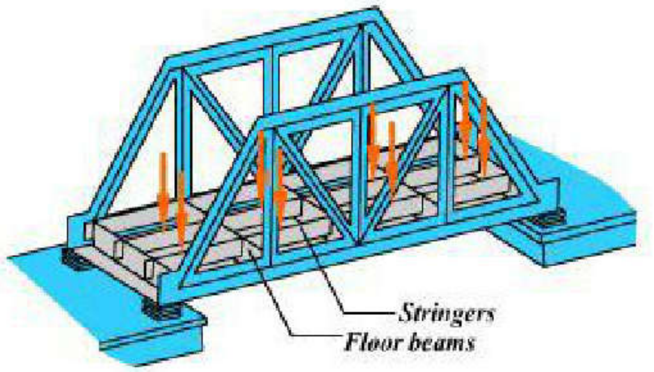
第三章

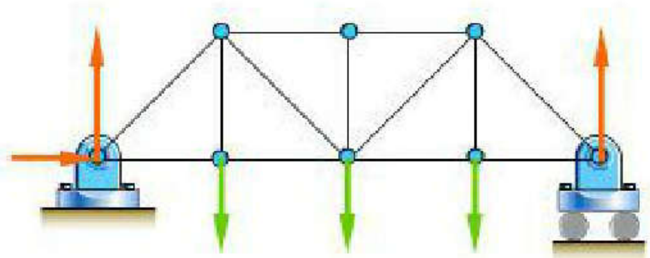
平面任意力系

江蘇大學

引言

平面任意力系： 各力的作用线都在同一平面内且任意分布的力系。



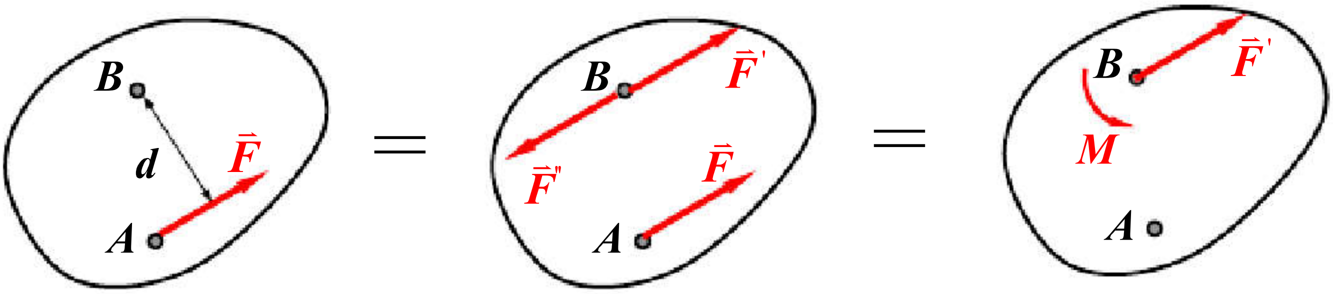


§3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

一、力的平移定理

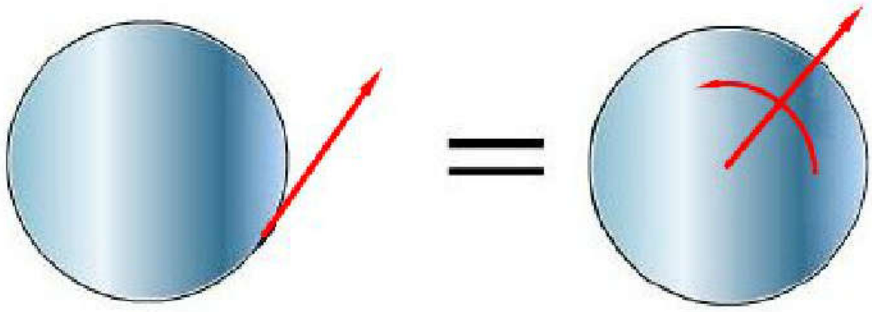
可以把作用在刚体上点A的力F平行移到任一点B，但必须同时附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力F对新作用点B 的矩.

证明：



$$F' = -F'' = F \qquad M_B = M_B(\vec{F}) = Fd$$

§3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

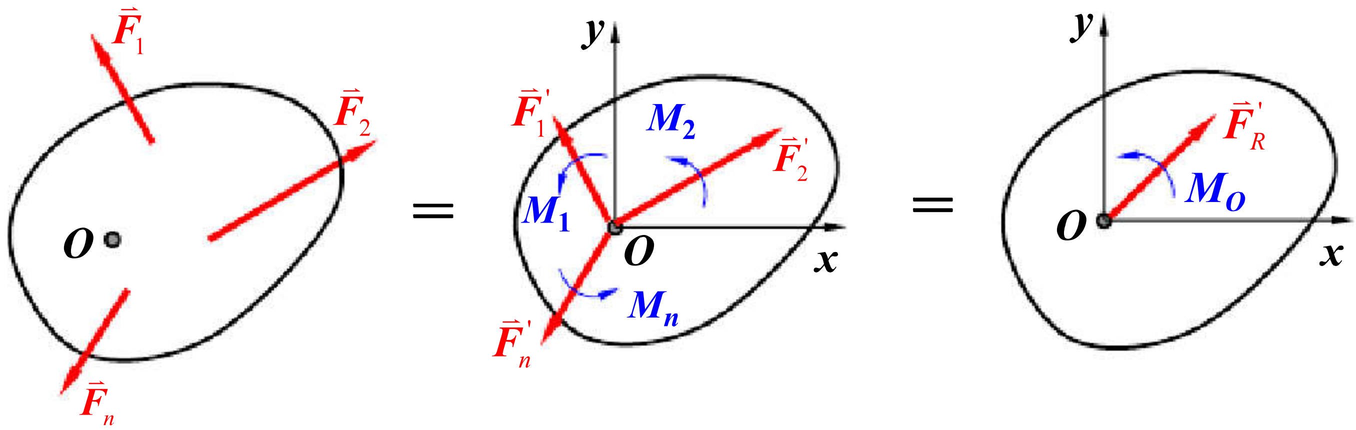


(1) 力线平移定理的逆步骤，亦可把一个力和一个力偶合成一个力。力 ⟷ 力+力偶

(2) 力的平移定理是平面一般力系简化的基础。

§3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

二、平面任意力系向作用面内一点简化·主矢和主矩



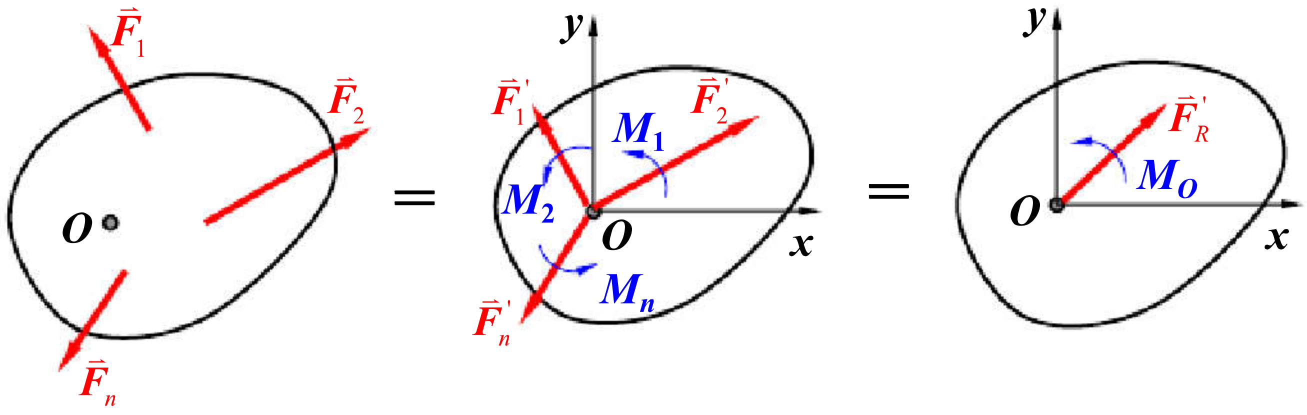
$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1 \qquad M_1 = M_O(\boldsymbol{F}_1)$$

$$\vec{F}_2' = \vec{F}_2 \qquad M_2 = M_O(\boldsymbol{F}_2)$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{F}_n' = \vec{F}_n \qquad M_n = M_O(\boldsymbol{F}_n)$$

§ 3-1 平面任意力系向作用面内一点简化



平面任意力系 $\xrightarrow{\text{向一点简化}}$ 平面汇交力系+平面力偶系

平面汇交力系➔力　　$\vec{F}_R' = \sum \vec{F}_i$　　（主矢）

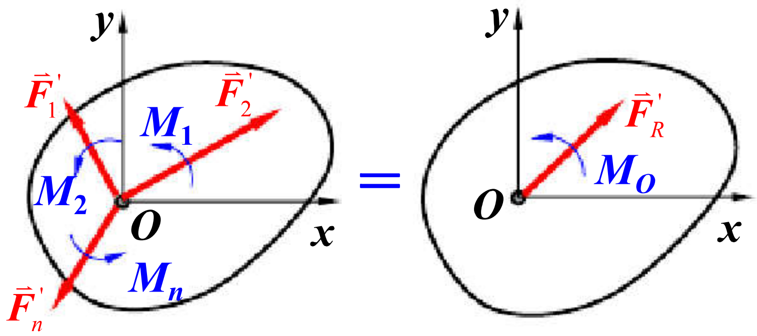
平面力偶系➔力偶　　$M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$　　（主矩）

§3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

主矢:

$$F_{Rx}' = \sum F_{ix}' = \sum F_x$$

$$F_{Ry}' = \sum F_{iy}' = \sum F_y$$

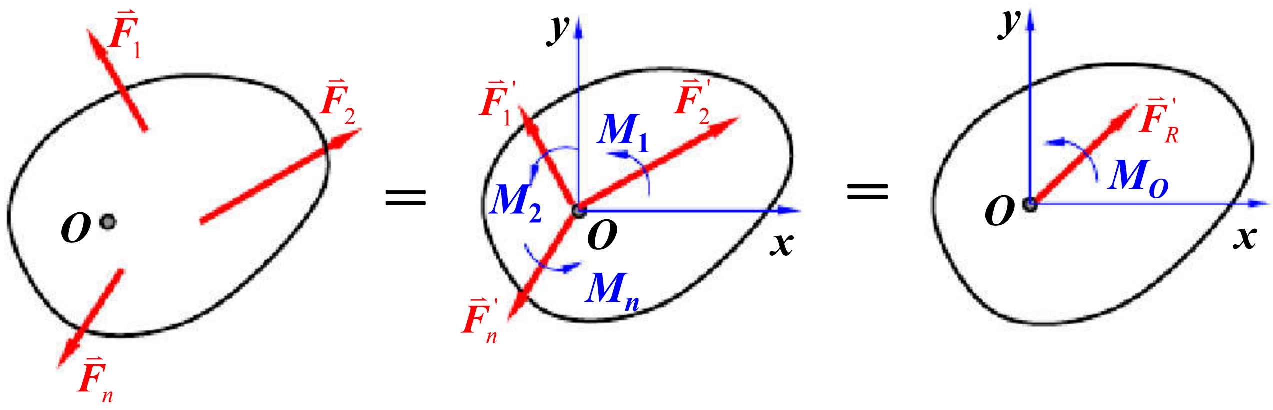


大小: $F_R' = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}$

方向: $\cos(\vec{F}'_R, \vec{i}) = \dfrac{\sum F_{ix}}{F_R'}$ $\quad \cos(\vec{F}'_R, \vec{j}) = \dfrac{\sum F_{iy}}{F_R'}$

作用点: 作用于简化中心上

§ 3-1 平面任意力系向作用面内一点简化



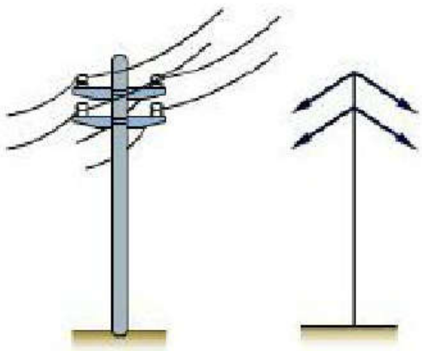
主矩

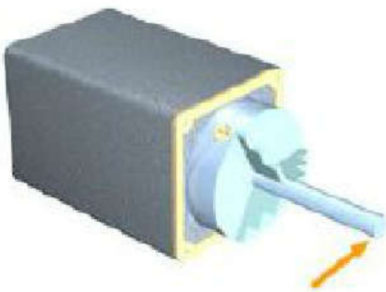
$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$$

注意： 主矢与简化中心无关，而主矩一般与简化中心有关.

§3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

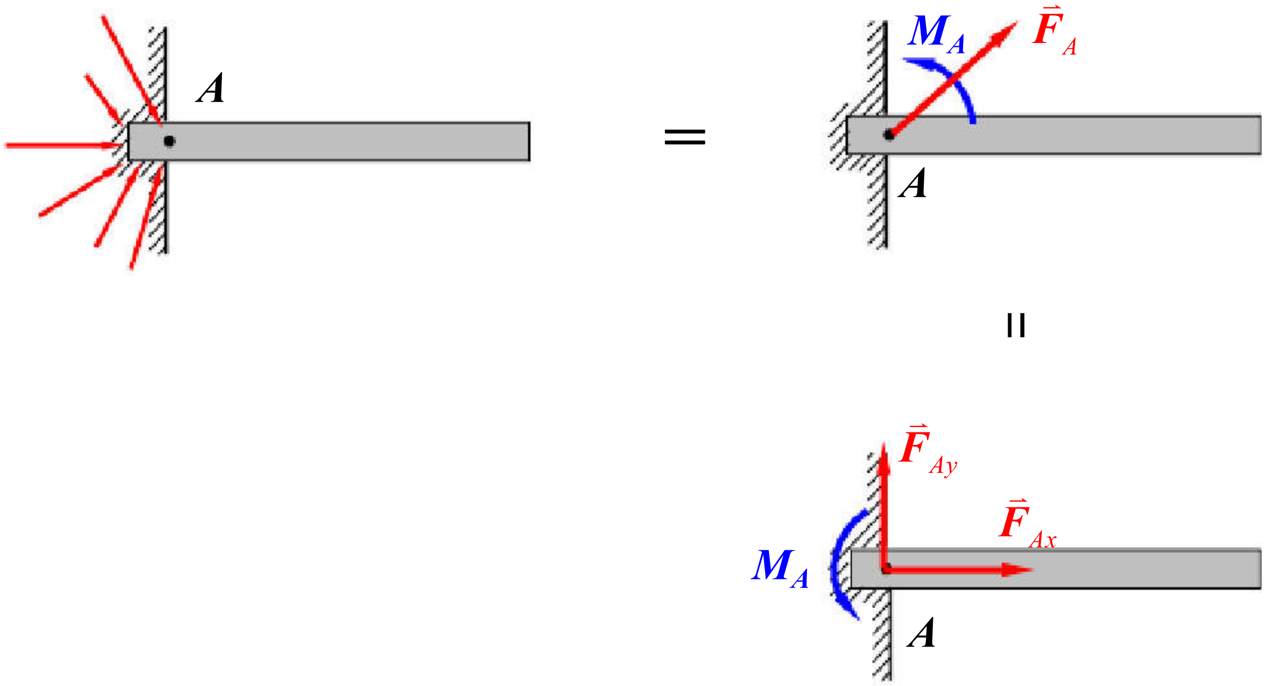
平面固定端约束





§3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

平面固定端约束

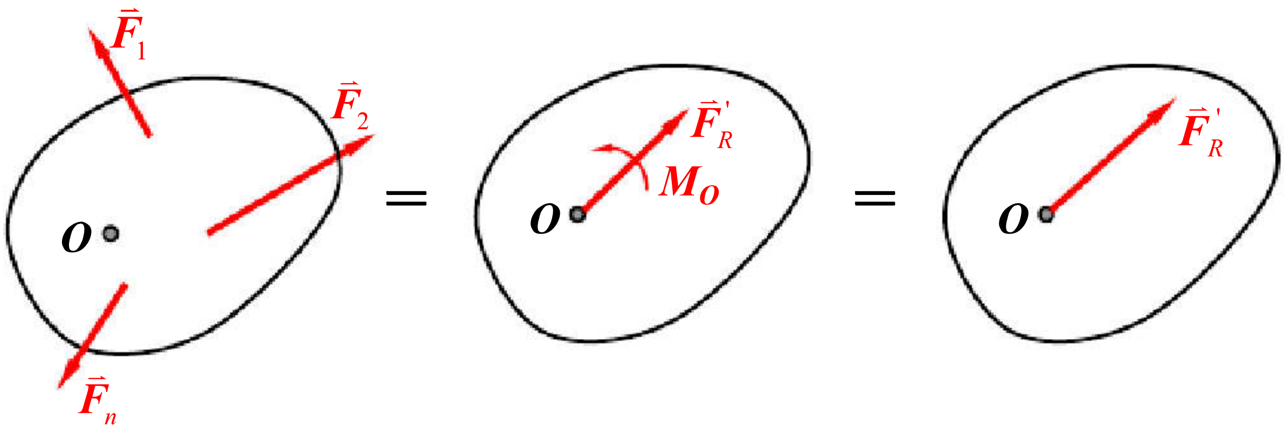


约束力：一个力和一个力偶

§3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

三、 平面任意力系的简化结果分析

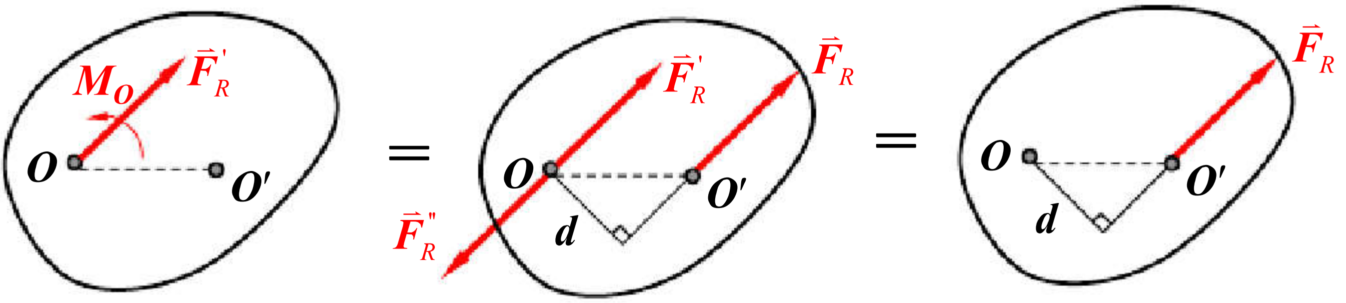
1、 $\overline{F}'_{\mathrm{R}} \neq 0, M_O = 0$



合力，作用线过简化中心

§ 3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

2、 $\bar{F}_{\mathrm{R}}' \neq 0, M_O \neq 0$



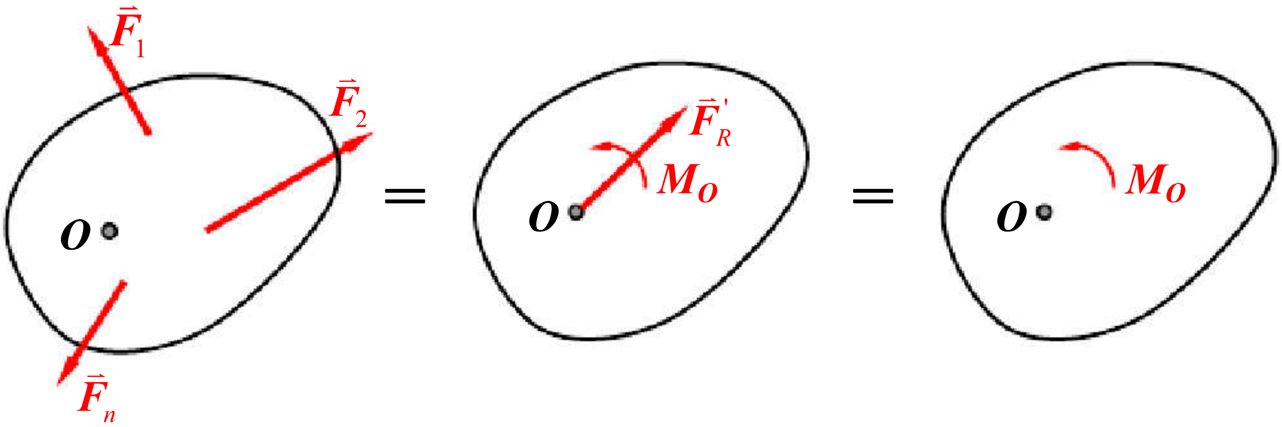
$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = -\vec{F}_R'' = \vec{F}' \quad M_O = F_{\mathrm{R}}' d \qquad d = \frac{M_O}{F_{\mathrm{R}}'}$$

➡ **合力，作用线距简化中心*d***

合力矩定理 $M_O(\bar{F}_{\mathrm{R}}) = M_O = \sum M_O(\bar{F}_i)$

§3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

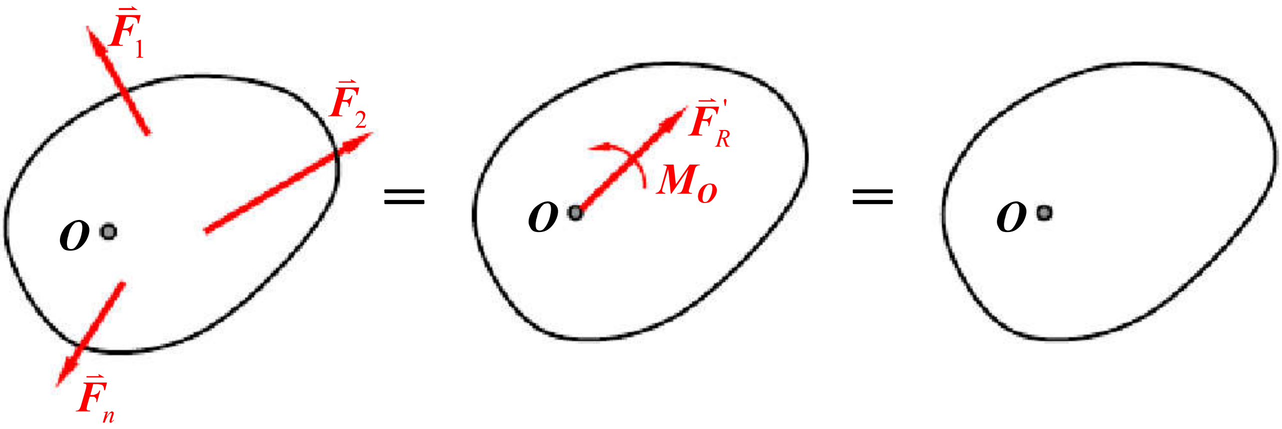
3、$\bar{F}'_{\mathrm{R}} = 0, M_O \neq 0$



合力偶　　与简化中心的位置无关

§3-1 平面任意力系向作用面内一点简化

4、 $\bar{F}'_{\mathrm{R}} = 0, M_O = 0$



平衡　　　与简化中心的位置无关

例3-1

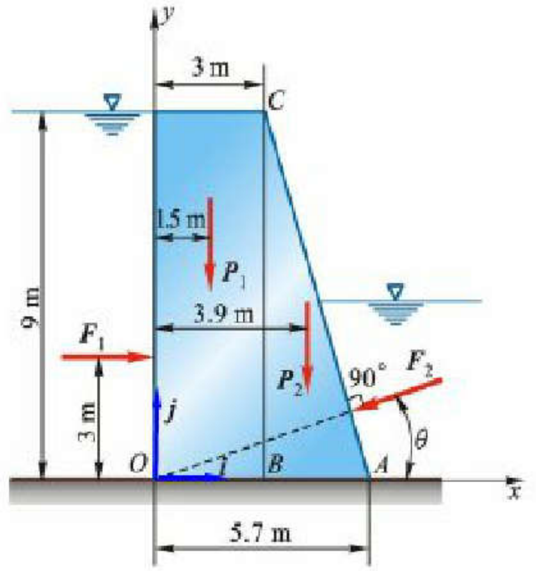
已知：$P_1 = 450\text{kN}, P_2 = 200\text{kN}, F_1 = 300\text{kN}, F_2 = 70\text{kN}$

求：(1) 力系向O点的简化结果；

(2) 合力与OA的交点到点O的距离x；

(3) 合力作用线方程。

解：（1）向O点的简化：



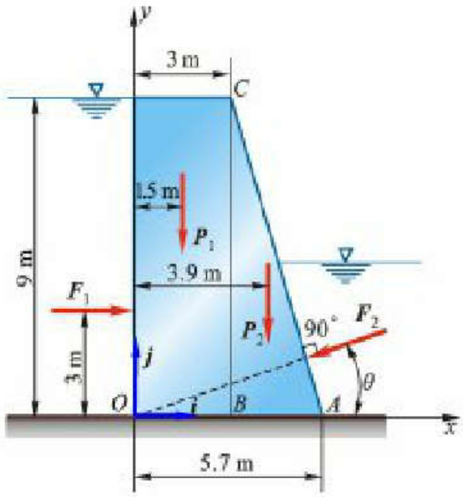
$$\theta = \angle ACB = \arctan\frac{AB}{BC} = 16.7^0$$

$$\sum F_x = F_1 - F_2\cos\theta = 232.9\text{kN}$$

$$\sum F_y = -P_1 - P_2 - F_2\sin\theta = -670.1\text{kN}$$

例3-1

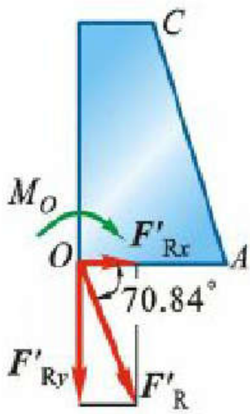
$$F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 709.4\text{kN}$$



$$\cos(\vec{F}_R', \vec{i}) = \frac{\sum F_x}{F_R'} = 0.3283,$$

$$\cos(\vec{F}_R', \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_R'} = -0.9446$$

$$\angle(\vec{F}_R', \vec{i}) = \pm 70.84^\circ, \angle(\vec{F}_R', \vec{j}) = 180^\circ \pm 19.16^\circ$$



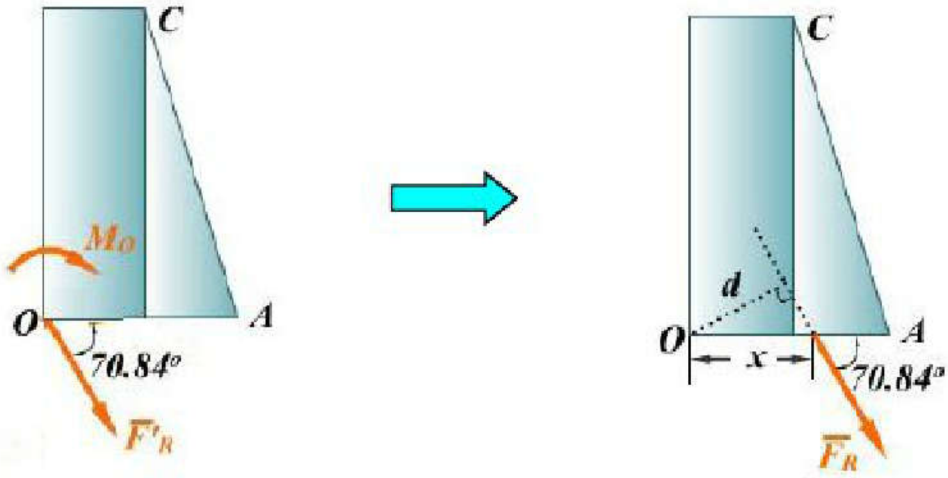
主矩:

$$M_O = \sum M_O(\vec{F})$$

$$= -3F_1 - 1.5P_1 - 3.9P_2 = -2355\text{kN}\cdot\text{m}$$

例3-1

（2）求合力及其作用线位置:



$$d = \frac{|M_o|}{F_R^{'}} = \frac{2355}{709.4}$$

$$= 3.3197\mathbf{m}$$

$$x = \frac{d}{\cos(90^0 - 70.84^0)}$$

$$= 3.514\text{m}$$

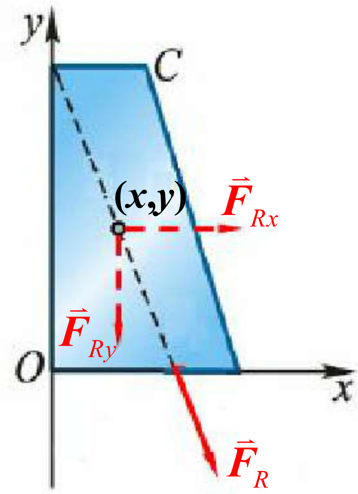
例3-1

（3）求合力作用线方程：

$$M_O = \sum M_O\left(\vec{F}_{\mathrm{R}}\right) = x \cdot F_{\mathrm{R}y} - y \cdot F_{\mathrm{R}x} = x \cdot F'_{\mathrm{R}y} - y \cdot F'_{\mathrm{R}x}$$

$$\Rightarrow \quad -2355 = x(-670.1) - y(232.9)$$

$$\Rightarrow \quad 607.1x - 232.9y - 2355 = 0$$



§3-2 平面任意力系的平衡条件和平衡方程

一、平面任意力系的平衡方程

1、　平面任意力系平衡的充要条件是:

$$\overline{F}_{\mathrm{R}}' = 0 \qquad M_O = 0$$

因为 $F_{\mathrm{R}}' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$ 　　$M_O = \sum M_O(\overline{F}_i)$

平衡方程:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases}$$

一般式

§ 3-2 平面任意力系的平衡条件和平衡方程

2、 平面任意力系的平衡方程另两种形式

二矩式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

* 两个取矩点连线，不得与投影轴垂直

三矩式

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

* 三个取矩点，不得共线

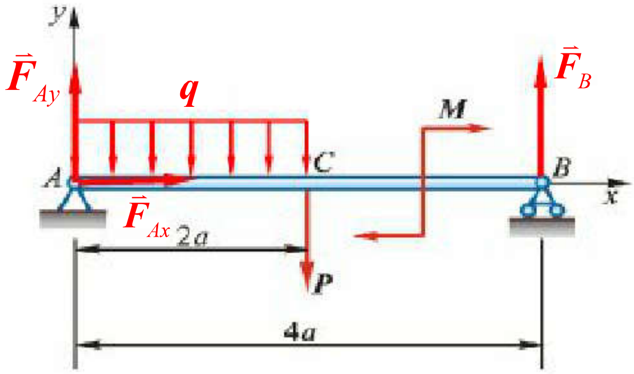
注意：(1) 有三个独立方程，只能求出三个未知数。

例3-2

已知： $P, q, a, M = Pa$

求：支座A, B 处的约束力.

解：取 AB梁，画受力图.



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \qquad F_B \cdot 4a - M - P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0$$

$$F_B = \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}qa$$

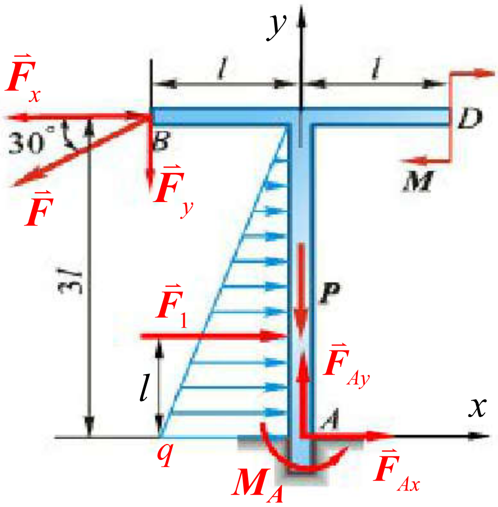
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} - q \cdot 2a - P + F_B = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{P}{4} + \frac{3}{2}qa$$

例3－3

已知：$P=100\text{kN}, M=20\text{kN}\cdot\text{m}, \; q=20\text{kN/m}, F=400\text{kN}, l=1\text{m}$

求：　固定端A处约束力.



解：　取T型刚架，画受力图.

其中　$F_1=\dfrac{1}{2}q\times 3l=30\textbf{kN}$

$\sum F_x=0 \qquad F_{Ax}+F_1-F\cos 30^\circ=0$

$\sum F_y=0 \qquad F_{Ay}-P-F\sin 30^\circ=0$

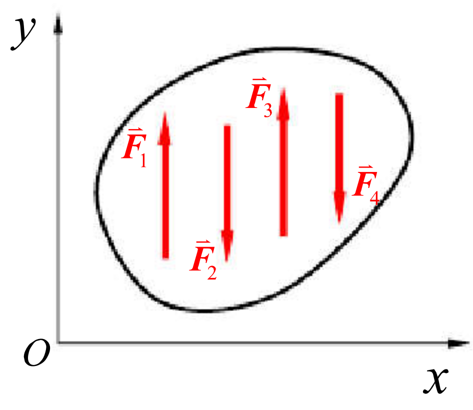
$\sum M_A=0 \qquad M_A-M-F_1\cdot l+F\sin 30^\circ\cdot l+F\cos 30^\circ\cdot 3l=0$

$\Rightarrow$ $F_{Ax}=316.4\text{kN}$　　$F_{Ay}=300\text{kN}$　　$M_A=-1188\text{kN}\cdot\text{m}$

§3-2 平面任意力系的平衡条件和平衡方程

二、平面平行力系的平衡方程

$\sum F_x \equiv 0$　　自然满足



平面平行力系只有两个方程:

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

各力不得与投影轴垂直

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

两点连线不得与各力平行

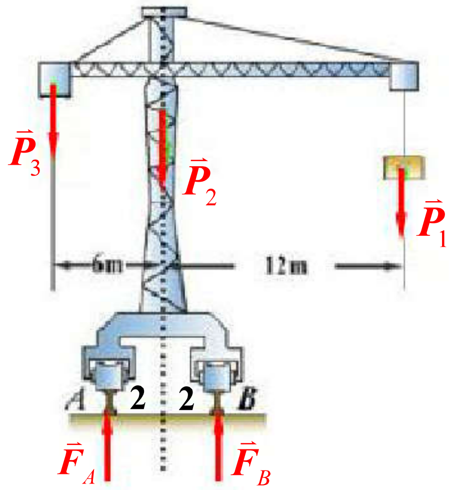
例3-4

已知： $P_1 = 700\text{kN}, P_2 = 200\text{kN}$， $AB = 4\text{m}$

求： （1）起重机满载和空载时不翻倒，平衡载重 P_3;

（2）$P_3 = 180\text{kN}$，轨道 AB给起重机轮子的约束力。

解： (1) 取起重机，画受力图.



满载时， $\vec{F}_A = 0,$

为不安全状况

$$\sum M_B = 0 \qquad P_{3\min} \cdot 8 + 2P_2 - 10P_1 = 0$$

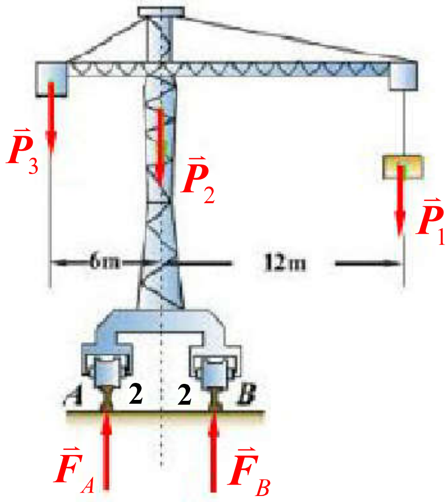
解得 $$P_{3\min} = 75\text{kN}$$

空载时， $\vec{F}_B = 0$， 为不安全状况

$$\sum M_A = 0 \qquad 4P_{3\max} - 2P_2 = 0$$

解得 $F_{3\max} = 350\,\text{kN}$

$$75\text{kN} \le P_3 \le 350\text{kN}$$



(2) 当 $P_3 = 180\text{kN}$ 时

$$\sum M_A = 0 \qquad 4P_3 - 2P_2 - 14P_1 + 4F_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_A + F_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

得: $F_A = 210\text{kN} \qquad F_B = 870\text{kN}$

§3-3 物体系的平衡·静定和超静定问题

一、 物体系

((1))定义：由若干个物体通过约束所组成的系统

(2) 整体系统平衡，则每个物体平衡

(3) 若物体系有N个物体组成，则有3N个独立方程

江苏大学

§3-3　物体系的平衡·静定和超静定问题

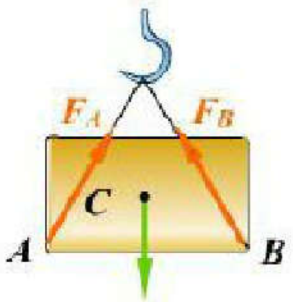
二、　静定与超静定问题

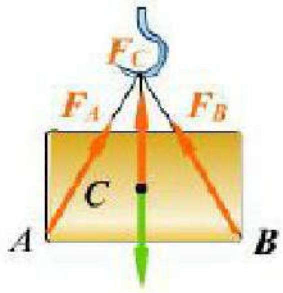
1、**静定：** 未知量个数不超过独立方程数

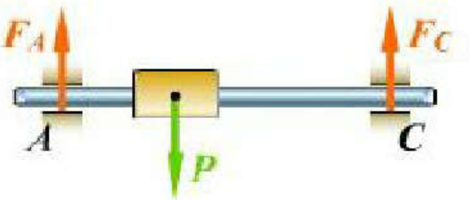
2、**超静定：** 未知量个数超过独立方程数

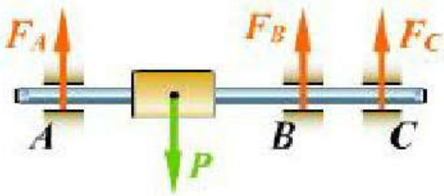
刚体静力学只能解决静定问题。

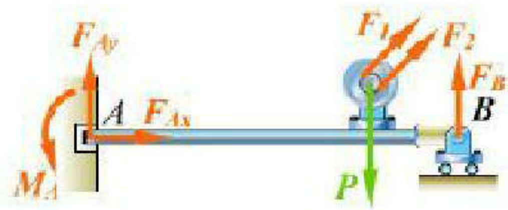
§3-3　物体系的平衡·静定和超静定问题











例3-5

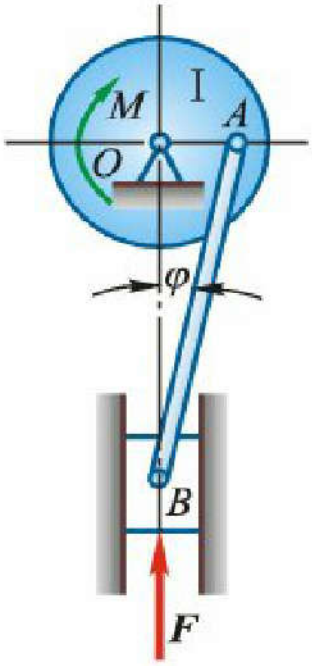
已知：曲轴冲床图，$OA = R, AB = l, \vec{F}$，不计物体自重与摩擦，系统在图示位置平衡;

求：(1)力偶矩M的大小

(2) 轴承 O 处的约束力，

(3) 连杆AB 受力.

(4) 冲头给导轨的侧压力



例3-5

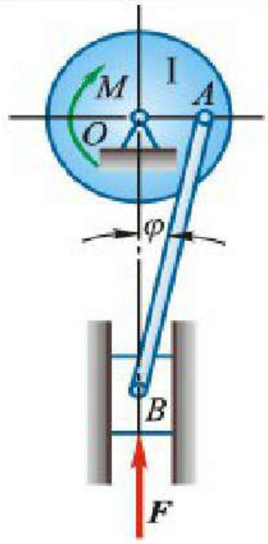
解:　(1)取冲头B,画受力图.

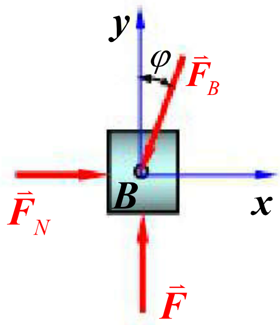
$$\sum F_y = 0 \qquad F - F_B\cos\varphi = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_N - F_B\sin\varphi = 0$$

解得
$$F_B = \frac{F}{\cos\varphi} = \frac{Fl}{\sqrt{l^2 - R^2}}$$

$$F_N = F\tan\varphi = \frac{FR}{\sqrt{l^2 - R^2}}$$





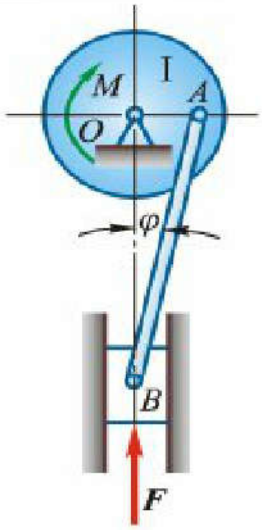
例3-5

(2)取轮，画受力图.

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ox} + F_A \sin\varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Oy} + F_A \cos\varphi = 0$$

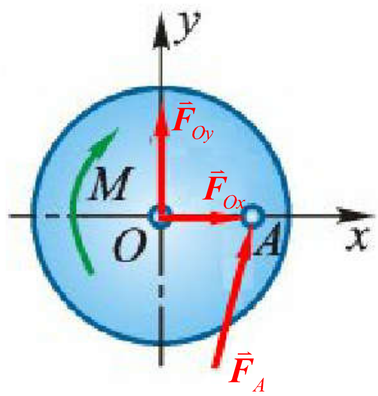
$$\sum M_O = 0 \qquad F_A \cos\varphi - M = 0$$



解得 $$F_{Ox} = -\frac{FR}{\sqrt{l^2 - R^2}}$$

$$F_{Oy} = -F$$

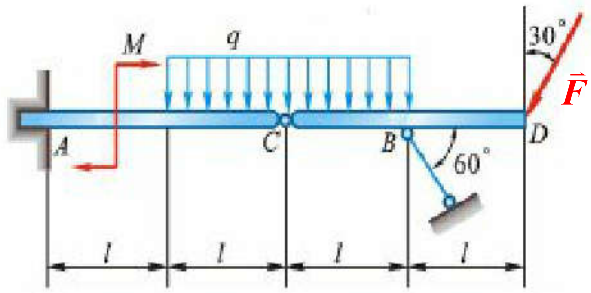
$$M = FR$$



例3-6

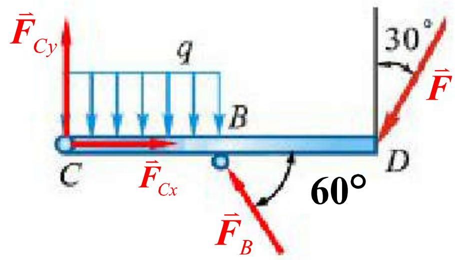
已知： F=20kN， q=10kN/m， M=20kN·m， l=1m；

求： *A,B*处的约束力.



解： (1) 取*CD*梁，画受力图.

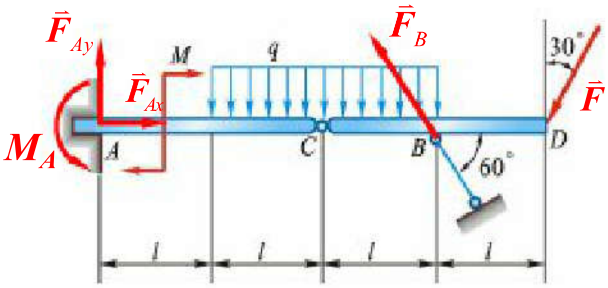
$$\sum M_C = 0$$



$$F_B \sin 60^\circ \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} - F\cos 30^\circ \cdot 2l = 0$$

$\Rightarrow$ F_B=45.77kN

(2) 取整体，画受力图.



$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} - F_B \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Ay} - F_B \sin 60^\circ - 2ql - F \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - M - 2ql \cdot 2l + F_B \sin 60^\circ \cdot 3l - F \cos 30^\circ \cdot 4l = 0$$

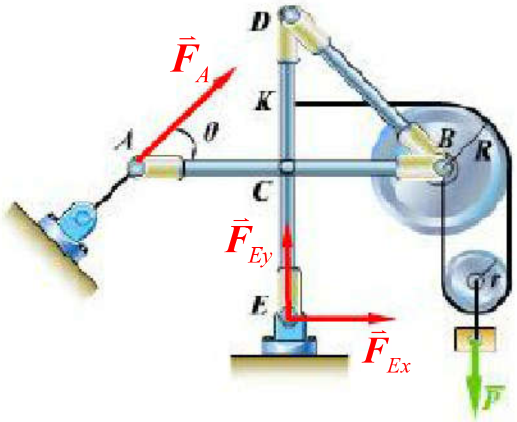
$$\Rightarrow \quad M_A = 10.37\text{kN} \cdot \text{m} \qquad F_{Ax} = 32.89\text{kN} \qquad F_{Ay} = -2.32\text{kN}$$

例3-7

已知：*DC*=*CE*=*CA*=*CB*=2*l*, *R*=2*r*=*l*, $\vec{P}$ $\theta=45^0$. 构件自重不计

求：*A*, *E*支座处约束力及*BD*杆受力.

解： (1) 取整体，画受力图.



$$\sum M_E=0$$

$$-F_A\cdot\sqrt{2}\cdot 2l-P\cdot\frac{5}{2}l=0$$

$$\Rightarrow \quad F_A=-\frac{5\sqrt{2}}{8}P$$

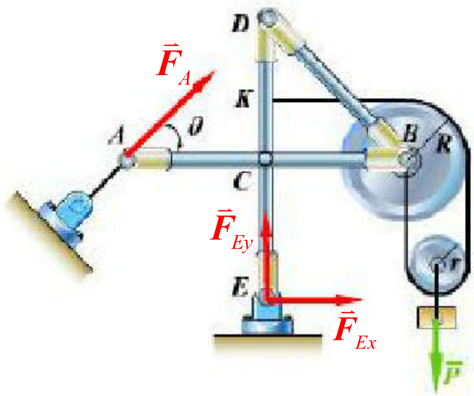
$$\sum F_x=0$$

$$F_{Ex}+F_A\cos 45^0=0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ex}=\frac{5}{8}P$$

例3-7

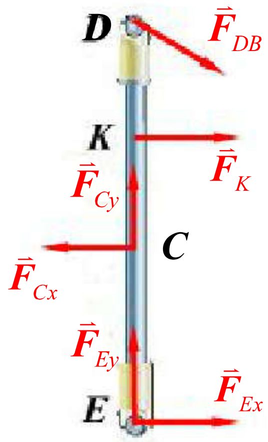
$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Ey} - P + F_A \sin 45^0 = 0$$



$$\Rightarrow \quad F_{Ey} = \frac{13}{8} P$$

(2) 取*DCE*杆，画受力图.



$$\sum M_C = 0$$

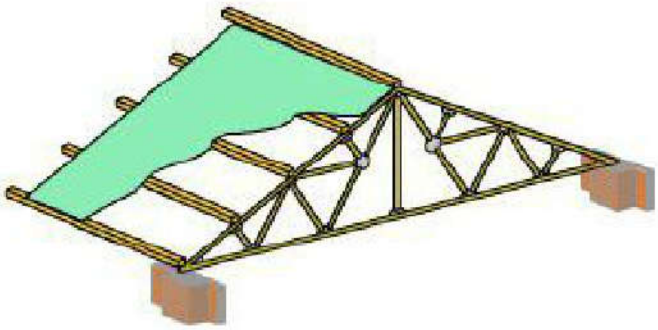
$$-F_{DB} \cos 45^0 \cdot 2l - F_K \cdot l + F_{Ex} \cdot 2l = 0$$

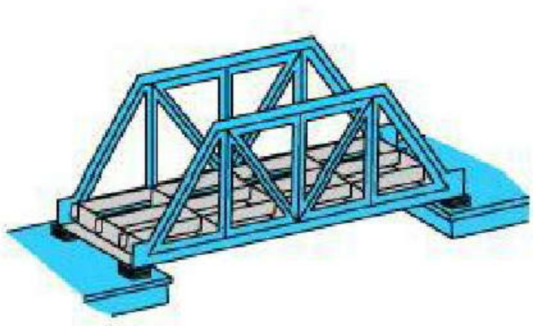
$$\Rightarrow \quad F_{DB} = \frac{3\sqrt{2}}{8} P \qquad \text{(拉)}$$

§3-4　平面简单桁架的内力计算

桁架：一种由杆件彼此在两端用铰链连接而成的结构，它在受力后几何形状不变。

节点：桁架中杆件的铰链接头。





§3-4　平面简单桁架的内力计算

一、关于平面桁架的几点假设：

1. 各杆件为直杆，各杆轴线位于同一平面内；

2. 杆件与杆件间均用光滑铰链连接；

3. 载荷作用在节点上，且位于桁架几何平面内；

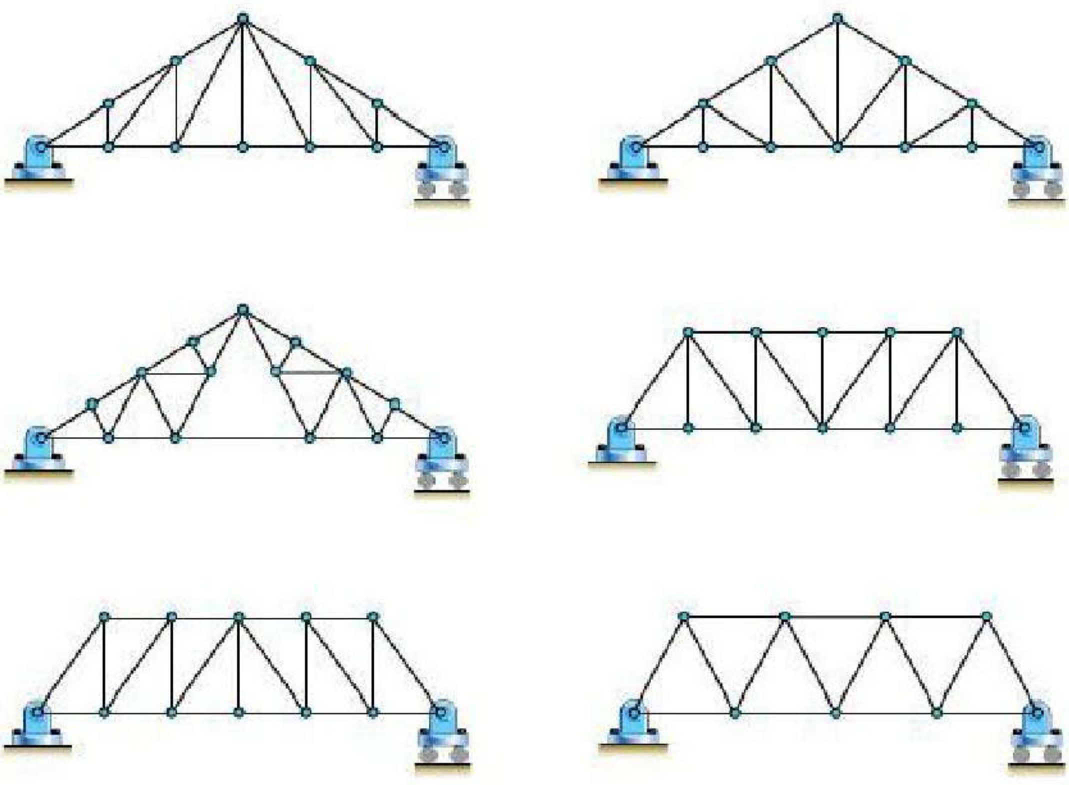
4. 各杆件自重不计或平均分布在节点上。

→ 理想桁架

桁架中每根杆件均为二力杆

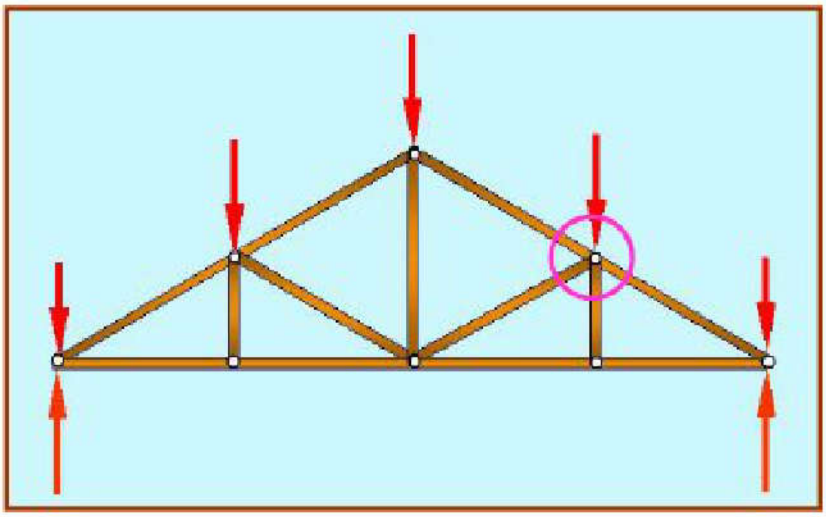
江苏大学

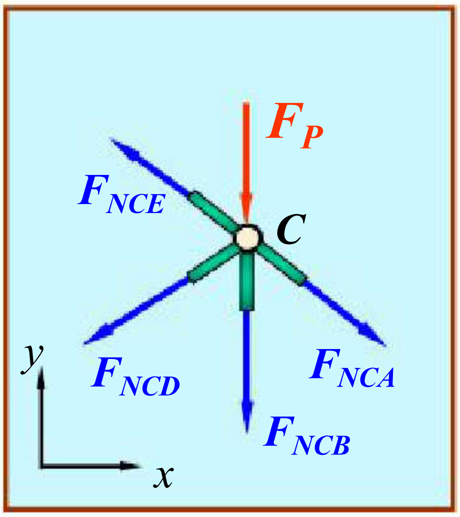
§3-4　平面简单桁架的内力计算



§3-4　平面简单桁架的内力计算

二、节点法　　取各节点为考察对象

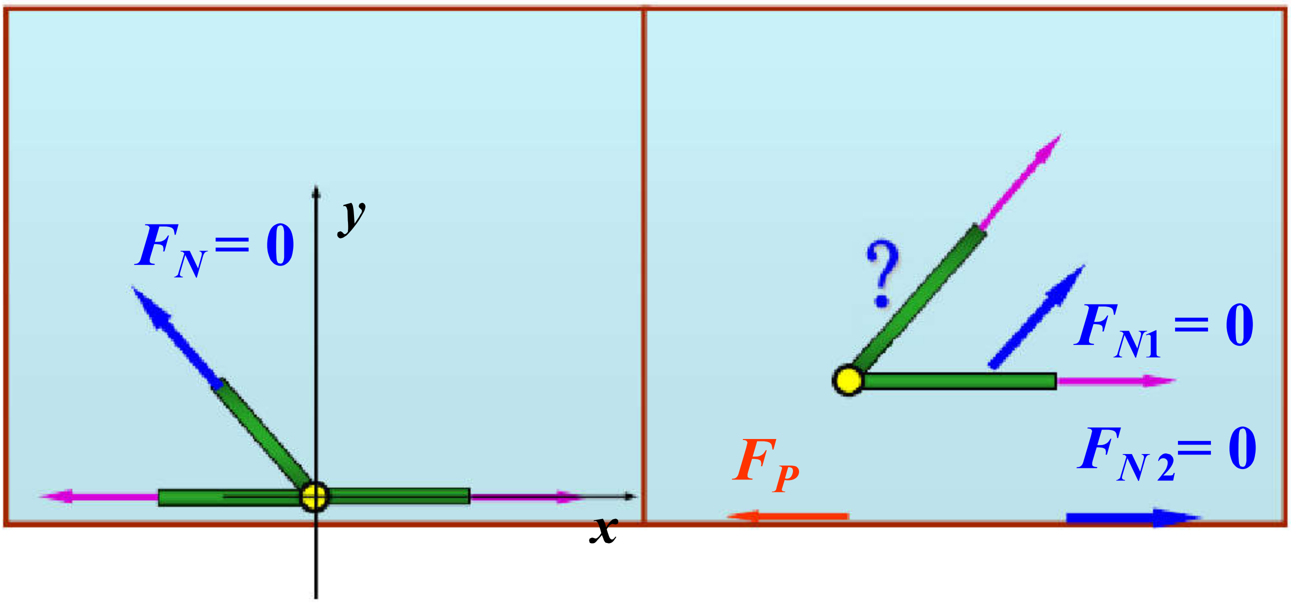




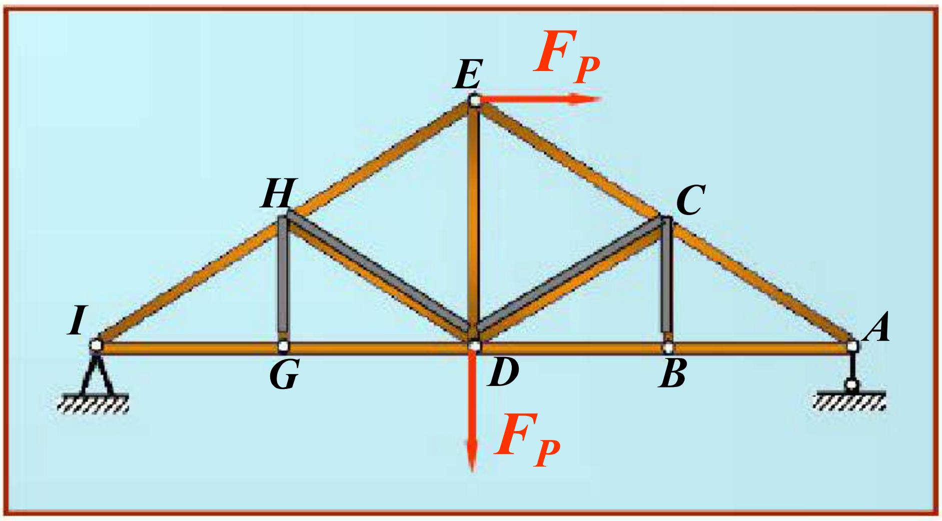
1) 约定各杆内力为拉力

2) 各节点上的力系都是平面汇交力系

零杆的判断:



练习：找零杆

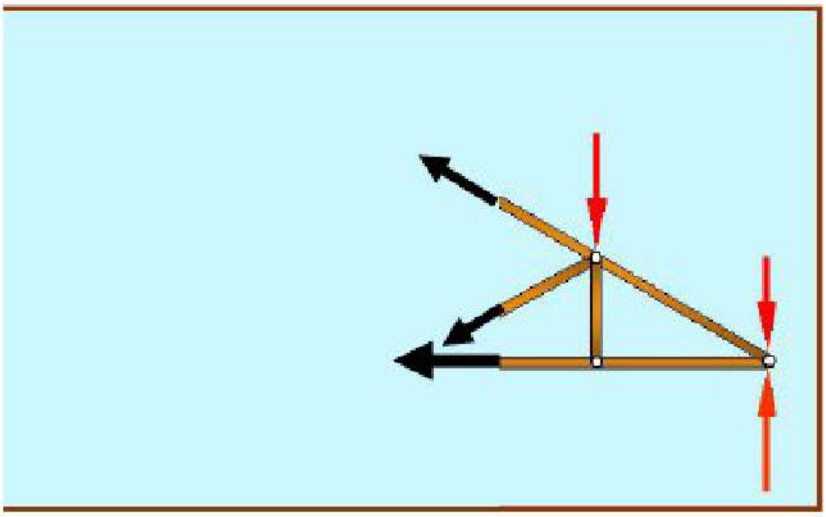


§3-4　平面简单桁架的内力计算

三、截面法

用适当的截面将桁架截开，取其中一部分为研究对象，建立平衡方程，求解被切断杆件内力的一种方法。

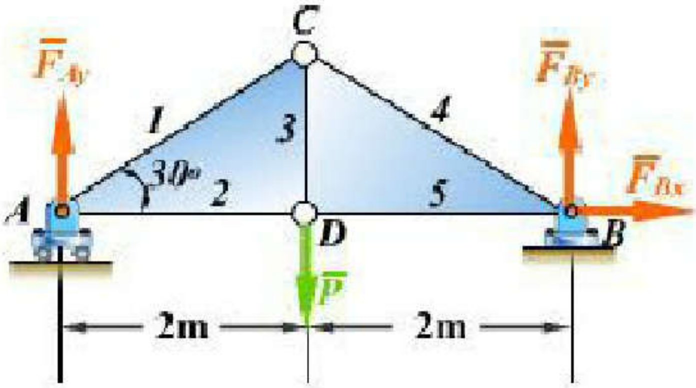
截取的部分上的力系是平面一般力系



例3-8

已知：P=10kN，尺寸如图；

求：桁架各杆件受力.



解：取整体，画受力图.

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Bx} = 0$$

$$\sum M_B = 0 \qquad 2P - 4F_{Ay} = 0 \qquad F_{Ay} = 5\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_{By} - P = 0 \qquad F_{By} = 5\text{kN}$$

例3-8

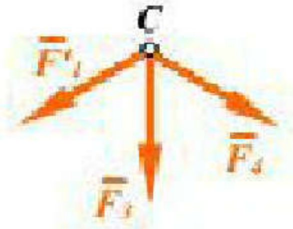
取节点A，画受力图.

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_1 \sin 30^0 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_2 + F_1 \cos 30^0 = 0$$

$F_1 = -10\text{kN}$（压） $F_2 = 8.66\text{kN}$（拉）

取节点C，画受力图.



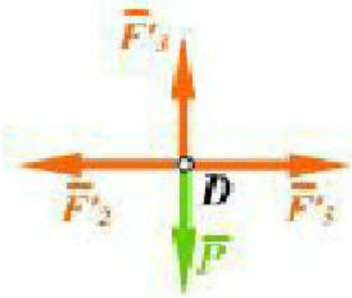
$$\sum F_x = 0 \qquad F_4 \cos 30^0 - F_1' \cos 30^0 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F_3 - \left(F_1' + F_4\right)\sin 30^0 = 0$$

$F_4 = -10\text{kN}$（压） $F_3 = 10\text{kN}$（拉）

例3-8

取节点*D*，画受力图.



$$\sum F_x = 0 \qquad F_5 - F_2^{'} = 0$$

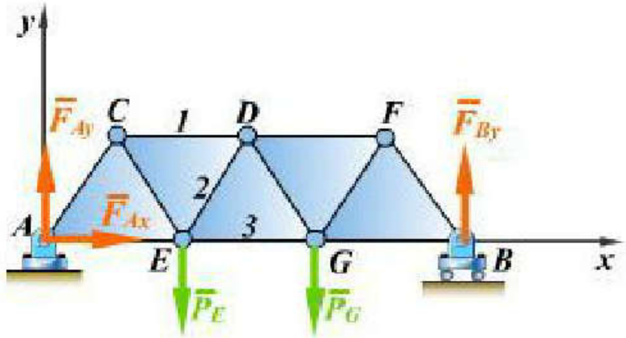
$$F_5 = 8.66\text{kN}$$ （拉）

例3-9

已知：$P_E = 10\text{kN}$，$P_G = 7\text{kN}$，各杆长度均为1m；

求：1，2，3杆受力.

解：取整体，求支座约束力.



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad 2P_E + P_G - 3F_{Ay} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_{By} - P_E - P_G = 0$$

$\Rightarrow$ $F_{Ay} = 9\text{kN}$ $\quad F_{By} = 8\text{kN}$

例3-9

用截面法,取桁架左边部分.

$$\sum M_E = 0 \quad -F_1 \cdot 1 \cdot \cos 30^0 - F_{Ay} \cdot 1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_2 \cdot \sin 60^0 - P_E = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_1 + F_3 + F_2 \cos 60^0 = 0$$

$F_1 = 10.4\text{kN}$ (压)

$F_2 = 1.15\text{kN}$ (拉)

$F_3 = 9.81\text{kN}$ (拉)