化模型

优化模型

简单的优化模型（静态优化）

- 现实世界中普遍存在着优化问题.
- 静态优化问题指最优解是数(不是函数).
- 建立静态优化模型的关键之一是根据建模目的确定恰当的目标函数.
- 求解静态优化模型一般用微分法.

3.1　存贮模型

问题

配件厂为装配线生产若干种产品，轮换产品时因更换设备要付生产准备费，产量大于需求时要付贮存费. 该厂生产能力非常大，即所需数量可在很短时间内产出.

已知某产品日需求量100件，生产准备费5000元，贮存费每日每件1元. 试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（生产周期），每次产量多少，使总费用最小.

要求

不只是回答问题，而且要建立生产周期、产量与需求量、准备费、贮存费之间的关系.

问题分析与思考

日需求100件，准备费5000元，贮存费每日每件1元.

- 每天生产一次, 每次100件,无贮存费,准备费5000元.

每天费用5000元

- 10天生产一次, 每次1000件，贮存费900+800+…+100 =4500元，准备费5000元，总计9500元.

平均每天费用950元

- 50天生产一次,每次5000件, 贮存费4900+4800+…+100 =122500元，准备费5000元，总计127500元.

平均每天费用2550元

10天生产一次, 平均每天费用最小吗?

问题分析与思考

- 周期短，产量小 ⇨ 贮存费少，准备费多
- 周期长，产量大 ⇨ 准备费少，贮存费多

⇨ 存在最佳的周期和产量，使总费用（二者之和）最小.

- 这是一个优化问题，关键在建立目标函数.

显然不能用一个周期的总费用作为目标函数.

目标函数——每天总费用的平均值.

模型假设

1. 产品每天的需求量为常数 r;

2. 每次生产准备费为 c_1, 每天每件产品贮存费为 c_2;

3. T天生产一次（周期）, 每次生产Q件，当贮存量为零时，Q件产品立即到来（生产时间不计）；

4. 为方便起见，时间和产量都作为连续量处理.

建模目的

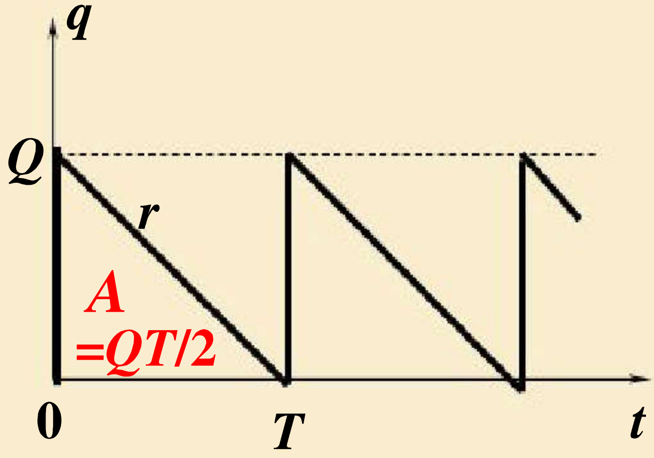
设 r, c_1, c_2 已知，求T, Q 使每天总费用的平均值最小.

模型建立

离散问题连续化

贮存量表示为时间的函数 $q(t)$

t=0生产Q件，$q(0)=Q$, $q(t)$以需求速率r递减，$q(T)=0$.



$$Q = rT$$

一周期贮存费为

$$c_2\int_0^T q(t)\mathrm{d}t = c_2\frac{QT}{2}$$

一周期总费用

$$\tilde{C} = c_1 + c_2\frac{QT}{2} = c_1 + c_2\frac{rT^2}{2}$$

每天总费用平均值（目标函数）

$$C(T) = \frac{\tilde{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 rT}{2}$$

模型求解　求 T 使 $C(T)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2 rT}{2} \to \min$

$$\frac{dC}{dT}=0 \Rightarrow T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

模型解释

定性分析　$c_1\uparrow \Rightarrow T,Q\uparrow$　　$c_2\uparrow \Rightarrow T,Q\downarrow$　　$r\uparrow \Rightarrow T\downarrow, Q\uparrow$

敏感性分析　**参数 c_1, c_2, r 的微小变化对 T,Q 的影响**

T 对 c_1 的(相对)敏感度　$S(T,c_1)=\frac{\Delta T/T}{\Delta c_1/c_1}\approx\frac{dT}{dc_1}\frac{c_1}{T}=\frac{1}{2}$　**c_1 增加1%，T 增加0.5%**

$S(T,c_2)=-1/2$, $S(T,r)=-1/2$　c_2 或 r 增加1%，T 减少0.5%

模型应用

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

- 回答原问题 c_1=5000, c_2=1，r=100

$\Rightarrow$ T=10(天), Q=1000(件), C=1000(元)

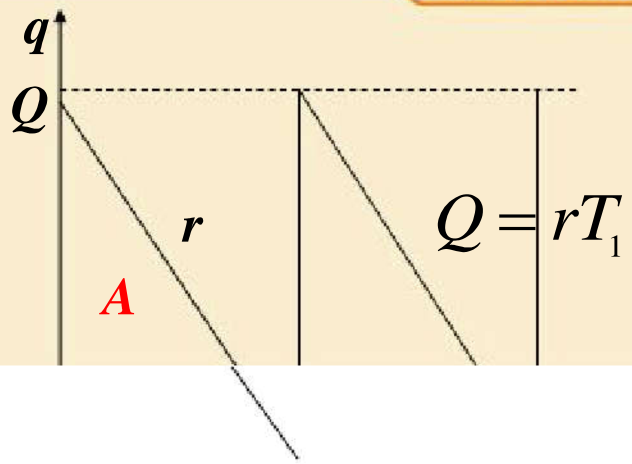
思考: 为什么与前面计算的C=950元有差别?

- 用于订货供应情况: 每天需求量 r，每次订货费 c_1, 每天每件贮存费 c_2 , T天订货一次(周期), 每次订货Q件，当贮存量降到零时，Q件立即到货.

经济批量订货公式（EOQ公式）

不允许缺货的存贮模型

允许缺货的存贮模型



当贮存量降到零时仍有需求***r***, 出现缺货，造成损失.

原模型假设：贮存量降到零时

Q件立即生产

现假设：允许

周期***T***, ***t*=*T***$_1$

一周期贮存费 $c_2\int_0^{T_1} q(t)\mathrm{d}t$

一周期缺货费 $c_3\int_{T_1}^{T} |q(t)|\mathrm{d}t$

一周期总费用

$$\bar{C} = c_1 + c_2\frac{QT_1}{2} + c_3\frac{r(T-T_1)^2}{2}$$

允许缺货的存贮模型

一周期总费用 $\overline{C}=c_1+\frac{1}{2}c_2QT_1+\frac{1}{2}c_3r(T-T_1)^2$

每天总费用平均值（目标函数）

$$C(T,Q)=\frac{\overline{C}}{T}=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2Q^2}{2rT}+\frac{c_3(rT-Q)^2}{2rT}$$

求 T,Q 使 $C(T,Q)\to\min$

$$\frac{\partial C}{\partial T}=0,\ \frac{\partial C}{\partial Q}=0$$

为与不允许缺货的存贮模型相比，T记作T'，Q记作Q'.

$$T'=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$Q'=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

允许缺货模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2} \frac{c_2 + c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2} \frac{c_3}{c_2 + c_3}}$$

不允许缺货模型

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

$$Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

记 $\mu = \sqrt{\dfrac{c_2 + c_3}{c_3}}$

$$T' = \mu T, \quad Q' = \frac{Q}{\mu}$$

不允许缺货

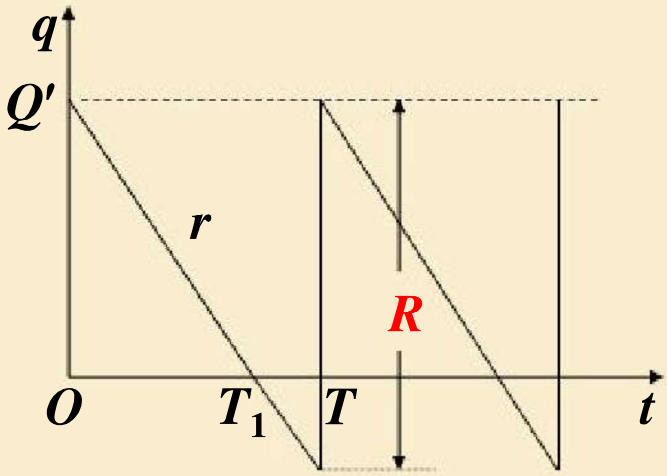
$\mu > 1 \Rightarrow T' > T, \quad Q' < Q \qquad c_3 \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$

$\Leftrightarrow c_3 \to \infty \Rightarrow \mu \to 1 \Rightarrow T' \to T, \ Q' \to Q$

允许缺货模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$



注意：缺货需补足

Q'~每周期初的存贮量

每周期的生产量
R（或订货量）

$$R = rT' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$R = \mu Q > Q$$

Q~不允许缺货时的产量(或订货量)

存 贮 模 型

- 存贮模型(EOQ公式)是研究批量生产计划的重要理论基础, 也有实际应用.
- 建模中未考虑生产费用, 为什么?在什么条件下可以不考虑(习题1)?
- 建模中假设生产能力为无限大(生产时间不计), 如果生产能力有限(大于需求量的常数), 应作怎样的改动(习题2)?

3.2 生猪的出售时机

问题 饲养场每天投入4元资金，用于饲料、人力、设备，估计可使80kg重的生猪体重增加2kg.

市场价格目前为8元/kg，但是预测每天会降低0.1元，问生猪应何时出售?

如果估计和预测有误差，对结果有何影响?

分析 投入资金使生猪体重随时间增加，出售单价随时间减少，故存在最佳出售时机，使利润最大.

建模及求解

估计r=2， g=0.1

若当前出售，利润为80×8=640（元）

t 天出售

生猪体重 $w=80+rt$　　销售收入 $R=pw$

出售价格 $p=8-gt$　　资金投入 $C=4t$

利润 $Q=R-C=pw-4t$

$$Q(t)=(8-gt)(80+rt)-4t$$

求 t 使$Q(t)$最大

$$t=\frac{4r-40g-2}{rg}=10$$

$Q(10)=660>640$

10天后出售，可多得利润20元.

敏感性分析

$$t=\frac{4r-40g-2}{rg}$$

估计r=2， g=0.1

研究 r, g微小变化时对模型结果的影响.

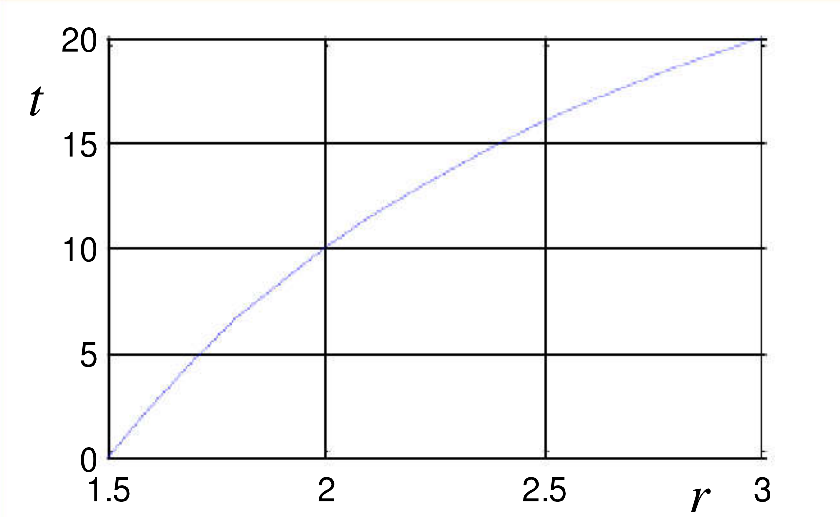
- 设g=0.1不变

$$t=\frac{40r-60}{r},\quad r\ge 1.5$$

t 对r 的（相对）敏感度

$$S(t,r)=\frac{\Delta t/t}{\Delta r/r}\approx\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\frac{r}{t}$$

$$S(t,r)\approx\frac{60}{40r-60}=3$$



生猪每天增加的体重 r 变大1%，出售时间推迟3%.

敏感性分析

$$t = \frac{4r - 40g - 2}{rg}$$

估计r=2，　g=0.1

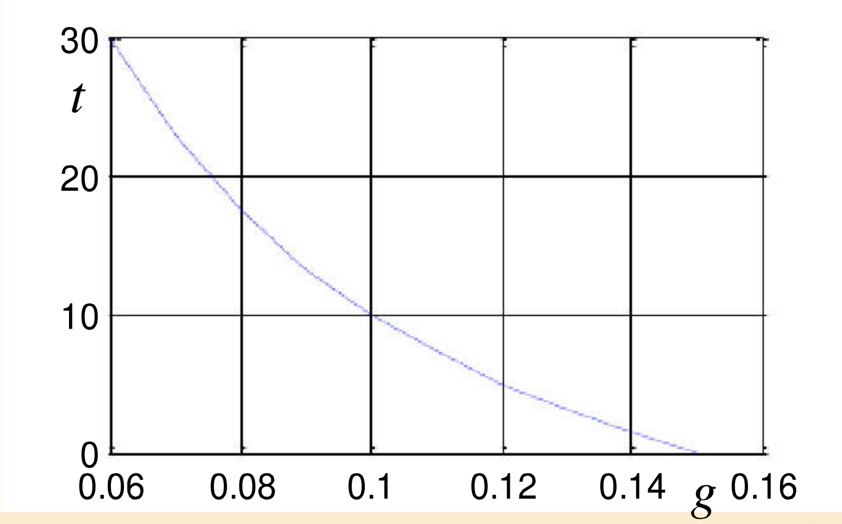
研究 r, g微小变化时对模型结果的影响.

- 设r=2不变　　$t = \frac{3 - 20g}{g}, \quad 0 \le g \le 0.15$

t 对g的（相对）敏感度

$$S(t, g) = \frac{\Delta t / t}{\Delta g / g} \approx \frac{dt}{dg} \frac{g}{t}$$

$$S(t, g) = -\frac{3}{3 - 20g} = -3$$



生猪价格每天的降低g增加1%，出售时间提前3%.

强健性分析

研究 r, g 不是常数时对模型结果的影响.

$w=80+rt \to w = w(t)$

$p=8-gt \to p = p(t)$

$\Rightarrow$ 利润 $Q(t) = p(t)w(t) - 4t$

$Q'(t) = 0 \Rightarrow p'(t)w(t) + p(t)w'(t) = 4$

$p'(t)w(t)$：每天收入的增值　　4：每天投入的资金

保留生猪直到每天收入的增值等于每天的费用时出售.

由 $S(t,r)=3$　若 $1.8 \le w' \le 2.2$(10%), 则 $7 \le t \le 13$（30%）

建议过一周后($t=7$)重新估计 p, p', w, w', 再作计算.

问题

问题分析

• 损失费

• 救援费

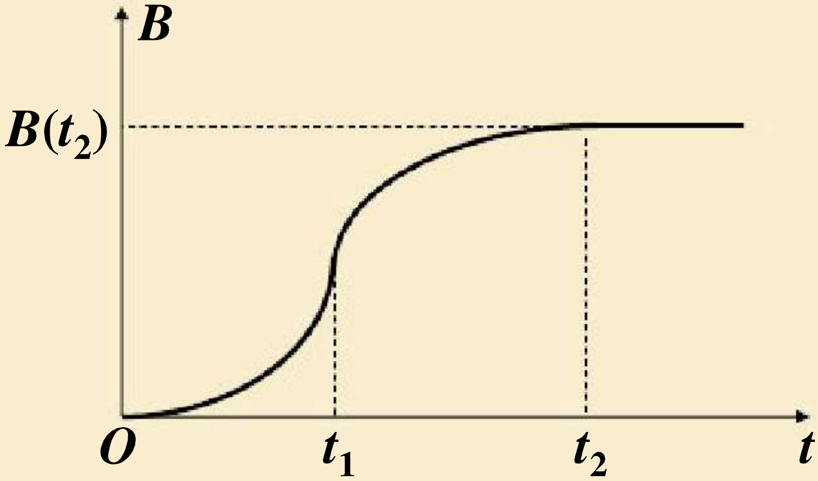
存在恰当的x，使$f_1(x), f_2(x)$之和最小.

问题分析

- 关键是对$B(t)$作出合理的简化假设.

失火时刻$t=0$, 开始救火时刻t_1, 灭火时刻t_2, 画出时刻t森林烧毁面积$B(t)$的大致图形.

分析$B(t)$比较困难, 转而讨论单位时间烧毁面积 dB/dt (森林烧毁的速度).



模型假设

1）$0 \le t \le t_1$, $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 与 t成正比，系数β(火势蔓延速度).

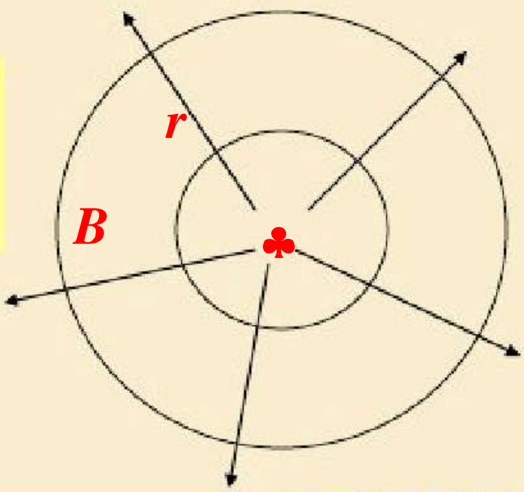
2）$t_1 \le t \le t_2$, β降为$\beta-\lambda x$ (λ为队员的平均灭火速度).

3）$f_1(x)$与$B(t_2)$成正比，系数c_1 (烧毁单位面积损失费）

4）每个队员的单位时间灭火费用c_2, 一次性费用c_3.

假设1）的解释

火势以失火点为中心，均匀向四周呈圆形蔓延，半径 r与 t 成正比.



⇨ 面积 B与 t^2 成正比

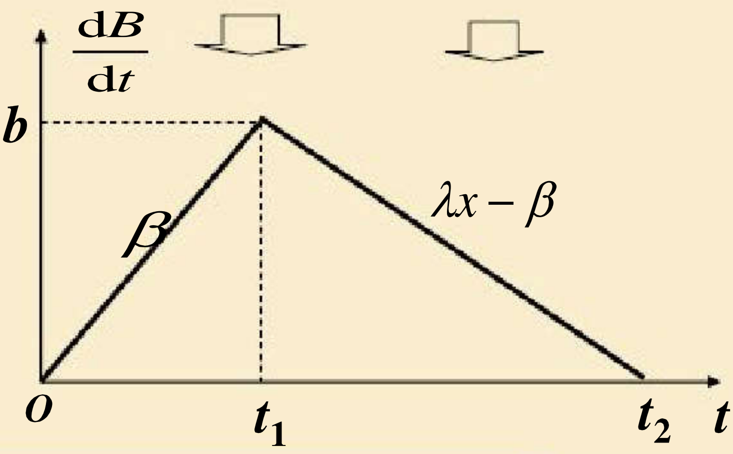
⇨ $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$与 t 成正比

模型建立

假设1）　假设2）

$$b=\beta t_1,\quad t_2-t_1=\frac{b}{\lambda x-\beta}$$

$$\Rightarrow\quad t_2=t_1+\frac{\beta t_1}{\lambda x-\beta}$$



$$B(t_2)=\int_0^{t_2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{bt_2}{2}=\frac{\beta t_1^2}{2}+\frac{\beta^2t_1^2}{2(\lambda x-\beta)}$$

假设3）4）　$\Rightarrow\quad f_1(x)=c_1B(t_2),\quad f_2(x)=c_2x(t_2-t_1)+c_3x$

目标函数——总费用　$C(x)=f_1(x)+f_2(x)$

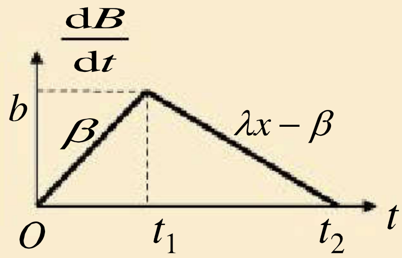
模型建立 目标函数——总费用

$$C(x)=\frac{c_1\beta t_1^2}{2}+\frac{c_1\beta^2 t_1^2}{2(\lambda x-\beta)}+\frac{c_2\beta t_1 x}{\lambda x-\beta}+c_3 x$$

其中 $c_1, c_2, c_3, t_1, \beta, \lambda$ 为已知参数

模型求解 求 x 使 $C(x)$ 最小

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=0 \Rightarrow x=\frac{\beta}{\lambda}+\beta\sqrt{\frac{c_1\lambda t_1^2+2c_2 t_1}{2c_3\lambda^2}}$$



结果解释 β/λ 是火势不继续蔓延的最少队员数

结果解释

$$x=\frac{\beta}{\lambda}+\beta\sqrt{\frac{c_1\lambda t_1^2+2c_2t_1}{2c_3\lambda^2}}$$

c_1~烧毁单位面积损失费, c_2~每个队员单位时间灭火费, c_3~每个队员一次性费用, t_1~开始救火时刻, β~火势蔓延速度, λ~每个队员平均灭火速度.

$c_1, t_1, \beta\uparrow \rightarrow x\uparrow$　　　　$c_3, \lambda\uparrow \rightarrow x\downarrow$

$c_2\uparrow\rightarrow x\uparrow$　　为什么?

模型应用

c_1,c_2,c_3已知, t_1可估计, β,λ可设置一系列数值

由模型决定队员数量 x

3.4 消费者的选择

背景

消费者在市场里如何分配手里一定数量的钱，选择购买若干种需要的商品.

根据经济学的一条最优化原理——"消费者追求最大效用"，用数学建模的方法帮助消费者决定他的选择.

- 假定只有甲乙两种商品供消费者购买，
- 建立的模型可以推广到任意多种商品的情况.

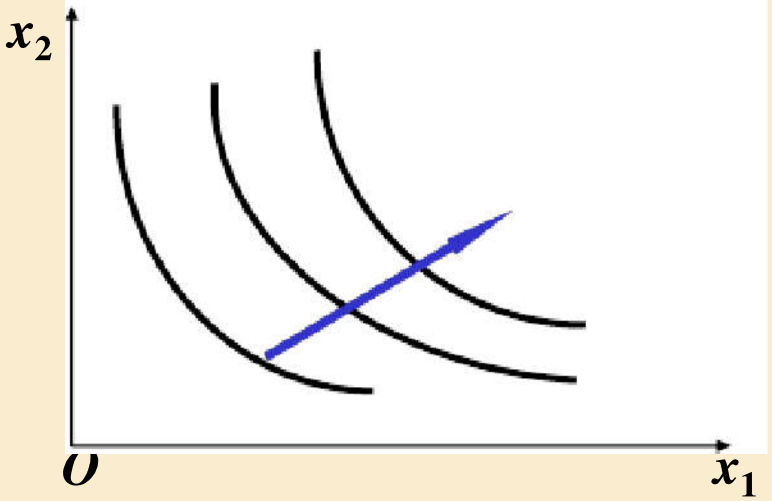
效用函数

当消费者购得数量分别为x_1,
得到的效用可用函数$u\ (x_1, x_2$

利用等高线概念在x_1, x_2平面
$u\ (x_1, x_2)=c$ 称为等效用线 —

互不相交的曲线.

等效用线就是
“ 实物交换模型”
中的无差别曲线,
效用就是那里的满
意度.



效用最大化模型 x_1, x_2~购得甲乙两种商品数量

p_1, p_2~甲乙两种商品的单价，y~消费者准备付出的钱

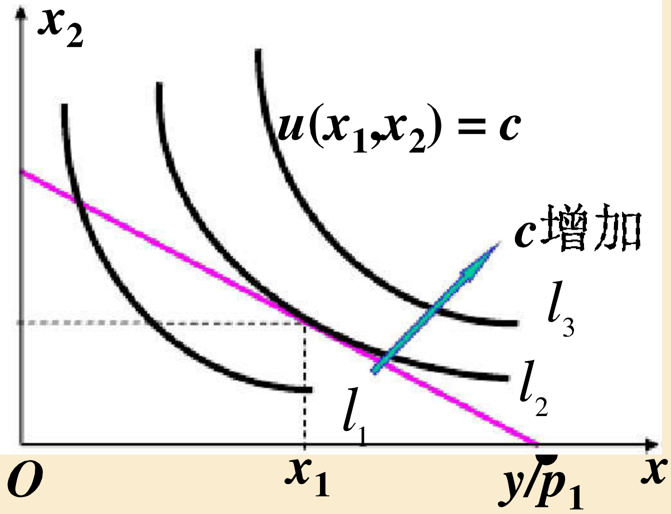
在条件 $p_1x_1+p_2x_2=y$ 下使效用函数$u(x_1, x_2)$最大.

几何分析 消费线AB

$u(x_1, x_2)=c$ 单调减、下凸、互不相交.

AB必与一条等效用线相切于Q点 (消费点).

$Q(x_1, x_2)$ 唯一.



模型求解

$$\max \ u(x_1,x_2)$$
$$\text{s.t.} \ p_1x_1+p_2x_2=y$$

引入拉格朗日乘子λ构造函数

$$L(x_1,x_2,\lambda)=u(x_1,x_2)+\lambda(y-p_1x_1-p_2x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1,x_2}}{\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_1,x_2}}=\frac{p_1}{p_2}$$

与几何分析得到的 Q 一致

等效用线$u(x_1,x_2)=c$的斜率 $\quad \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=-\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$

消费线AB的斜率 $\quad -p_1/p_2$

结果解释

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}$ ~ 边际效用——商品数量 增加一个单位时效用的增量

当商品边际效用之比等于它们价格之比时效用函数最大.

效用函数的构造

等效用线$u(x_1, x_2)=c$ 所确定的函数 $x_2(x_1)$单调减、下凸.

充分条件

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} > 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} < 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} < 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} > 0$$

- 解释条件中正负号的实际意义

效用函数$u(x_1,x_2)$几种常用的形式

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$1.\ u = \left(\frac{\alpha}{x_1} + \frac{\beta}{x_2}\right)^{-1},\ \alpha, \beta > 0$$

$$\Rightarrow \frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} = \eta\sqrt{\frac{p_1}{p_2}},\ \eta = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

- 购买两种商品费用之比与二者价格之比的平方根成正比, 比例系数是参数α与β之比的平方根.
- $u(x_1,x_2)$中参数 α, β分别度量甲乙两种商品对消费者的效用，或者消费者对甲乙两种商品的偏爱 .

效用函数$u(x_1,x_2)$几种常用的形式

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$2.\ u=x_1^{\lambda}x_2^{\mu},\ 0<\lambda,\mu<1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_1x_1}{p_2x_2}=\frac{\lambda}{\mu}$$

- 购买两种商品费用之比只取决于λ,μ, 与价格无关.
- $u(x_1,x_2)$中λ,μ分别度量两种商品的效用或者偏爱.

$$3.\ u=(a\sqrt{x_1}+b\sqrt{x_2})^2,\ a,b>0$$

实际应用时根据对最优解的分析，决定采用哪种效用函数，并由经验数据确定其参数.

效用最大化模型应用举例

例1　征销售税还是征收入税

政府从消费者身上征税的两种办法:

- 销售税 ~ 根据消费者购买若干种商品时花的钱征税
- 收入税 ~ 根据消费者的收入征收所得税

利用图形从效用函数和效用最大化的角度讨论

征税前设甲乙两种商品的单价为p_1, p_2，消费者准备花的钱为y, 等效用线为$u(x_1, x_2)=c$，消费点为$Q(x_1, x_2)$.

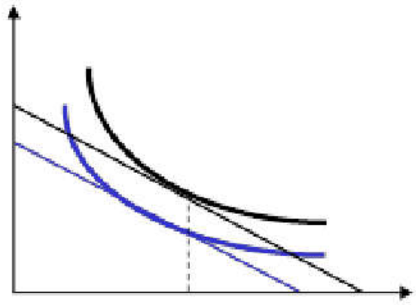
例1 征销售税还是征收入税

征税前的消费点Q

对甲商品征销售税, 税率为p_0

$$(p_1+p_0)x_1+p_2x_2=y$$

- 消费线AB_1, B_1在B的左边
- AB_1与l_1相切于$Q_1(x_1^*, x_2^*)$
- 政府得到的销售税额 $p_0x_1^*$



若改为征 收入税

- 征收的税额与销售税额 $p_0x_1^*$相同 $p_1x_1+p_2x_2=y-p_0x_1^*$
- 消费线A_2B_2与l_2相切于Q_2, 可证B_2在B_1的右边.

l_2在l_1上？ l_2在l_1下？	如果l_2在l_1上方，Q_2的效用函数值将大于Q_1, 对消费者来说征收入税比征销售税好.

例2　价格补贴给生产者还是消费者

政府为鼓励商品的生产或者减少消费者的负担所采取

补贴前的消费点Q

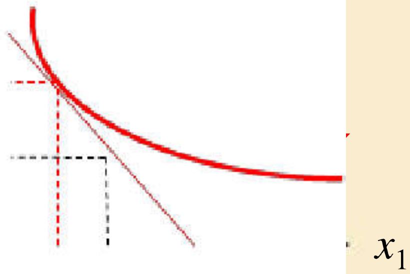
影响

消费线 $A'B'$过Q, 与l'相切于Q'

$Q'(x_1', x_2')$的效用函数值大于Q

$\Rightarrow$ 对消费者更有利

$x_1' < x_1^*,\ x_2' > x_2^*$ $\Rightarrow$ 对甲商品生产不利



3.5 生产者的决策

背景 在市场经济中"消费者追求最大效用"，生产者呢？

生产者或供销商根据产品的成本和产值决定投入，按照商品的销售情况制订价格.

根据经济学的又一条最优化原理——"生产者追求最大利润"，用数学建模的方法帮助生产者或供销商做出决策.

最大利润模型 假定产品可以全部销售出去变成收入

x~产品产量　　$f(x)$ ~ 产值(收入)，$c(x)$ ~ 成本

利润 $r(x) = f(x) - c(x)$

达到最大利润的产量 x^* $\Rightarrow r'(x^*) = 0 \Rightarrow f'(x^*) = c'(x^*)$

$f'(x)$ ~ 边际产值—— x变化一个单位时产值的改变量

$c'(x)$ ~ 边际成本—— x变化一个单位时成本的改变量

最大利润在边际产值等于边际成本时达到.

最优定价模型

在产品可以全部销售出去的条件下确定商品价格，使利润最大.

- 产量x等于销量，数量无限制.
- 收入与x 成正比，系数 p 即价格.
- 成本与 x 成正比，系数 c 即边际成本.
- 销量x 依于价格 p, $x(p)$是减函数.

简化假设 $x(p)=a-bp,\ a,b>0$

利润 $r(p)=px-cx=(p-c)(a-bp)$

求p使 $r(p)$ 最大

最优定价模型

利润 $r(p)=(p-c)(a-bp)$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}=0 \Rightarrow p^*=\frac{c}{2}+\frac{a}{2b}$$ ~ 利润达到最大的定价

$$x(p)=a-bp \Rightarrow b=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}$$

b ~弹性系数——价格上升1单位时销量的下降幅度（需求对价格的敏感度）

$b\uparrow \rightarrow p^*\downarrow$

a ~ 绝对需求(***p***很小时的需求)

$a\uparrow \rightarrow p^*\uparrow$

c / 2 ~ 成本的一半

a, b可由***p***和***x***的统计数据作拟合得到

投资费用一定下的产值最大模型

x_1, x_2~甲乙产品的产量　　$f(x_1, x_2)$~产值函数

c_1, c_2~甲乙产品的单位成本　　s~总投资费用

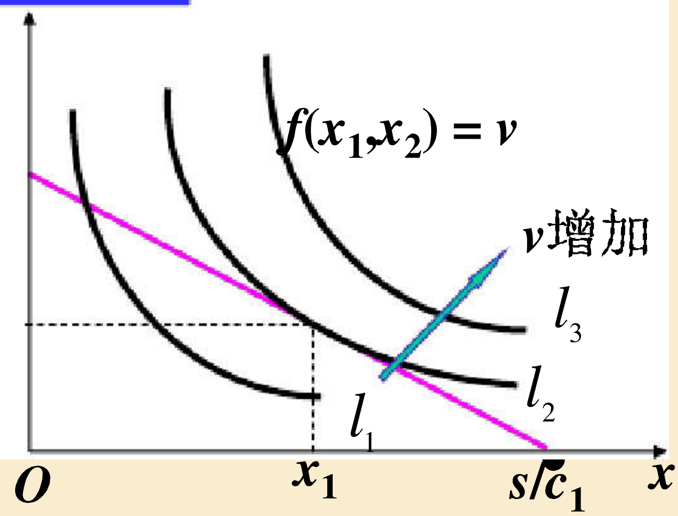
在条件 $c_1x_1 + c_2x_2 = s$ 下求 x_1, x_2 使产值 $f(x_1, x_2)$ 最大.

几何分析　**与效用最大化模型类似**

等产值线 $f(x_1, x_2)=v$ 单调减、下凸、互不相交.

下凸~稀缺产品的产值更高

投资线 AB 必与一条等产值线相切于 Q 点.



投资费用一定下的产值最大模型

在条件 $c_1x_1+c_2x_2=s$ 下求 x_1, x_2 使产值 $f(x_1, x_2)$ 最大.

用拉格朗日乘子法求条件极值

最优解 (x_1, x_2) 满足 $$\frac{\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1, x_2}}{\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1, x_2}}=\frac{c_1}{c_2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ ~边际产值

当两种产品的边际产值之比等于它们的价格之比时，产值达到最大.

产值最大与费用最小的对偶关系

$x=(x_1, x_2)^T$, $c=(c_1, c_2)$

投资费用一定的产值最大模型 $g(s,c)=\max\{f(x) \mid cx \le s\}$

$g(s,c)$~给定的单位成本c下费用不超过s的最大产值.

产值一定的投资费用最小模型 $s(v,c)=\min\{cx \mid f(x) \ge v\}$

$s(v,c)$~给定的单位成本c下产值不低于v的最小费用.

对偶极值问题　只要解决其中之一，另一个就迎刃而解

- 成本函数是简单的线性函数 $c(x)$.
- 产值函数$f(x)$ 在实际生产过程中常常难以确定.

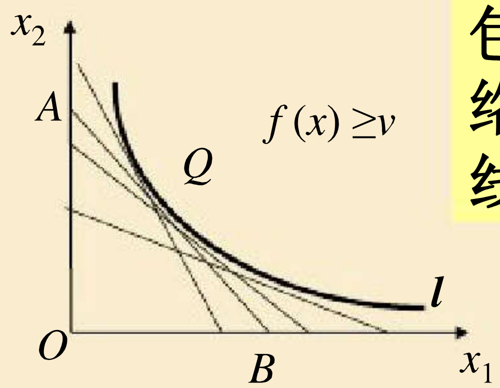
产值最大与费用最小对偶关系的应用

——从成本函数确定产值函数的图解法

$$s(v,c)=\min\{cx \mid f(x)\geq v\}$$

$x=(x_1, x_2)^T$, $c=(c_1, c_2)$

- 给定v和c求得最小费用$s(v,c)=s$
- 画出直线AB: $cx=s$
- $f(x)\geq v$的点在AB上方, 且AB上有一点Q位于l: $f(x)=v$上
- 改变c重复上述过程，得到一系列不同斜率的直线



包络线

- 区域$f(x)\geq v$在直线上方, 其边界是等产值线l: $f(x)=v$
- 改变v重复上述过程, 得到一系列等产值线

3.6 血管分支

背景

机体提供能量维持血液在血管中的流动.

给血管壁以营养.　　克服血液流动的阻力.

消耗能量与取决于血管的几何形状.

在长期进化中动物血管的几何形状已经达到能量最小原则.

问题

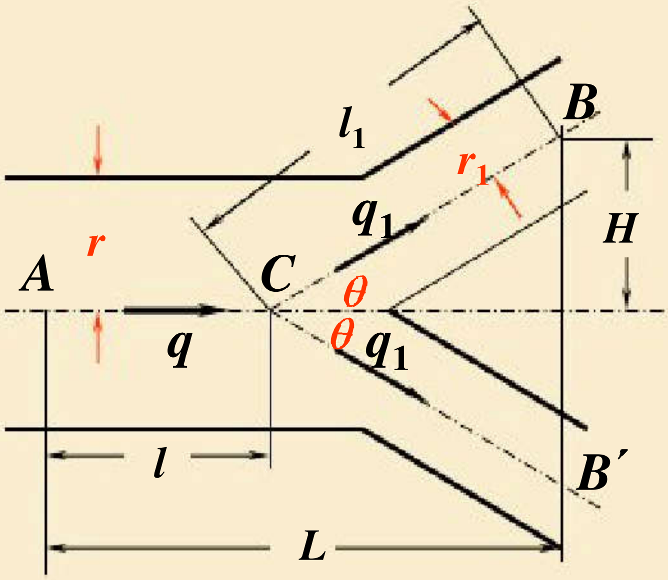
研究在能量最小原则下，血管分支处粗细血管半径比例和分岔角度.

模型假设

一条粗血管和两条细血管在分支点对称地处于同一平面.

血液流动近似于黏性流体在刚性管道中的运动.

血液给血管壁的能量随管壁的内表面积和体积的增加而增加，管壁厚度d近似与血管半径r成正比.



考察血管AC与CB, CB'

$q=2q_1$ r/r_1, θ?

模型假设

黏性流体在刚性管道中运动

$$q=\frac{\pi r^4 \Delta p}{8\mu l}$$

Δp~A,C压力差，μ~黏性系数

克服阻力消耗能量E_1

$$E_1=q\Delta p=\frac{8\mu q^2 l}{\pi r^4}$$

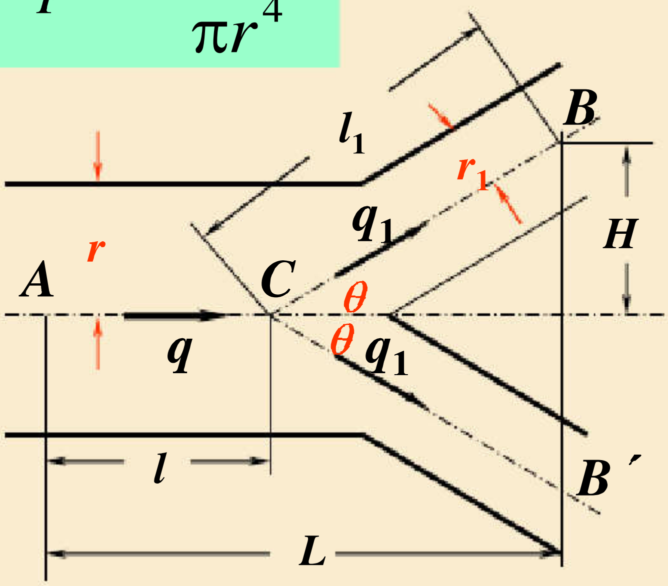
提供营养消耗能量E_2

管壁内表面积 $2\pi rl$

管壁体积$\pi(d^2+2rd)l$,

管壁厚度d与r成正比

$$E_2=br^\alpha l, 1\le\alpha\le 2$$



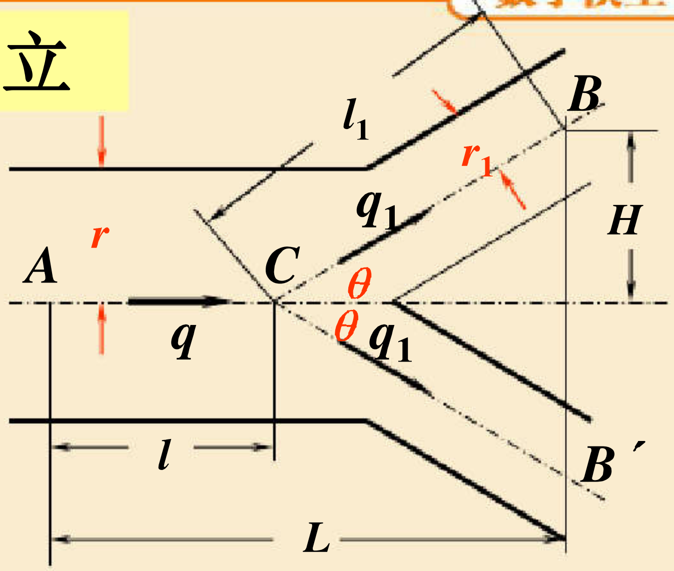
模型建立

克服阻力消耗能量

$$E_1 = q\Delta p = \frac{8\mu q^2 l}{\pi r^4}$$

提供营养消耗能量

$$E_2 = br^\alpha l, 1 \le \alpha \le 2$$



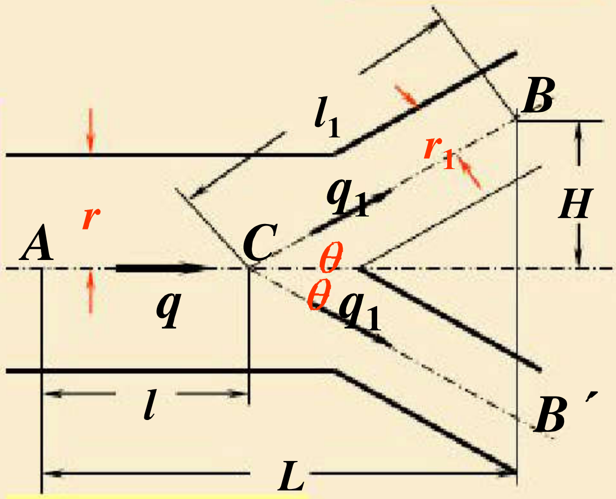
机体为血流提供能量 $l = L - H/\tan\theta, l_1 = H/\sin\theta$

$$E = E_1 + E_2 = (kq^2/r^4 + br^\alpha)l + (kq_1^2/r_1^4 + br_1^\alpha)2l_1$$

$$E(r, r_1, \theta) = (kq^2/r^4 + br^\alpha)(L - H/\tan\theta) + (kq_1^2/r_1^4 + br_1^\alpha)2H/\sin\theta$$

模型求解

$$E(r, r_1, \theta) = (kq^2/r^4 + br^\alpha)(L - H/\tan\theta) + (kq_1^2/r_1^4 + br_1^\alpha)2H/\sin\theta$$



$$\frac{\partial E}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial r_1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b\alpha r^{\alpha-1} - 4kq^2/r^5 = 0 \\ b\alpha r_1^{\alpha-1} - 4kq_1^2/r_1^5 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{r}{r_1} = 4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \cos\theta = 2\left(\frac{r}{r_1}\right)^{-4}$$

$$\cos\theta = 2^{\frac{\alpha-4}{\alpha+4}}$$

$$1 \le \alpha \le 2$$

$$1.26 \le r/r_1 \le 1.32, \quad 37^\circ \le \theta \le 49^\circ$$

模型解释

$$\frac{r}{r_1}=4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

$$1.26\le r/r_1\le 1.32$$

$$37^\circ\le\theta\le 49^\circ$$

生物学家：结果与观察大致吻合

推论 大动脉到毛细血管有n次分岔 $n=?$

大动脉半径r_{max}，毛细血管半径r_{min}

$$\frac{r_{max}}{r_{min}}=4^{\frac{n}{\alpha+4}}$$

观察：狗的血管 $r_{max}/r_{min}\approx 1000\approx 4^5$

$$n\approx 5(\alpha+4)\qquad 1\le\alpha\le 2\qquad n\approx 25\sim 30$$

血管总条数 $2^n\approx 2^{25}\sim 2^{30}\approx 3\times 10^7\sim 10^9$

3.7 冰山运输

背景

- 波斯湾地区水资源贫乏，淡化海水的成本为每立方米0.1英镑.
- 专家建议从9600km远的南极用拖船运送冰山，取代淡化海水.
- 从经济角度研究冰山运输的可行性.

建模准备

1. 日租金和最大运量

船　型	小	中	大
日租金（英镑）	4.0	6.2	8.0
最大运量（m^3）	5×10^5	10^6	10^7

建模准备

2. 燃料消耗（英镑/km）

船速(km/h) \ 冰山体积(m^3)	10^5	10^6	10^7
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

3. 融化速率（m/天）

船速(km/h) \ 与南极距离 (km)	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6

建模目的

选择船型和船速，使冰山到达目的地后每立方米水的费用最低，并与淡化海水的费用比较.

模型假设

- 航行过程中船速不变，总距离9600km.
- 冰山呈球形，球面各点融化速率相同.
- 到达目的地后,每立方米冰可融化0.85m^3水.

建模分析

总费用 ⇐ 燃料消耗 ⇐ 船型, 船速

总费用 ⇐ 租金 ⇐ 船型

目的地水体积 ⇐ 目的地冰体积 ⇐ 初始冰山体积 ⇐ 船型

目的地冰体积 ⇐ 运输过程融化规律 ⇐ 船型, 船速

模型建立

1. 冰山融化规律

船速u (km/h)

与南极距离d(km)

融化速率r(m/天)

u \ r \ d	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6

r是 u 的线性函数

d<4000时u与d成正比

d>4000时u与d无关

$$r = \begin{cases} a_1 d(1+bu), 0 \le d \le 4000 \\ a_2(1+bu), d > 4000 \end{cases}$$

$$a_1 = 6.5\times 10^{-5}, a_2 = 0.2, b = 0.4$$

航行 t 天, $d=24ut$

第t天融化速率

$$r_t = \begin{cases} 1.56\times 10^{-3} u(1+0.4u)t, 0 \le t \le \dfrac{1000}{6u} \\ 0.2(1+0.4u), \quad t > \dfrac{1000}{6u} \end{cases}$$

1. 冰山融化规律

冰山初始半径R_0，航行t天时半径 $R_t = R_0 - \sum_{k=1}^{t} r_k$

冰山初始体积 $V_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3$ t天时体积 $V_t = \frac{4\pi}{3} R_t^3$

选定u,V_0, 航行t天时冰山体积

$$V(u,V_0,t) = \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{3V_0}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} - \sum_{k=1}^{t} r_k \right)^3$$

总航行天数 $T = \frac{9600}{24u} = \frac{400}{u}$

到达目的地时冰山体积

$$V(u,V_0) = \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{3V_0}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} - \sum_{t=1}^{T} r_t \right)^3$$

2. 燃料消耗

燃料消耗 q_1(英镑/km)

q_1对u线性, 对$\lg V$ 线性

u \ q_1 \ V	10^5	10^6	10^7
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

$$q_1 = c_1(u+c_2)(\lg V + c_3),\quad c_1 = 0.3, c_2 = 6, c_3 = -1$$

选定u,V_0, 航行第t天燃料消耗 q (英镑/天)

$$q(u,V_0,t) = 24u \cdot c_1(u+c_2)[\lg V(u,V_0,t)+c_3]$$

$$= 7.2u(u+6)\left[\lg \frac{4\pi}{3}\left((\frac{3V_0}{4\pi})^{\frac{1}{3}} - \sum_{k=1}^{t} r_k \right)^3 - 1\right]$$

燃料消耗总费用 $$Q(u,V_0) = \sum_{t=1}^{T} q(u,V_0,t)$$

3. 运送每立方米水费用

V_0	5×10^5	10^6	10^7
$f(V_0)$	4.0	6.2	8.0

冰山初始体积V_0的日租金$f(V_0)$（英镑）

航行天数 $T=\dfrac{400}{u}$

拖船租金费用 $R(u,V_0)=f(V_0)\cdot\dfrac{400}{u}$

总燃料消耗费用

$$Q(u,V_0)=\sum_{t=1}^{T}7.2u(u+6)\left[\lg\frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{3V_0}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}-\sum_{k=1}^{t}r_k\right)^3-1\right]$$

冰山运输总费用 $S(u,V_0)=R(u,V_0)+Q(u,V_0)$

3. 运送每立方米水费用

到达目的地时冰山体积

$$V(u,V_0)=\frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{3V_0}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}-\sum_{t=1}^{T}r_t\right)^3$$

冰山到达目的地后得到的水体积

$$W(u,V_0)=0.85V(u,V_0)$$

冰山运输总费用

$$S(u,V_0)=R(u,V_0)+Q(u,V_0)$$

运送每立方米水费用

$$Y(u,V_0)=\frac{S(u,V_0)}{W(u,V_0)}$$

模

选

的

V

经

5

u=4~5(km/h)，V_0= 10^7 (m^3)， $Y(u,V_0)$最小

结果分析

大型拖船V_0= 10^7 (m^3),船速 u=4~5(km/h), 冰山到达目的地后每立方米水的费用 $Y(u,V_0)$约0.065(英镑).

虽然0.065英镑略低于淡化海水的成本0.1英镑，但是模型假设和构造非常简化与粗糙.

由于未考虑影响航行的种种不利因素，冰山到达目的地后实际体积会显著小于$V(u,V_0)$.

有关部门认为，只有当计算出的$Y(u,V_0)$显著低于淡化海水的成本时，才考虑其可行性.

冰 山 运 输

- 模型来自实际问题的可行性研究.
- 收集数据是建模的重要准备工作.
- 根据数据得到的经验公式是建模的基础.
- 冰山形状的球形假设简化了计算, 这个假设的合理性如何?如果改变它呢?