坏机构。

破坏机构可以是整体性的，也可能是局部的。



屈服弯矩?

极限弯矩?

塑性铰?

破坏机构?

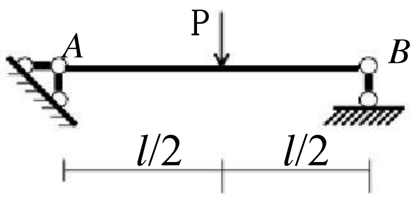
3.静定梁的极限荷载

静定结构无多余约束，出现一个塑性铰即成为破坏机构。——极限荷载。

找出塑性铰发生的截面后，令该截面的弯矩等于极限弯矩，——求极限荷载。

例：已知 $M_u = 19.646\text{kN.m}$ ，l=4m，求极限荷载。

解： 梁中最大弯矩为

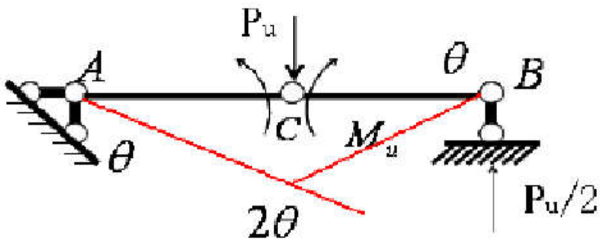


$$M_{\max} = Pl/4$$

令 $M_{\max} = M_u$ ，得

$$P_u = 4M_u / l = \frac{4}{4} \times 19.646 = 19.646\text{kN}$$

若能判断出塑性铰的位置，利用极限状态的平衡可直接求出极限荷载。



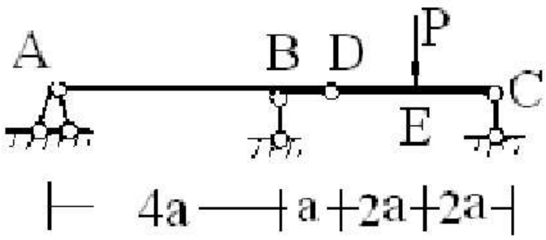
虚功方程

$$P_u \times \theta \times \frac{l}{2} = M_u \times 2\theta$$

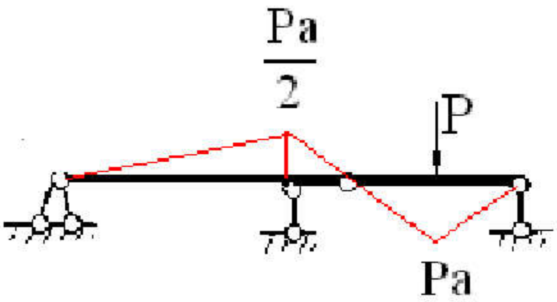
$$P_u = 4M_u / l = \frac{4}{4} \times 19.646 = 19.646\text{kN}$$

本例中，截面上有剪力，剪力会使极限弯矩值降低，但一般影响较小，可略去不计。

例　计算图示静定梁的极限荷载。已知极限弯矩值**M_u＝30kN·m，a＝1m**。



$$M_u = P_u a$$



$$P_u = \frac{M_u}{a} = \frac{30}{1} = 30kN$$

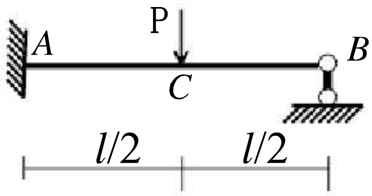
17.3 超静定梁的极限荷载

1. 超静定梁的破坏过程和极限荷载的特点

超静定梁有多余约束，出现一个塑性铰后仍是几何不变体系。

A截面先出现塑性铰，　$M_A = 3Pl/16 = M_u$

$$P = 16M_u/3l$$



再增加荷载

$$M_C = 5Pl/32 + \Delta Pl/4$$

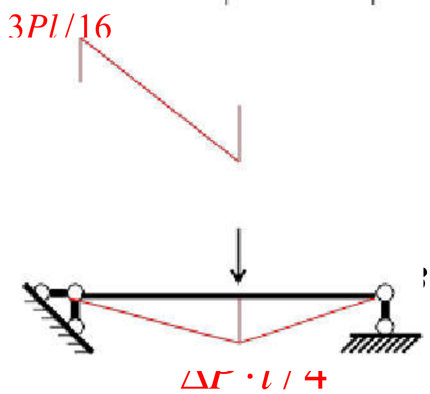
令 $M_C =$

$$M_u =$$

将P代入，

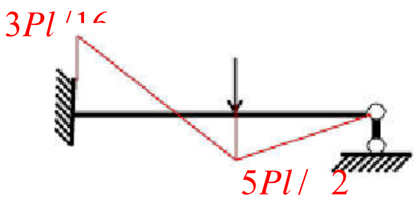
$$M_u = \frac{\ }{32}\times\frac{\ }{3l}M_u l + \Delta P l/4$$

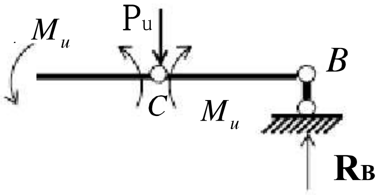
$$\Delta P = 2M_u/3l \qquad P_u = P + \Delta P = 6M_u/l$$



逐渐加载法（增量法）

从受力情况，可判断出塑性铰发生的位置应为A、C。
利用极限状态的平衡可直接求出极限荷载。

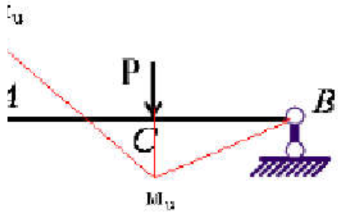




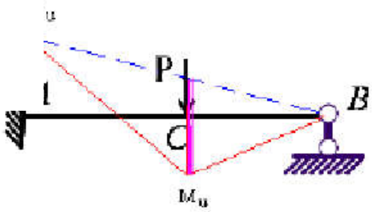
极

M_u

$$M_u = P_u \frac{l}{2} - R_B l$$



$$P_u = 6M_u / l$$



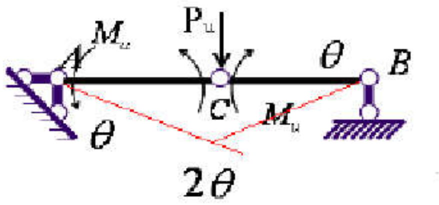
$$M_u + \frac{1}{2} M_u = \frac{P_u l}{4} \qquad P_u = 6M_u / l$$

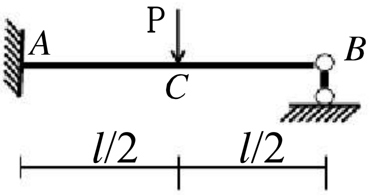
列虚功方程

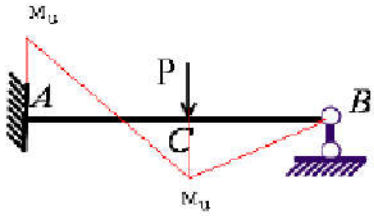
$$P_u \times \theta \times \frac{l}{2} = M_u \times 2\theta + M_u \theta$$

$$P_u = \frac{6}{l} M_u$$

- 机动法——虚功原理



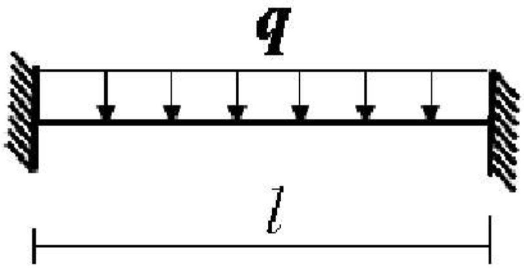


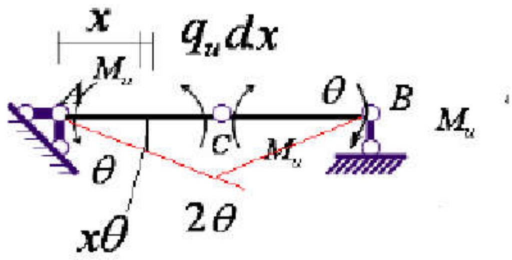


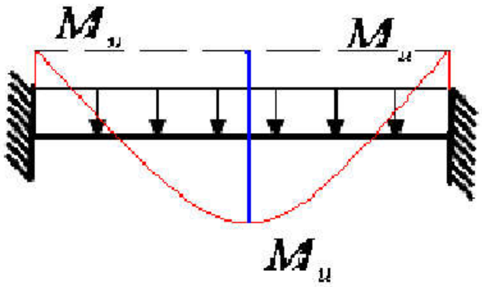
超静定结构极限荷载计算特点：

- 不考虑变形过程——破坏机构
- 不考虑变形条件——静力平衡
- 不受温度、支座移动影响

例:求图示等截面梁的极限荷载.已知梁的极限弯矩为M_u。



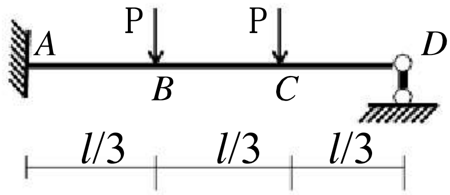




$$2\int_0^{l/2} q_u dx \cdot x\theta = M_u(\theta+\theta+2\theta)$$

$$q_u \times l^2/8 = M_u + M_u \qquad q_u = 16M_u/l^2$$

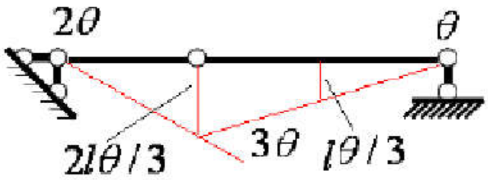
例：求图示等截面梁的极限荷载。极限弯矩为M_u。



解：

共有三种可能的破坏机构

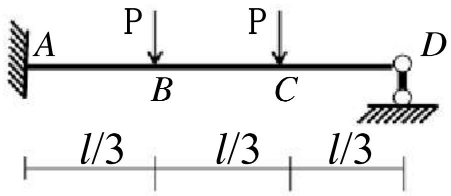
（1）A、B出现塑性铰



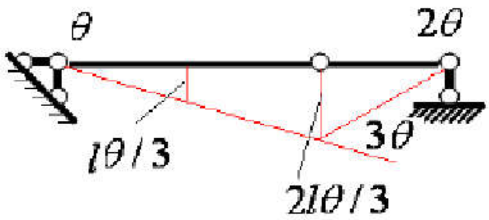
$$P_1^+ \times 2\theta \times \frac{l}{3} + P_1^+ \times \frac{l}{3}\theta = M_u \cdot 2\theta + M_u \cdot 3\theta$$

$$P_1^+ = \frac{5}{l} M_u$$

$$P_1^+ = \frac{5}{l} M_u$$



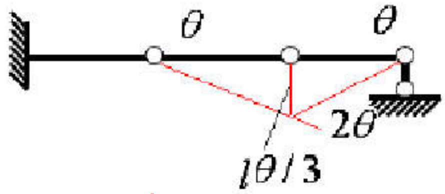
（2）A、C出现塑性铰



$$P_2^+ \times 2\theta \times \frac{l}{3} + P_2^+ \times \frac{l}{3}\theta = M_u \cdot \theta + M_u \cdot 3\theta$$

$$P_2^+ = \frac{4}{l} M_u$$

（3）B、C出现塑性铰

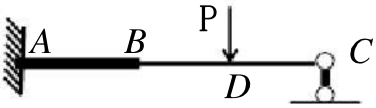


$$P_3^+ \times \theta \frac{l}{3} = M_u \cdot \theta + M_u \cdot 2\theta$$

$$P_3^+ = \frac{9}{l} M_u \qquad P_u = \min\left\{P_1^+ \quad P_2^+ \quad P_3^+\right\} = \frac{4}{l} M_u$$

例:求图示变截面梁的极限荷载.已知AB段的极限弯矩为$2M_u$,BC段为M_u。

解:



若B、D出现塑性铰，由虚功方程求得

$$P_2^+ = \frac{9}{l} M_u$$

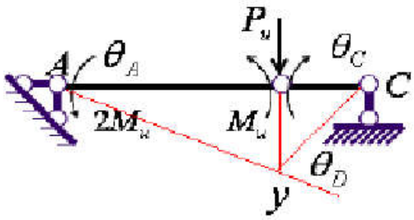
若**A**、**B**出现

由虚功方程求

$$P_3^+ = \frac{21}{l} M_u$$

A、 D出现塑性

$$\theta_A \frac{2l}{3} =$$



列虚功方程

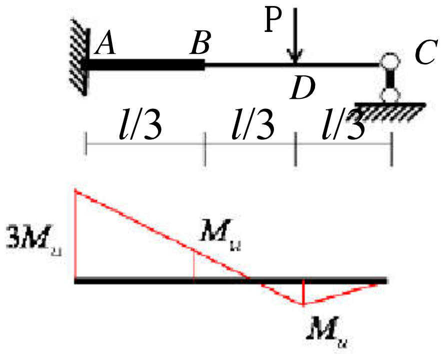
$$P_u y = 2M$$

$$P_1^+ = \frac{15}{2l} M_u$$

$$P_u y = 2M_u \frac{\quad}{2l} y + M_u \frac{\quad}{2l} y$$

$$_u \quad \overline{2l} \, {}_u$$

若B、D出现塑性铰，则B、D两截面的弯矩为M_u，



$$M_A = 3M_u$$

这种情况不会出现。

由前面例题可见:

若分析出塑性铰的位置，由结构的极限状态的平衡即可求出极限荷载。

2. 连续梁的极限荷载

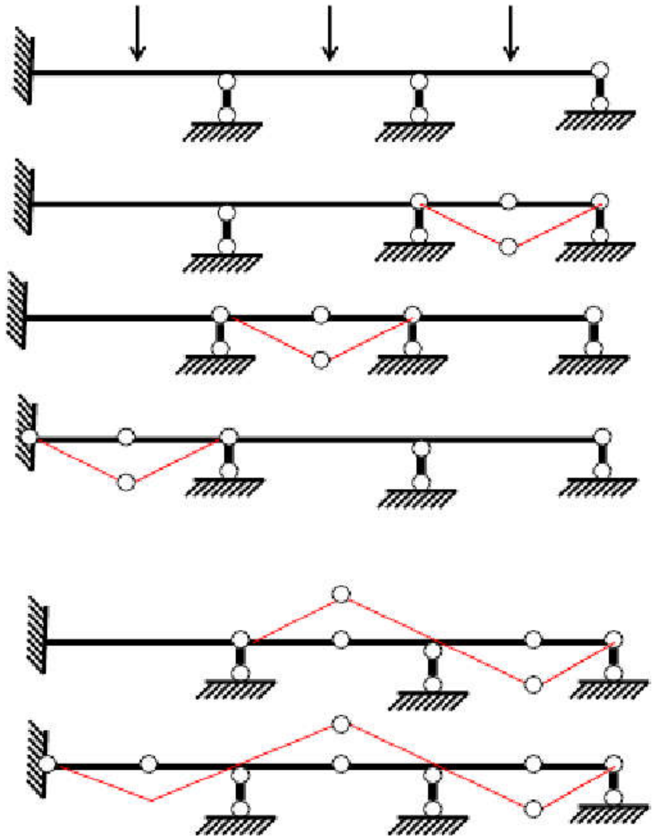
连续梁的破坏机构

一跨单独破坏

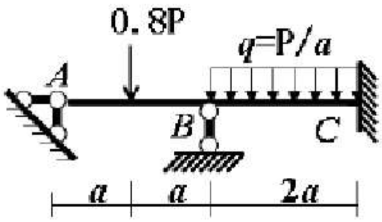
在各跨等截面、荷载方向相同、比例加载条件下，破坏机构只能在各跨内独立形成。

相邻跨联合破坏

不会出现

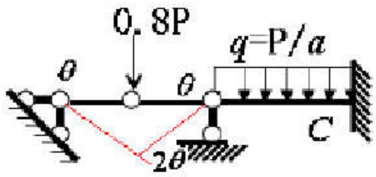


例：求图示连续梁的极限荷载。已知极限弯矩为M_u。



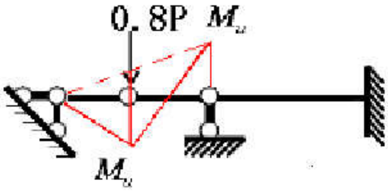
解：先分别求出各跨独自破坏时的可破坏荷载.

（1）AB跨破坏时



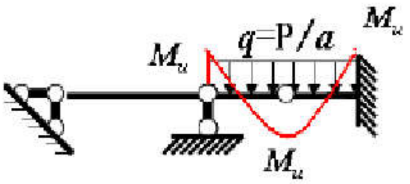
$$0.8P_1^+ \times a\theta = M_u \cdot 2\theta + M_u \cdot \theta$$

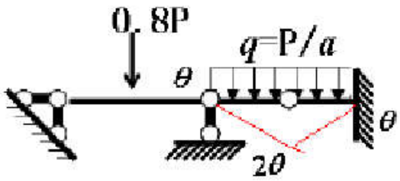
$$P_1^+ = 3.75M_u / a$$



$$\frac{1}{4} \times 0.8P_1^+ \times 2a = M_u + \frac{M_u}{2}$$

（2）BC跨破坏时 $P_1^+ = 3.75M_u / a$



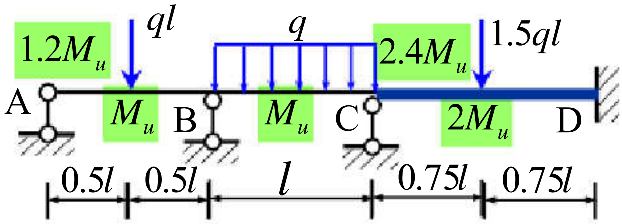


$$\frac{P_2^+}{a} \times \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\theta = M_u \cdot \theta + M_u \cdot 2\theta + M_u \theta$$

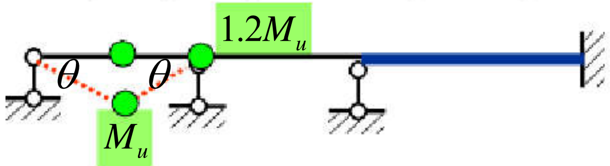
$$\frac{1}{8}\frac{P_2^+}{a}(2a)^2 = M_u + M_u$$

$$P_2^+ = 4M_u / a$$

$$P_u = 3.75M_u / a$$

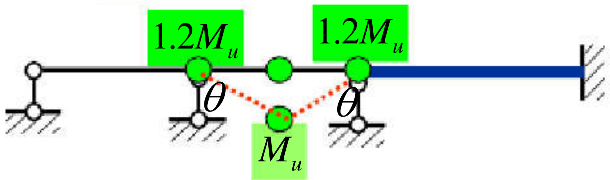


已知各跨的负极限弯矩为正极限弯矩的1.2倍，试求连续梁的极限荷载 q_u



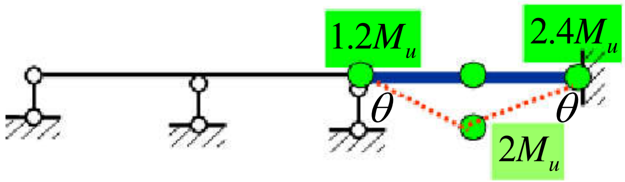
$$ql\frac{l}{2}\theta = 1.2M_u\theta + 2M_u\theta$$

$$q_1 = \frac{6.4}{l^2}M_u$$



$$q\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\theta = 2\times1.2M_u\theta + 2M_u\theta$$

$$q_2 = \frac{17.6}{l^2}M_u$$



$$\frac{3}{4}ql\frac{3l}{4}\theta = 1.2M_u\theta + 2.4M_u\theta + 4M_u\theta$$

$$q_3 = \frac{6.756}{l^2}M_u$$

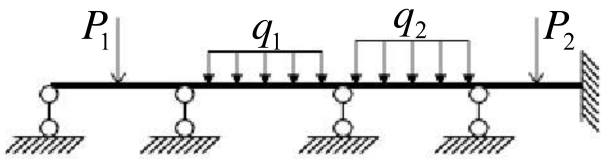
$$q_u = \frac{6.4}{l^2}M_u$$

17.4 比例加载时判定极限荷载的一般定理和基本方法

比例加载---作用于结构上的所有荷载按同一比例增加，且不出现
卸载的加载方式。

$$P_1 = \alpha_1 P \qquad P_2 = \alpha_2 P$$

$$q_1 = \beta_1 P \qquad q_2 = \beta_2 P$$



求极限荷载相当于求P的极限值。

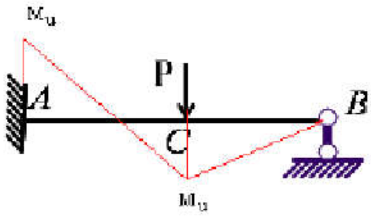
1. 几个定理

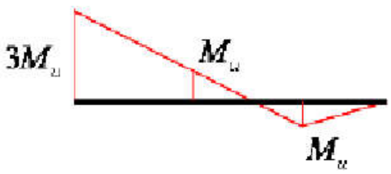
结构处于极限状态时，应同时满足下面三个条件：

1）单向机构条件；

2）内力局限条件；

3）平衡条件。





可破坏荷载---　　同时满足单向机构条件和平衡条件的荷载。P^+

可接受荷载---　　同时满足内力局限条件和平衡条件的荷载。P^-

极限荷载既是可破坏荷载又是可接受荷载。

1）基本定理：可破坏荷载恒不小于可接受荷载。

$$P^{+} \geq P^{-}$$

证明： 取任一可破坏荷载 P^{+} ，给与其相应的破坏机构虚位移，列虚功方程

$$P^{+}\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_{ui}\ \theta_{i} \qquad P^{+}\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left|M_{ui}\right| \cdot \left|\theta_{i}\right|$$

取任一可接受荷载 P^{-} ，在与上面相同的虚位移上列虚功方程

$$P^{-}\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_{i}^{-} \cdot \theta_{i} \qquad M_{i}^{-} \leq \left|M_{ui}\right| \qquad P^{+} \geq P^{-}$$

2）唯一性定理：极限荷载是唯一的。

证明：

设同一结构有两个极限荷载 P_{u1} 和 P_{u2} 。

若把 P_{u1} 看成可破坏荷载，P_{u2} 看成可接受荷载。

$$P_{u1} \geq P_{u2}$$

若把 P_{u2} 看成可破坏荷载，P_{u1} 看成可接受荷载。

$$P_{u1} \leq P_{u2}$$

故有 $P_{u1} = P_{u2}$

$$P^{+} \geq P^{-}$$

3）上限定理（极小定理）：极限荷载是所有可破坏荷载中最小的。

证明：　　由于极限荷载 P_u 是可接受荷载，由基本定理

$$P_u \leq P^+$$

4）下限定理（极大定理）：极限荷载是所有可接受荷载中最大的。

证明：　　由于极限荷载 P_u 是可破坏荷载，由基本定理

$$P_u \geq P^-$$

2. 计算极限荷载的机构法和试算法—定理应用

(1)确定极限荷载的·上下限

$$P^{-} \le P_u \le P^{+}$$

(2)求极限荷载的近似值

$$P_u \approx \frac{P^{-} + P^{+}}{2}$$

（3）求极限荷载的精确值

极小定理的应用

穷举法：机构法

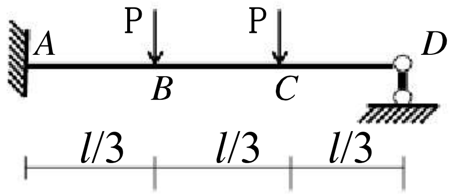
列出所有可能的破坏机构，用平衡条件求出这些破坏机构对应的可破坏荷载，其中最小者即是极限荷载。

试算法：

每次任选一种破坏机构，由平衡条件求出相应的可破坏荷载，再检验是否满足内力局限性条件；若满足，该可破坏荷载既为极限荷载；若不满足，另选一个破坏机构继续运算。

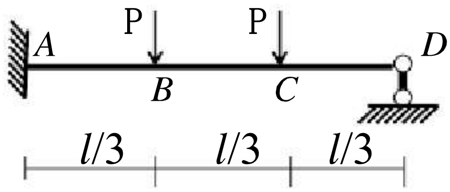
唯一性定理的应用

例：求图示等截面梁的极限荷载。极限弯矩为M_u。

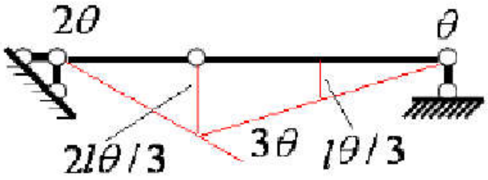


解：1. 用穷举法求解

共有三种可能的破坏机构

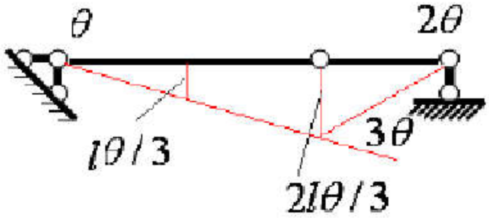


（1）A、B出现塑性铰



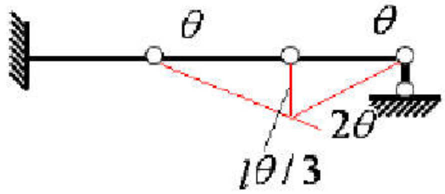
$$P_1^+ = \frac{5}{l} M_u$$

（2）A、C出现塑性铰



$$P_2^+ = \frac{4}{l} M_u$$

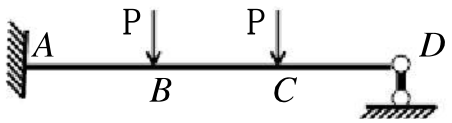
（3）B、C出现塑性铰



$$P_3^+ = \frac{9}{l} M_u$$

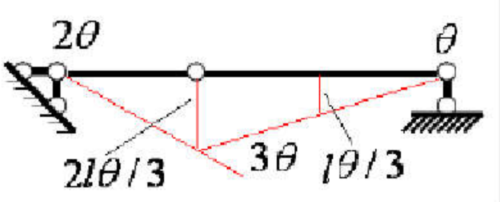
$$P_u = \frac{4}{l} M_u$$

2.用试算法求解



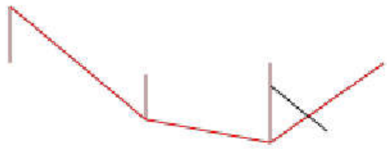
（1）选A、B出现塑性铰形成的破坏机构

$P^{+}\times 2\theta\times\frac{l}{}$ $\frac{l}{}$



$P^{+}=\frac{5}{l}$

由**MA=M** $R_{D}=\frac{4}{l}M_{u}$

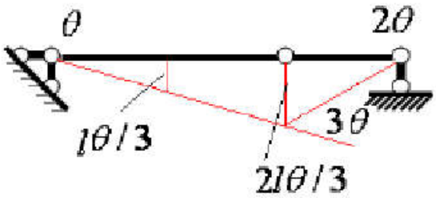


E

局限性

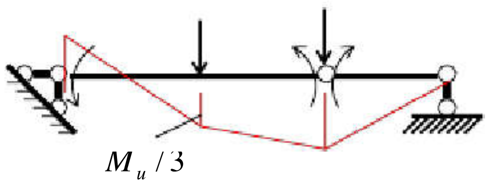
（2）

$P^{+}\times 2\theta\times-$ —



—

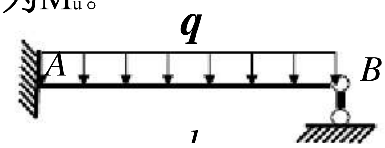
由作



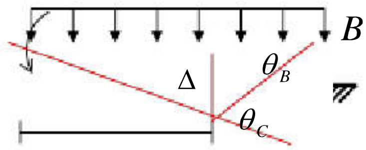
" l "

例:求图示等截面梁的极限荷载.已知梁的极限弯矩为Mu。

解: 用上限定理(极小定理)计算。



$$q^{+}\cdot\frac{1}{\ }l\Delta - M\theta - M\theta = 0$$



$$\theta_B=\frac{\Delta}{l-x};\qquad \theta_A=\frac{\Delta}{x}$$

$$\theta_C=\theta_A+\theta_B=(\frac{1}{l-x}+\frac{1}{x})\Delta$$

$$q^{+}\cdot\frac{\Delta l}{2}-M_u\frac{\Delta}{x}-M_u(\frac{1}{l-x}+\frac{1}{x})\Delta=0$$

$$q^{+}\cdot\frac{l}{2}-M_u\frac{1}{x}-M_u(\frac{1}{l-x}+\frac{1}{x})=0$$

$$x_1=(2+\sqrt{2})l$$

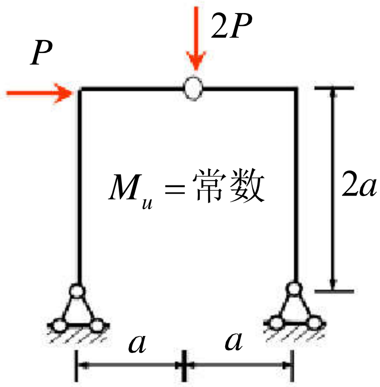
$$x_2=(2-\sqrt{2})l$$

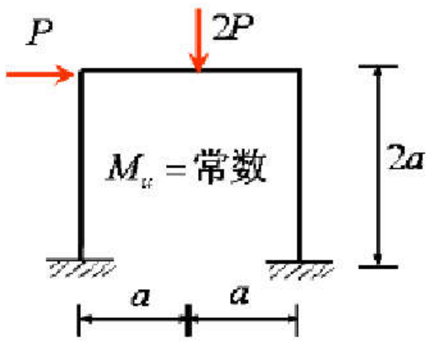
$$q^{+}= \quad x(l-x) \quad l$$

$$q_u=q^{+}_{\min}=11.66\frac{M_u}{l^2}$$

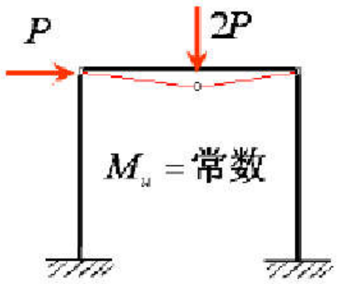
$$\frac{dq^{+}}{dx}=0$$

17.5 刚架的极限荷载举例

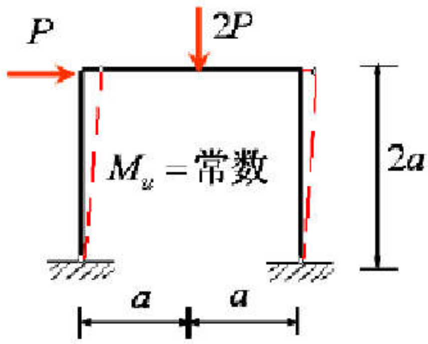




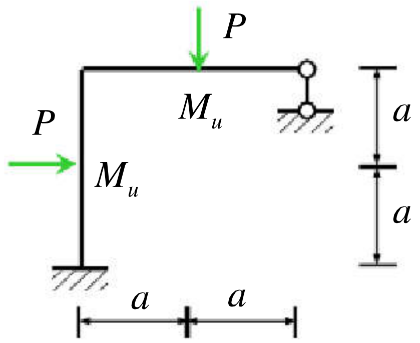
P
2P
M_u = 常数
2a
a
a

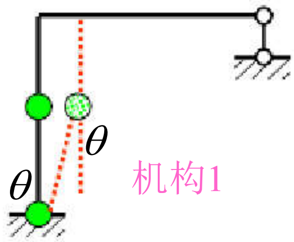


P
2P
M_u = 常数

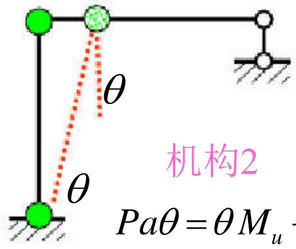


P
2P
M_u = 常数
2a
a
a

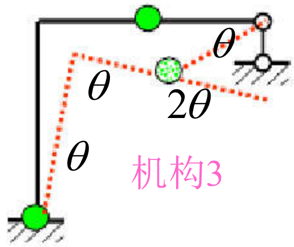




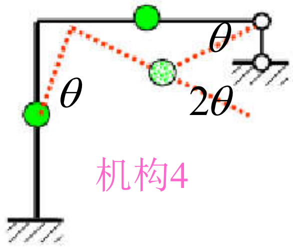
$$Pa\theta = \theta M_u + \theta M_u$$



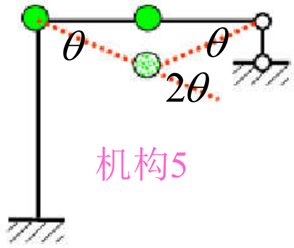
$$Pa\theta = \theta M_u + \theta M_u$$



$$Pa\theta + Pa\theta = \theta M_u + 2\theta M_u$$



$$Pa\theta = \theta M_u + 2\theta M_u$$



$$Pa\theta = \theta M_u + 2\theta M_u$$

$$\boxed{P_u = \frac{3M_u}{2a}}$$