江西理工大学

2015年硕士研究生入学考试试题

考试科目代码及名称：601 高等数学（B）

要求：答案一律写在考点发放的答题纸上，写在试题上无效。

一、 填空题：（每小题4分，共40分）

1．$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=$____1____.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$____2____.

3、函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$的间断点为____3____.

4、函数$f(x)=x^2\sin x$的导数$f'(x)=$____4____.

5、$\int e^{\sqrt{x}}dx=$____5____.

6、曲线$y=x^2$与x轴及直线$x=1$所围图形的面积为____6____.

7、微分方程$y'=2x^2y$的通解为____7____.

8、设$z=\arctan\dfrac{x}{y}$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$____8____.

9、已知$\vec{a}=\{3,5,-2\},\vec{b}=\{2,1,4\}$，则$\vec{a}\times\vec{b}=$____9____.

10、$\int_{-1}^{1}(\dfrac{x}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})dx$____10____.

二、 计算下列各题：（每小题5分，共50分）

1、$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{x^3}$；

3、$y=x^2e^{2x}$，求dy；

4、求$y=x^{\sin x}(x>0)$的导数；

5、$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$；　　　　6、$\int \arcsin x dx$；

7、$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；　　　　8、$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$　；

9、求方程$y''+5y'+4y=0$的通解；

10、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos x dx$.

三、$z=f[x^2-y,\varphi(xy)]$，其中$f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$\varphi(u)$二阶可导，

求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.(8 分)

四、证明五次代数方程$x^5-3x+1=0$在开区间（0，1）内至少有一个实根.(8 分)

五、计算$\iint\limits_D |y-x^2|dxdy$,其中$D$为$-1\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.(8 分)

六、$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.(8 分)

七. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=f(1)=0$,证明至少存在

一点$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)+2f(\xi)=0$.(8 分)

八、描绘函数$y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$的图形. (10 分)

九、证明：当$x>0$时，$e^x-1>(1+x)\ln(1+x)$.(10 分)

试题(B)答案

一. 填空题:

1. $\frac{1}{6}$; 2. $\frac{1}{2}$; 3. $x=1$. 4. $f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

5 $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$; 6. $\frac{1}{3}$; 8. $\frac{y}{x^2+y^2}$, 7. $y=Ce^{\frac{2}{3}x^3}$

9. $22i-16j-7k$. 10. $\frac{\pi}{2}$.

二. 计算题.

1. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\frac{3}{3}=-1$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\frac{1}{3}$

3. $dy=(2xe^{2x}+2x^2e^{2x})dx$.

4. $y'=(e^{\sin x\ln x})'=e^{\sin x\ln x}\left[\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right]$

5 $\int\frac{1}{1+\cos^2x}dx=\int\frac{\sec^2x}{\sec^2x+1}dx=\int\frac{d\tan x}{\tan^2x+2}=\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt2}+C$

6. $\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

7. $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx\ \overset{x=\sec t}{=\!=}\int\frac{\sec t\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=t+C$

$=\arccos\frac{1}{x}+C$

8. $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{x}{2-x}}\cdot(2-x)dx$

$=\frac{\pi}{4}$

9. $r^2+5r+6=0 \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=-6$

$\therefore\ y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-6x}$

10. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, d\sin x = \frac{1}{6}\sin^6 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$

三. 解. $z_x = f_1 \cdot 2x + f_2' \cdot \varphi' \cdot y$

8

$z_{xx} = 2f_1 + 2x[f_{11} 2x + f_{12}\varphi' y] + y[f_{21}\cdot 2x + f_{22}\cdot \varphi' y]\varphi'(y)$

$+ y^2 f_2' \varphi''(x\cdot y)$

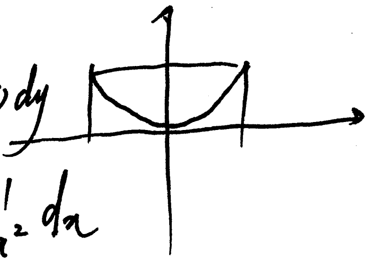
四. 证 $f(x) = x^5-3x+1$. 则 $f \in C[0,1]$

8

$f(0)=1$. $f(1)=-1$. 由零点定理.

$\exists \xi \in (0,1)$, 使 $f(\xi)=0$. 即证

五. $I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} (x^2-y)dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y-x^2)dy$



8

$= \int_{-1}^1 (x^2 y - \frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{x^2} dx + \int_{-1}^1 (\frac{1}{2}y^2 - x^2 y)\Big|_{x^2}^1 dx$

$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^4 dx + \int_{-1}^1 (\frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x^4) dx$

$\cancel{= 2\int_0^1 (\frac{1}{2}-x^2)dx = 2[\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3]\Big|_0^1} = \frac{11}{15}$.

8 六. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{4t}$

8 七. 证明: 设 $F(x) = f(x)e^{2x}$. 则 $F(x) \in C[0,1]$ $F(x) \in D(0,1)$

$F(0)=F(1)=0$. 由 Rolle Th.

$\exists \xi \in (0,1)$. 使 $F'(\xi)=0$.

$F'(x) = [f'(x)+2f(x)]e^{2x}$ $\therefore\ f'(\xi)+2f(\xi)=0$ 即证

10 八. 略.(同A)

10 九. 设 $f(x)=e^x-1-(1+x)\ln(1+x)$. 则 $f(0)=0$

$f'(x)=e^x-\ln(1+x)-1 \quad f'(0)=0$

$f''(x)=e^x-\frac{1}{1+x}$

显然, 当 $x>0$ 时, $e^x>1$, $0<\frac{1}{1+x}<1$

$\therefore f''(x)>0$ 从而

$f'(x)>f'(0)=0$ $\therefore f(x)\uparrow$

当 $x>0$ 时 有 $f(x)>f(0)$.

即 $e^x-1-(1+x)\ln(1+x)>0$ 证毕.