第四章

空间力系

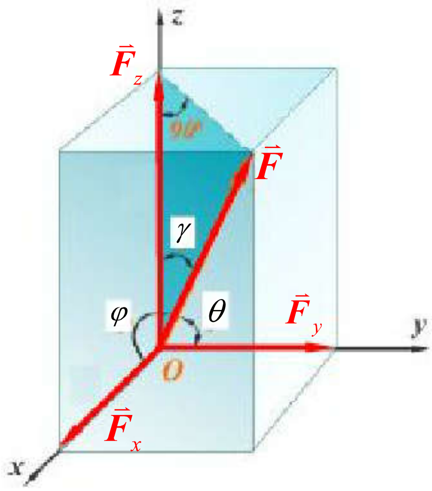
江蘇大學

§4-1 空间汇交力系

一、力在直角坐标轴上的投影

1、直接投影法

已知力及其与三个轴的夹角



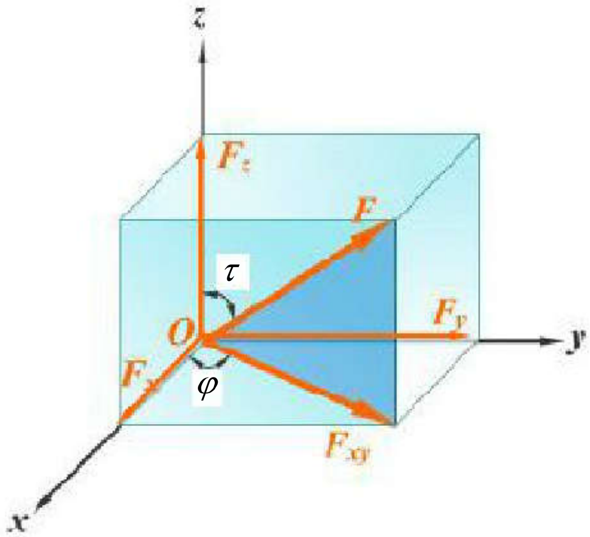
$$F_x = F\cos\varphi$$

$$F_y = F\cos\theta$$

$$F_z = F\cos\gamma$$

2、间接（二次）投影法

已知力及两个夹角



$$F_{xy} = F\sin\tau$$

$$F_x = F\sin\tau\cos\varphi$$

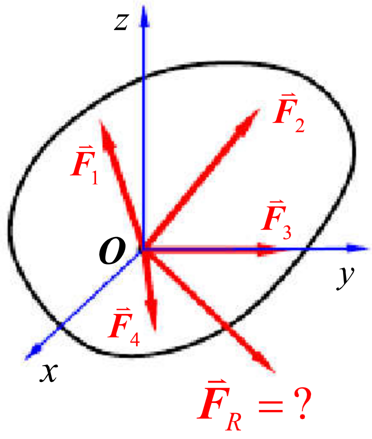
$$F_y = F\sin\tau\sin\varphi$$

$$F_z = F\cos\tau$$

§4－1 空间汇交力系

二、空间汇交力系的合力与平衡条件

1、空间汇交力系的合力



合力矢： $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

合力的大小：

$$F_\mathrm{R} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$$

方向余弦

$$\cos(\vec{F}_\mathrm{R}, \vec{i}) = \frac{\sum F_x}{F_\mathrm{R}} \quad \cos(\vec{F}_\mathrm{R}, \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_\mathrm{R}} \quad \cos(\vec{F}_\mathrm{R}, \vec{k}) = \frac{\sum F_z}{F_\mathrm{R}}$$

§4－1 空间汇交力系

2、空间汇交力系的平衡

空间汇交力系平衡的充分必要条件是：该力系的合力等于零：

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = 0 \qquad F_{\mathrm{R}} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} = 0$$

即

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

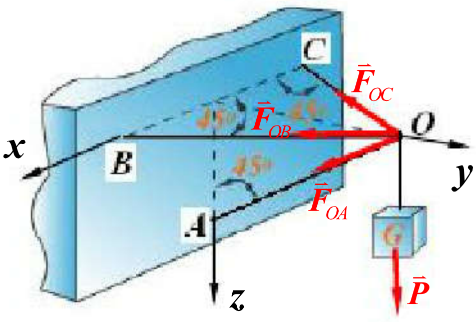
--称为空间汇交力系的平衡方程

* 三个平衡方程，可解三个未知数

例4-1

已知：P=1000N ，各杆重不计． 求：***OA,OB,OC***杆所受力．

解：各杆均为二力杆，取球铰O，



$$\sum F_x = 0$$

$$F_{OB}\sin 45^\circ - F_{OC}\sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{OB}\cos 45^\circ - F_{OC}\cos 45^\circ - F_{OA}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad F_{OA}\sin 45^\circ + P = 0$$

$$F_{OA} = -1414\text{N} \quad F_{OB} = F_{OC} = 707\text{N}\ （拉）$$

§4－2 力对点的矩和力对轴的矩

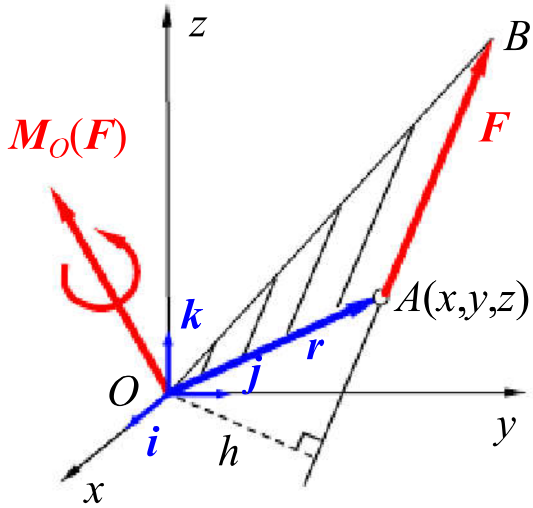
一、力对点的矩 ——力矩矢

三要素：

（1）大小：力F与力臂的乘积

（2）方向：垂直力矩作用面

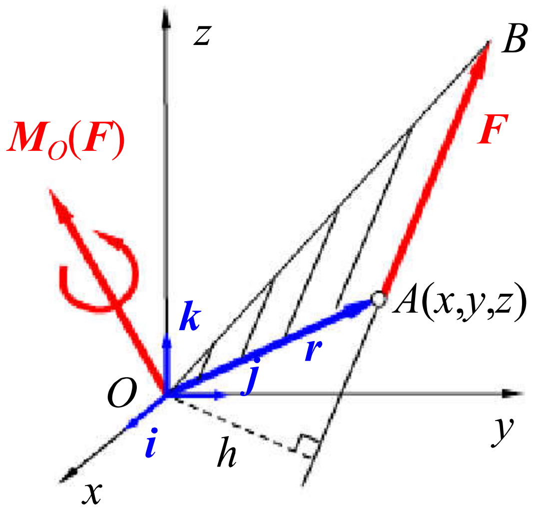
（3）指向：右手螺旋法则.



$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}$$

§4－2　力对点的矩和力对轴的矩

以矩心O为原点建立坐标系，则



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow$$

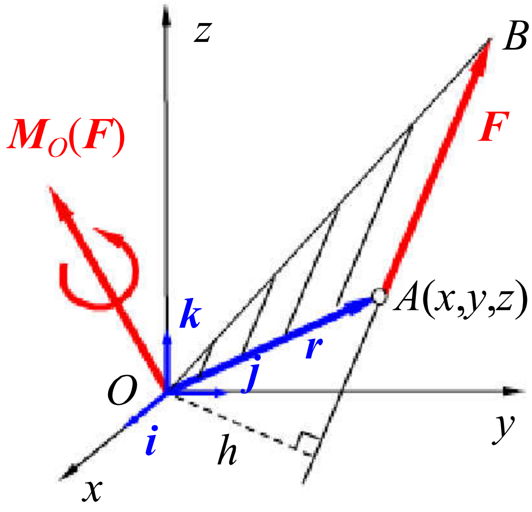
$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}}_O(\overrightarrow{\boldsymbol{F}}) = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\vec{\boldsymbol{i}} + (zF_x - xF_z)\vec{\boldsymbol{j}} + (xF_y - yF_x)\vec{\boldsymbol{k}}$$

§4－2　力对点的矩和力对轴的矩

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

力对点O的矩在三个坐标轴上的投影为:

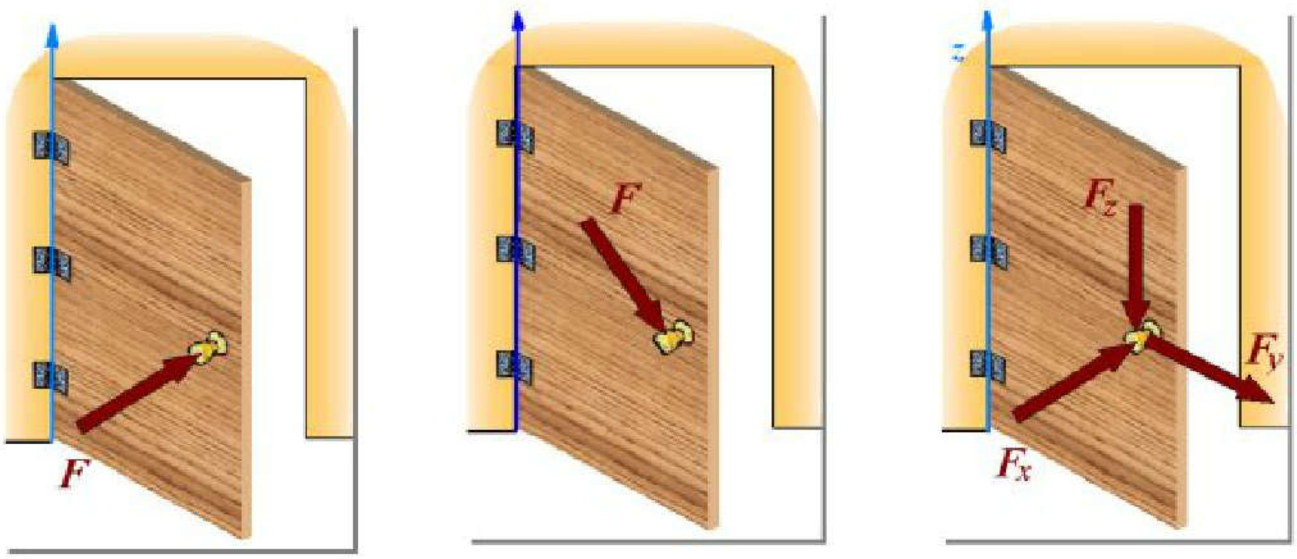


$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x = yF_z - zF_y$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y = zF_x - xF_z$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z = xF_y - yF_x$$

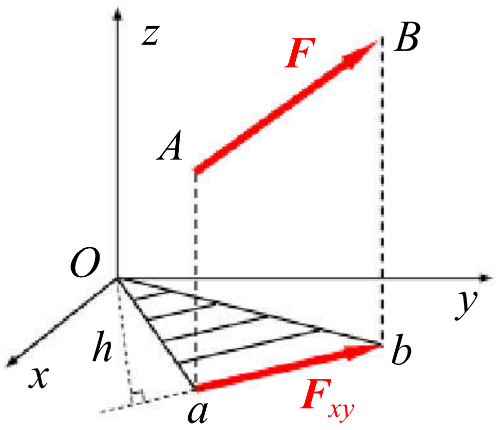
二、力对轴的矩



力与轴相交或与轴平行（力与轴在同一平面内），力对该轴的矩为零.

§4－2　力对点的矩和力对轴的矩

1、定义：　标量



大小：　$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$

方向：　右手螺旋法则

2、M_z=0,则

(1)力与轴平行

(2)力与轴相交

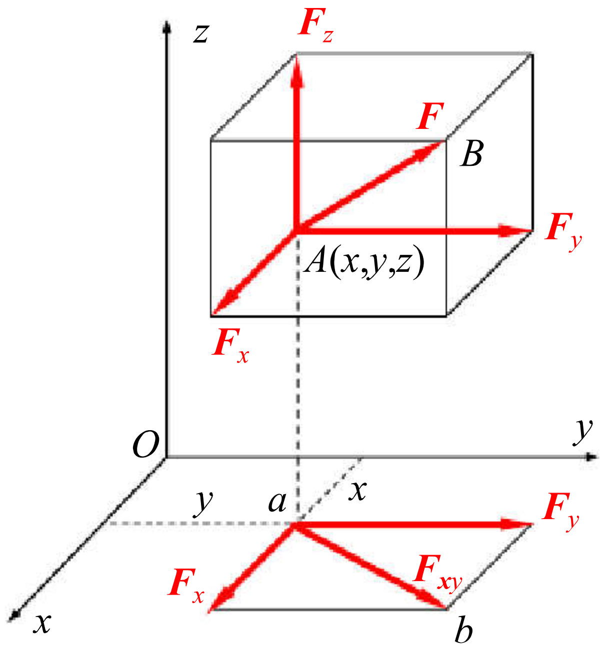
(3)F=0

3、解析式

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy})$$

$$= M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y)$$

$$= xF_y - yF_x$$



同理可得其它两式。故有

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y$$

$$M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z$$

$$M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x$$

§4－2　力对点的矩和力对轴的矩

三、力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

$$M_x(\vec{\boldsymbol{F}}) = yF_z - zF_y \qquad \left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x = yF_z - zF_y$$

$$M_y(\vec{\boldsymbol{F}}) = zF_x - xF_z \qquad \left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y = zF_x - xF_z$$

$$M_z(\vec{\boldsymbol{F}}) = xF_y - yF_x \qquad \left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z = xF_y - yF_x$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_x = M_x(\vec{F})$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_y = M_y(\vec{F})$$

$$\left[\vec{M}_O(\vec{F})\right]_z = M_z(\vec{F})$$

即：力对点的矩矢在通过该点的某轴上的投影，等于力对该轴的矩。

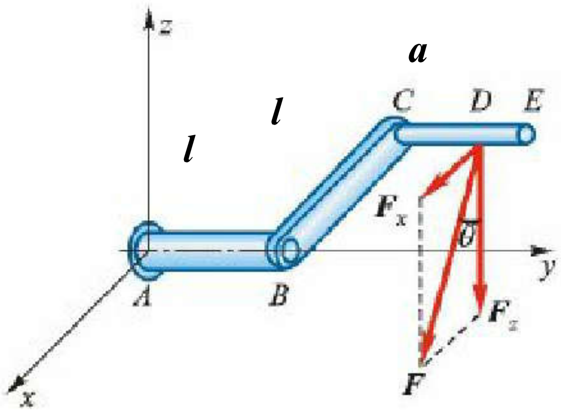
例4-2

已知： F,l,a,θ 求：$M_x(\vec{F}),M_y(\vec{F}),M_z(\vec{F})$

解：把力 $\vec{F}$ 分解如图

$$F_x=F\sin\theta \qquad F_y=0 \qquad F_z=-F\cos\theta$$

$$x=-l \qquad y=l+a \qquad z=0$$



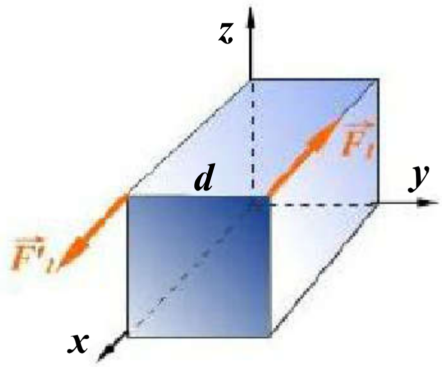
$$M_x(\vec{F})=yF_z-zF_y=-F(l+a)\cos\theta$$

$$M_y(\vec{F})=zF_x-xF_z=-Fl\cos\theta$$

$$M_z(F)=xF_y-yF_x=-F(l+a)\sin\theta$$

§4－3 空间力偶

一、力偶矩以矢量表示—力偶矩矢



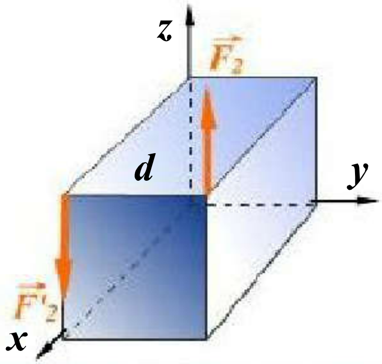
$$F_1 = F_2 = F_1' = F_2'$$

空间力偶的三要素

（1） 大小：力与力偶臂的乘积；

（2） 方向：右手螺旋法则；

（3） 作用面：力偶作用面。

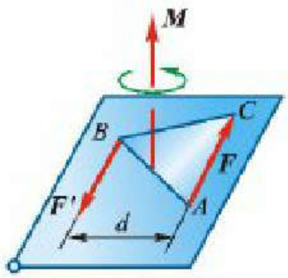


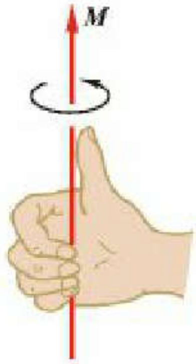
力偶由一个平面平行移至刚体另一个平行平面不影响它对刚体的作用效果。

§4－3 空间力偶

力偶矩矢:

$$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$



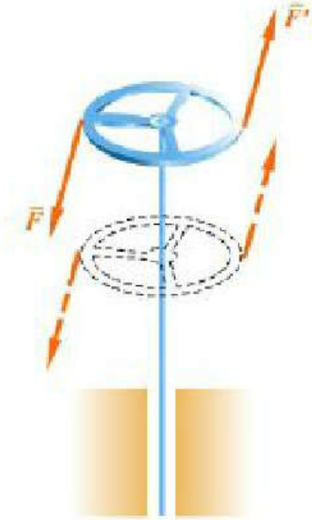


力偶矩矢为一自由矢量。

二、空间力偶等效定理

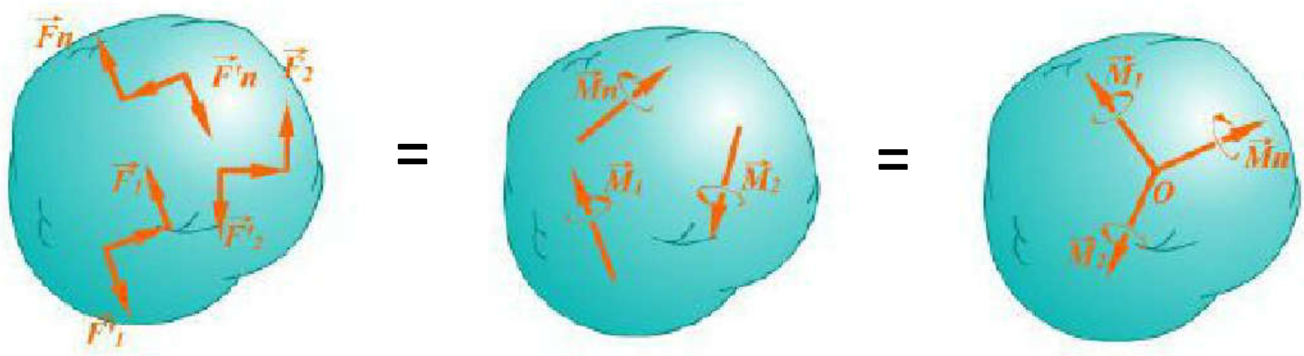
(1) 空间力偶的等效条件是:

两个力偶的力偶矩矢相等。



(2) 力偶没有合力，力偶只能由力偶来平衡.

三、力偶系的合成与平衡条件



$$\vec{M}_1=\vec{r}_1\times\vec{F}_1,\vec{M}_2=\vec{r}_2\times\vec{F}_2,\ldots\ldots,\vec{M}_n=\vec{r}_n\times\vec{F}_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}=\sum\vec{M}_i}$$

$\vec{M}$ 为合力偶矩矢，等于各分力偶矩矢的矢量和.

§4－3 空间力偶

根据合矢量投影定理:

$$M_x = \sum M_x \, , M_y = \sum M_y \, , M_z = \sum M_z$$

合力偶矩矢的大小和方向余弦

$$M = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sum M_x}{M} \qquad \cos\beta = \frac{\sum M_y}{M} \qquad \cos\gamma = \frac{\sum M_z}{M}$$

§4－3 空间力偶

空间力偶系平衡的充分必要条件是：合力偶矩矢等于零，即

$$\vec{M}=0$$

$$M=\sqrt{(\sum M_x)^2+(\sum M_y)^2+(\sum M_z)^2}=0$$

$$\sum M_x=0$$
$$\sum M_y=0$$
$$\sum M_z=0$$

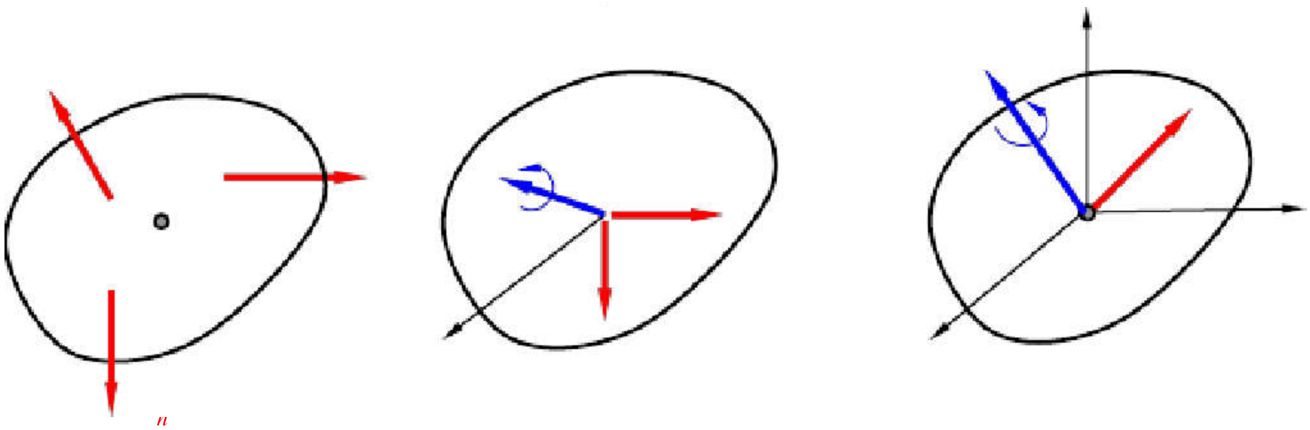
--称为空间力偶系的平衡方程.

* 三个平衡方程，可解三个未知数

江蘇大學

§4－4 空间任意力系向一点的简化·主矢和主矩

一、空间任意力系向一点的简化



$$\vec{F}_i' = \vec{F}_i \qquad \vec{M}_i = \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

空间汇交与空间力偶系等效代替一空间任意力系.

§4－4 空间任意力系向一点的简化·主矢和主矩

空间汇交力系的合力:

$$\vec{F}'_{\mathrm{R}} = \sum \vec{F}_i = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$ 主矢

空间力偶系的合力偶矩

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$ 主矩

主矢: 作用在简化中心，大小和方向却与中心的位置无关;

主矩: 作用在该刚体上，大小和方向一般与中心的位置有关。

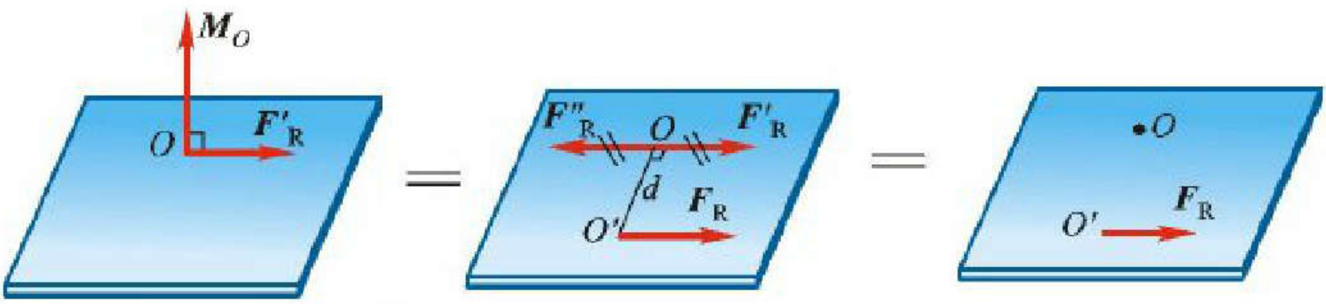
二、空间任意力系的简化结果分析

（1）合力

$\vec{F}_{\mathrm{R}}' \neq 0, \vec{M}_O = 0$ → 过简化中心合力

$\vec{F}_{\mathrm{R}}' \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}_{\mathrm{R}}' \perp \vec{M}_O$ → 合力作用线距简化中心为

$$d = \left|\vec{M}_O\right| / F_{\mathrm{R}}'$$



合力矩定理： 合力对某点(轴）之矩等于各分力对同一点（轴）之矩的矢量和.

（2）合力偶

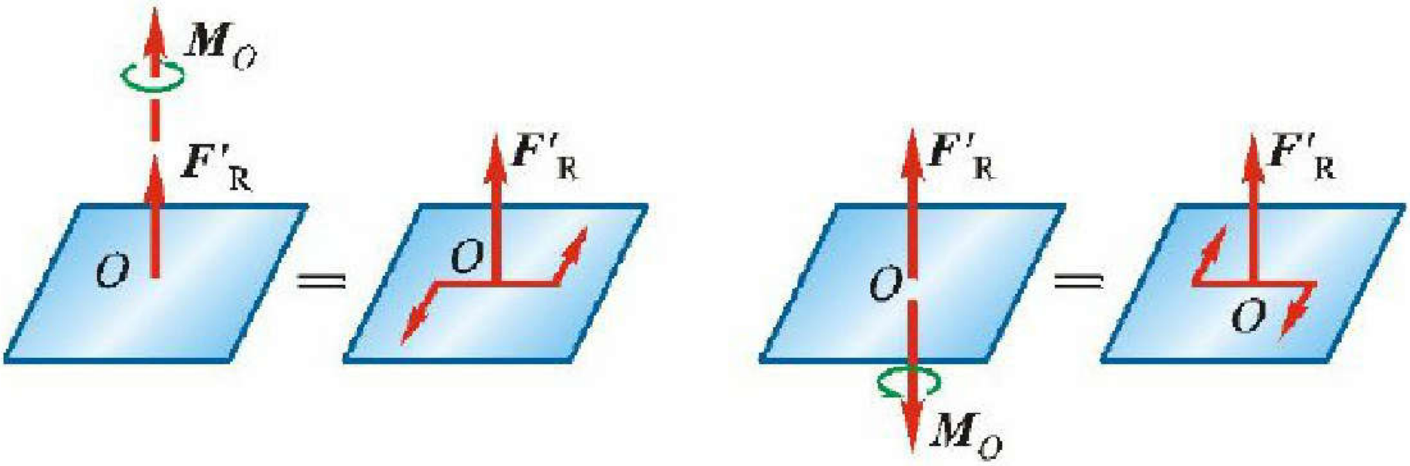
$\vec{F}'_{\mathrm{R}}=0, \vec{M}_O \neq 0$ ⇒

一个合力偶，此时与简化中心无关。

§4－4 空间任意力系向一点的简化·主矢和主矩

（3）力螺旋

$F_R' \neq 0, M_O \neq 0, F_R' // M_O$ ⟹ 中心轴过简化中心的力螺旋



（4）平衡

$\vec{F}_R' = 0, \vec{M}_O = 0$ ⟹ 平衡

§4－5 空间任意力系的平衡方程

一、空间任意力系的平衡方程

1、空间任意力系平衡的充要条件:

$$\boldsymbol{F}'_R = 0, \quad \boldsymbol{M}_O = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

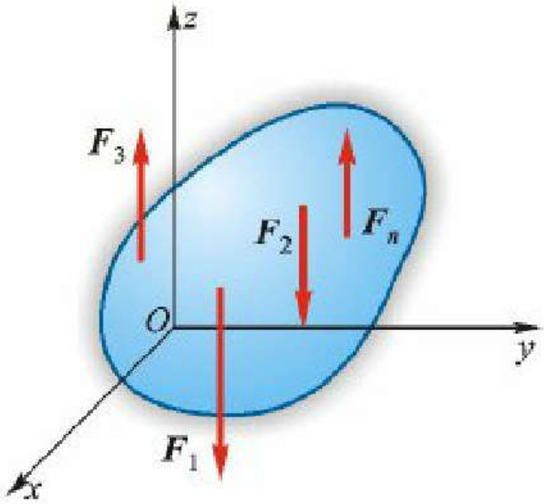
$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

注意: (1) 有六个独立方程，能求出六个未知数。

§4－5 空间任意力系的平衡方程

2、空间平行力系的平衡方程

$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0$$



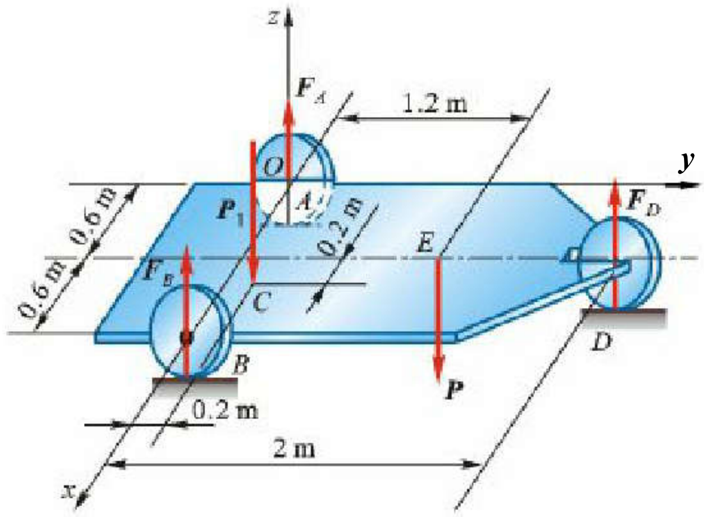
3、空间约束类型举例

例4-3

已知：　$P=8\text{kN}$，$P_1=10\text{kN}$,

求：A、B、C 处约束力

解：研究对象：小车



$$\sum F_z=0$$

$$-P-P_1+F_A+F_B+F_D=0$$

$$\sum M_x(F)=0$$

$$-0.2P_1-1.2P+2F_D=0$$

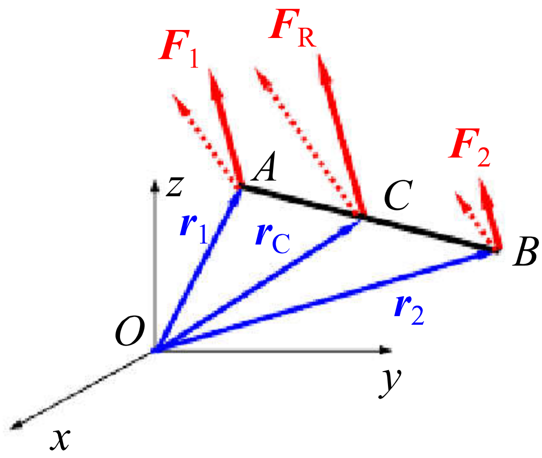
$$\sum M_y(F)=0 \qquad 0.8P_1+0.6P-1.2F_B-0.6F_D=0$$

$$\Longrightarrow \quad F_D=5.8\text{kN}, F_B=7.777\text{kN}, F_A=4.423\text{kN}$$

§4－6 重 心

一、平行力系中心

平行力系中心是平行力系合力通过的一个点。平行力系合力作用点的位置仅与各平行力的大小和作用点的位置有关，而与各平行力的方向无关。



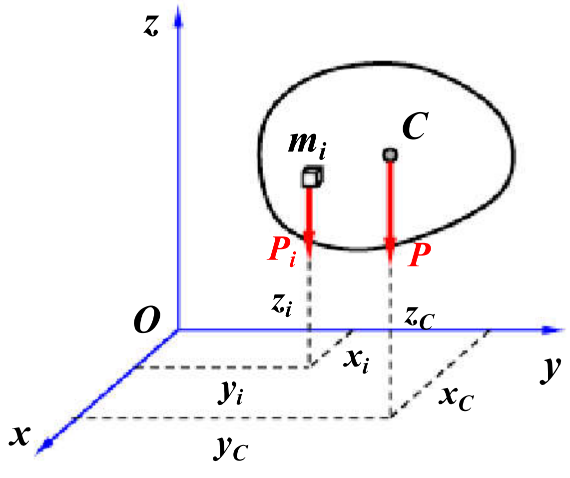
$$F \cdot x_C = \sum F_i \cdot x_i$$

$$F \cdot y_C = \sum F_i \cdot y_i$$

$$F \cdot z_C = \sum F_i \cdot z_i$$

得:
$$x_C = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i}, \quad y_C = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i}, \quad z_C = \frac{\Sigma F_i z_i}{\Sigma F_i}$$

二、计算重心坐标的公式



$$P \cdot x_C = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + ... + P_n \cdot x_n$$

$$= \sum P_i \cdot x_i$$

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{P}$$

同理得:

$$y_C = \frac{\sum P_i y_i}{P} \qquad z_C = \frac{\sum P_i z_i}{P}$$

§4－6 重 心

对均质物体，均质物体的重心就是几何中心，即形心。

均质块

$$x_C = \frac{\int_V x\mathrm{d}V}{V},\ y_C = \frac{\int_V y\mathrm{d}V}{V},\ z_C = \frac{\int_V z\mathrm{d}V}{V}$$

均质板

(等厚度)

$$x_C = \frac{\int_A x\mathrm{d}A}{A},\ y_C = \frac{\int_A x\mathrm{d}A}{A},\ z_C = \frac{\int_A x\mathrm{d}A}{A}$$

均质杆

(等截面)

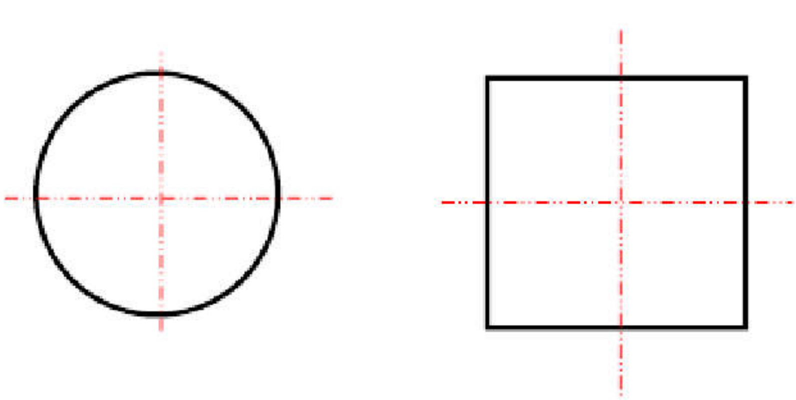
$$x_C = \frac{\int_l x\mathrm{d}l}{l},\ y_C = \frac{\int_l y\mathrm{d}l}{l},\ z_C = \frac{\int_l z\mathrm{d}l}{l}$$

§4－6 重 心

三、确定重心的方法

1、简单几何形状物体的重心

如果均质物体有对称面，或对称轴，或对称中心，则该物体的重心必相应地在这个对称面，或对称轴，或对称中心上。



§4－6 重 心

2、 用组合法求重心

1）对组合截面
$$x_C=\frac{\sum V_i x_i}{V} \quad y_C=\frac{\sum V_i y_i}{V} \quad z_C=\frac{\sum V_i z_i}{V}$$

$$x_C=\frac{\sum A_i x_i}{A} \quad y_C=\frac{\sum A_i y_i}{A} \quad z_C=\frac{\sum A_i z_i}{A}$$

2）负面积法

若在物体或薄板内切去一部分（例如有空穴或孔的物体），则这类物体的重心，仍可应用与分割法相同的公式求得，只是切去部分的体积或面积应取负值。

例4-4

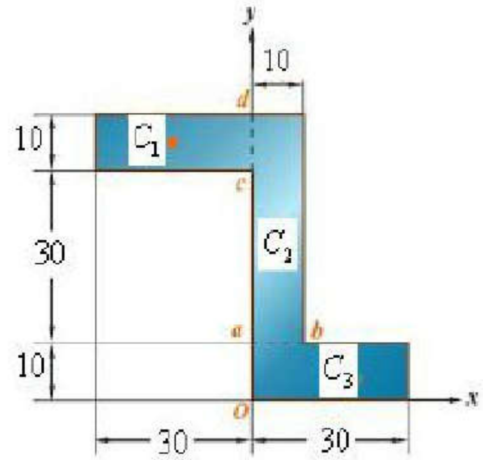
已知：均质等厚Z字型薄板尺寸如图所示．求：其重心坐标

解: 用虚线分割如图，为三个小矩形，其面积与坐标分别为

$x_1 = -15\text{mm}$　$y_1 = 45\text{mm}$　$A_1 = 300\text{mm}^2$

$x_2 = 5\text{mm}$　$y_2 = 30\text{mm}$　$A_2 = 400\text{mm}^2$

$x_3 = 15\text{mm}$　$y_3 = 5\text{mm}$　$A_3 = 300\text{mm}^2$



则

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 2\text{mm}$$

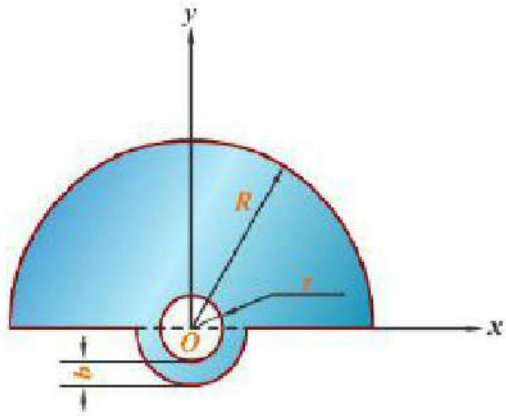
$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 27\text{mm}$$

例4-5

已知：等厚均质偏心块的 $R=100\text{mm}, r=17\text{mm}, b=13\text{mm}$

求：其重心坐标.

解： 由对称性，有 $x_C=0$



$$y_1=\frac{4R}{3\pi}, \qquad A_1=\frac{\pi}{2}R^2,$$

$$y_2=-\frac{4(r+b)}{3\pi}, \qquad A_2=\frac{\pi}{2}(r+b)^2,$$

$$y_3=0 \qquad A_3=-\pi r^2$$

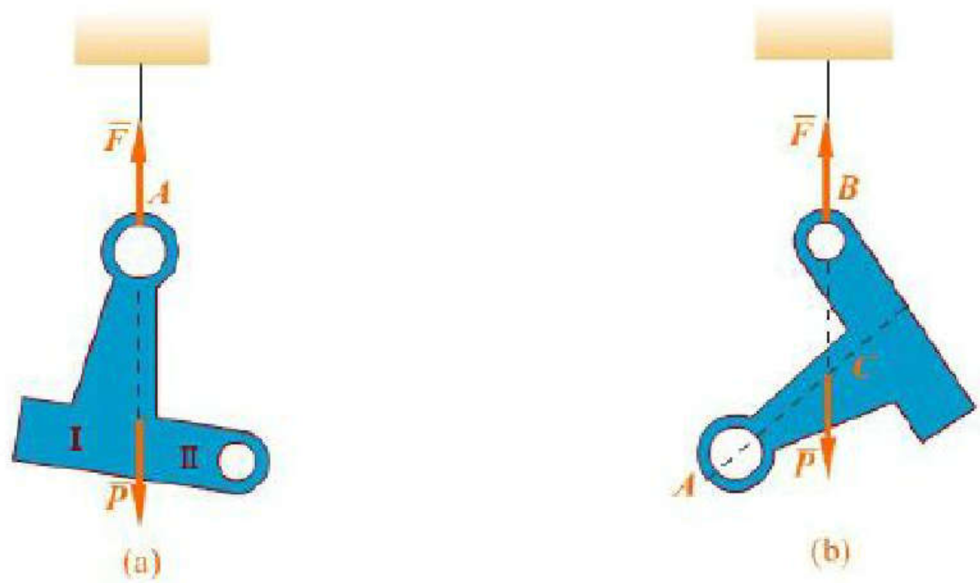
得

$$y_C=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=40.01\text{mm}$$

§4－6 重 心

三、确定重心的悬挂法与称重法

（1） 悬挂法



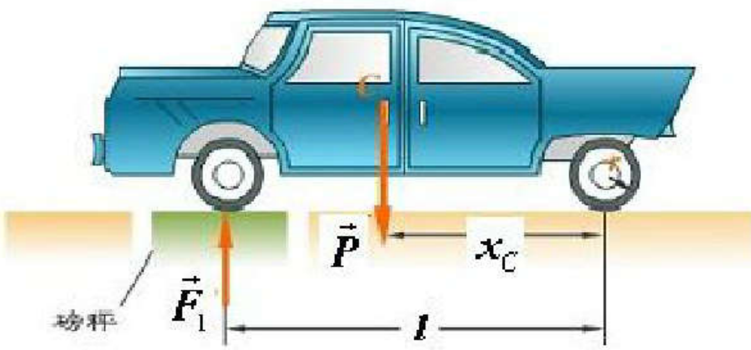
§4－6 重 心

（2） 称重法

$$P\cdot x_C = F_1\cdot l$$

则

$$x_C = \frac{F_1}{P}l$$

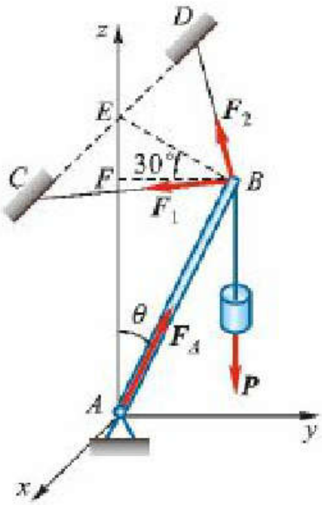


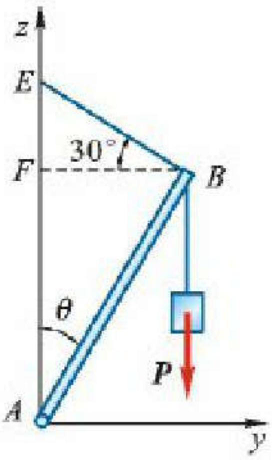
例4-2

已知：物重P=10kN，CE=EB=DE； $\theta=30^0$

求：杆受力及绳拉力

解：画受力图





$$\sum F_x=0$$

$$F_1\sin 45^\circ - F_2\sin 45^\circ = 0$$

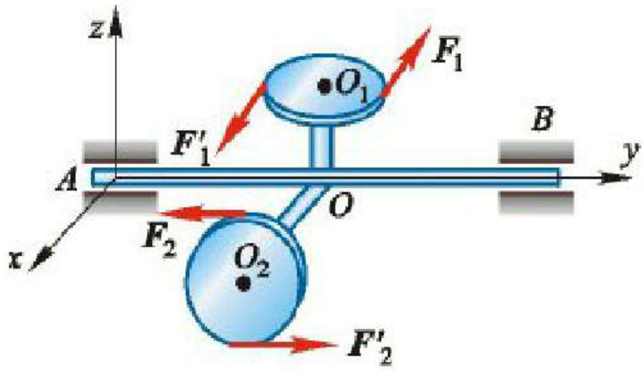
$$\sum F_y=0 \quad F_A\sin 30^\circ - F_1\cos 45^\circ\cos 30^\circ - F_2\cos 45^\circ\cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_z=0 \quad F_1\cos 45^\circ\sin 30^\circ + F_2\cos 45^\circ\sin 30^\circ + F_A\cos 30^\circ - P = 0$$

$\Rightarrow$ $F_1=F_2=3.54\text{kN} \qquad F_A=8.66\text{kN}$

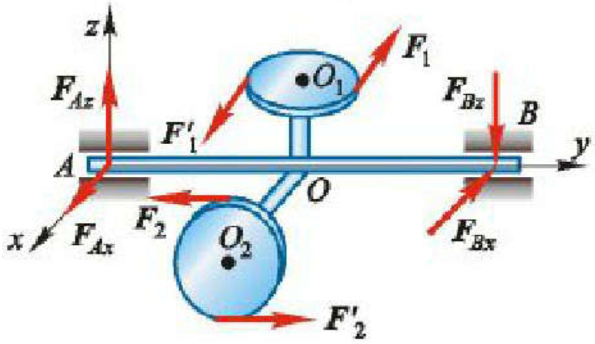
例4-6

已知：两圆盘半径均为200mm，AB =800mm，圆盘面O_1垂直于z轴，圆盘面O_2垂直于x轴，两盘面上作用有力偶，F_1=3N，F_2=5N，构件自重不计.



求: 轴承A,B处的约束力.

解：取整体，受力图如图所示.



$$\sum M_x = 0 \quad F_2 \cdot 400 - F_{Bz} \cdot 800 = 0$$

$$\sum M_z = 0 \quad F_1 \cdot 400 + F_{Bx} \cdot 800 = 0$$

$$F_{Ax} = F_{Bx} = -1.5\text{N} \qquad F_{Az} = F_{Bz} = 2.5\text{N}$$