第十八章
隐函数定理及其应用

§1 隐函数

一. 隐函数概念

二. 隐函数存在性条件分析

三. 隐函数可微性定理

四. 隐函数求导举例

§1 隐函数

一. 隐函数概念:

在此之前，我们所接触的函数，其表达式大多是自变量的某个算式，如

$$y = x + 1 \ , u = e^{xyz}(\sin xy + \sin yz + \sin zx)$$

这种形式的函数称为显函数.但在不少场合常会遇到另一种形式的函数，其自变量与因变量之间的对应法则是由一个方程式所决定的.这种形式的函数称为隐函数.

设$X\subset R$，$Y\subset R$,函数 F：$X\times Y\to R$.对于方程

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

若存在集合$I\subset X$与$J\subset Y$，使得对于任何$x\in I$，恒有唯一确定的$y\in J$，它与 x 一起满足方程（1），则称由方程（1）确定一个定义在 I 上，值域含于 J 的**隐函数**. 若把它记为

$$y=f(x),x\in I,y\in J,$$

则成立恒等式 $$F(x,F(x))\equiv 0,x\in I.$$

说明 1）隐函数必须指出确定它的方程以及 x,y 的取值范围才有意义；

2）并不是任一方程都能确定出隐函数，例如方程

$$x^2+y^2+C=0$$

C ＞ 0时就不能确定任何函数 $y=f(x)$ 使得

$$x^2+[f(x)]^2+C=0$$

3）即使方程 $F(x,y)=0$ 能确定隐函数，也不见得能从中解出，例如

$$y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$$

从中无法解出 $y=f(x)$

二. 隐函数存在性条件分析

定理18.1（隐函数存在唯一性定理）若满足下列条件：

（i）函数 F 在以 $P(x_0, y_0)$ 为内点的某一区域 $D \subset R^2$ 上连续；

（ii）$F(x_0, y_0) = 0$（通常称为初始条件）；

（iii）在 D 内存在连续的偏导数 $F_x(x, y)$；

（iv）$F(x_0, y_0) \neq 0$，

则在点 p_0 的某邻域 $U(p_0) \subset D$ 内，方程 $F(x, y) = 0$ 唯一地确定了一个定义在某区间 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内地函数（隐函数）$y = f(x)$，使得

1^o $f(x_0)=y_0, x\in(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 时 $(x, f(x))\in U(p_0)$ 且

2^o $f(x)$ 在 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 内连续

注：(1)定理的几何意义：

条件(3)表明曲面 $z=F(x,y)$ 是光滑的；

条件（2）表明曲面和坐标平面 $z=0$ 有一个交点，

条件（4）（不妨设 $F_y(x_0,y_0)>0$ ）表明在 $(x_0,y_0,0)$ 的附近，对固定的 x，设 y 为正向，曲面是单调增加的.

定理的结论是：在点 $(x_0,y_0,0)$ 的附近曲面和 $z=0$ 有一条唯一的光滑交线.

（2）定理的结论是局部性的，即在点(x_0, y_0)的某个邻域内由方程$F(x, y) = 0$可以唯一确定一个可微的隐函数。

例如：$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

在点(0,1)的某个邻域D_1内由方程$x^2 + y^2 - 1 = 0$可以确定唯一的$y = \sqrt{1 - x^2}$。在点的某个邻域D_2内由方程$x^2 + y^2 - 1 = 0$可确定唯一的$y = -\sqrt{1 - x^2}$.

（3） 定理的条件是充分的，非必要的。如上例中的函数：$F(x,y)=x^2+y^2-1=0$在（-1，0）和（1，0）两点，$F_y=0$，破坏了定理中的条件（4），从而定理失效。

从图中可以看出，对于一在右邻域或左邻域内的任何一个值 x，将获得两个值 y：

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad , \quad y=-\sqrt{1-x^2}\ .$$

唯一性条件破坏。

再如：$y^3+x^3=0$在$(0,0)$点只有$F_y=0$ 。不满足条件(4)，

但却有$y=-x$.

三 隐函数可微性定理

Th 18.2 设函数 $F(x,y)$ 满足隐函数存在唯一性定理的条件，又设在 D 内 $F_x(x,y)$ 存在且连续. 则隐函数 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 内可导，且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

n元隐函数唯一存在与连续可微性定理

（见教材P149页）

定理18.3. 若函数 $F(x,y,z)$ 满足:

① 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有**连续偏导数**,

② $F(x_0,y_0,z_0)=0$

③ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0) 某一邻域内可唯一确定一个单值连续函数 $z=f(x,y)$, 满足 $z_0=f(x_0,y_0)$, 并有连续偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

定理证明从略, 仅就求导公式推导如下:

设 $z=f(x,y)$ 是方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，则

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0$$

$\Big\downarrow$ 两边对 x 求偏导

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$$

$\Big\downarrow$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内 $F_z\neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$$

同样可得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

四　隐函数求导举例

例 1 验证方程$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某邻域内能唯一确定一个单值可导、且$x=0$时$y=1$的隐函数$y=f(x)$，并求这函数的一阶和二阶导数在$x=0$的值.

解　令　$F(x,y)=x^2+y^2-1$

则　$F_x=2x$,　$F_y=2y$,　均连续。

$x_0=0$,　$y_0=1$.　$F(0,1)=0$,　$F_y(0,1)=2\neq 0$,

依定理知方程$x^2+y^2-1=0$在点$(0,1)$的某邻域内能唯一确定一个单值可导、且$x=0$时$y=1$的函数$y=f(x)$.

函数的一阶和二阶导数为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y}, \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{1}{y^3},$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = -1.$$

例 2 已知$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，用公式求$\frac{dy}{dx}$.

解 令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}$,

则 $F_x=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{x+y}{x^2+y^2}$,

$F_y=\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{y-x}{x^2+y^2}$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{y-x}.$$

例3. 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法1 利用隐函数求导

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0 \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

再对 x 求导

$$2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{2-z}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

解法2 利用公式

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z,$

则 $F_x=2x,\quad F_z=2z-4,$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z},$$

两边对 x 求偏导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{x}{2-z}\right)'_x=\frac{(2-z)+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}$$

$$=\frac{(2-z)+x\cdot\frac{x}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

例 4 设 $z = f(x+y+z,\ xyz)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial x}{\partial y}$，$\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

解1： 令 $F(x,y,z) = z - f(x+y+z,\ xyz)$.

$u = x+y+z,\quad v = xyz,\quad F = z - f(u,v).$

$$F_x = \big(z - f(u,v)\big)_x'$$

$$= -f_u \cdot (x+y+z)_x' - f_v \cdot (xyz)_x' = -(f_u + yz\, f_v),$$

$$F_y = \big(z - f(u,v)\big)_y'$$

$$= -f_u \cdot (x+y+z)_y' - f_v \cdot (xyz)_y' = -(f_u + xz\, f_v).$$

$$F_z = \big(z - f(u,v)\big)_z'$$

$$= 1 - f_u \cdot (x+y+z)_y' - f_v \cdot (xyz)_y' = 1 - f_u - xy\, f_v.$$

$$F_x = \big(z - f(u,v)\big)'_x = -(f_u + yz\,f_v),$$

$$F_y = \big(z - f(u,v)\big)'_y = -(f_u + xz\,f_v).$$

$$F_z = \big(z - f(u,v)\big)'_z$$

$$= 1 - f_u \cdot (x+y+z)'_y - f_v \cdot (xyz)'_y = 1 - f_u - xy\,f_v.$$

于是，
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{f_u + yz \cdot f_v}{1 - f_u - xy \cdot f_v}.$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{f_u + xz \cdot f_v}{f_u + yz \cdot f_v}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y} = \frac{1 - f_u - xy \cdot f_v}{f_u + xz \cdot f_v}.$$

思路2： 把z看成x,y的函数，对x求偏导数得$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

把x看成z,y的函数，对y求偏导数得$\dfrac{\partial x}{\partial y}$，

把y看成x,z的函数，对z求偏导数得$\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

解2：令 $u=x+y+z,\quad v=xyz,$ 则 $z=f(u,v),$

把z看成x,y的函数，对x求偏导数得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=f_u\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)+f_v\cdot\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$(1-f_u-xy\cdot f_v)\frac{\partial z}{\partial x}=f_u+yz\cdot f_v$$

整理得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_u+yz\cdot f_v}{1-f_u-xy\cdot f_v},$$

把 x 看成 z,y 的函数，对 y 求偏导数得

$$0=f_u\cdot(\frac{\partial x}{\partial y}+1)+f_v\cdot(xz+yz\frac{\partial x}{\partial y}),$$

整理得 $$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{f_u+xz\cdot f_v}{f_u+yz\cdot f_v},$$

把 y 看成 x,z 的函数，对 z 求偏导数得

$$1=f_u\cdot(\frac{\partial y}{\partial z}+1)+f_v\cdot(xy+xz\frac{\partial y}{\partial z}),$$

整理得 $$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1-f_u-xy\cdot f_v}{f_u+xz\cdot f_v}.$$