§3 二元函数的连续性

一、二元函数的连续性

二、有界闭区域上

二元连续函数的性质

一、二元函数的连续性概念

1.二元函数连续的概念

定义2 设 $z=f(X)=f(x,y)$, 在区域D上有定义.

$X=(x,y)\in D$, $X_0=(x_0,y_0)\in D$,

若 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=f(X_0)$

则称 $f(X)$ 在 X_0 连续, X_0 称为 $f(X)$ 的连续点.

否则称 $f(X)$ 在 X_0 间断, X_0 称为 $f(X)$ 的间断点.

若 $f(X)$ 在 D 上每一点都连续, 则称 $f(X)$ 在 D 上连续, 记为 $f(X) \in C(D)$.

易知, 例2中 $f(x, y)$在$(0, 0)$间断(极限不存在),

例1中, $f(x,y) = xy\sin\dfrac{1}{x+y}$ 在直线$x + y = 0$上

每一点都间断.

注

1. 二元函数 $f(X)$在 X_0 连续必须满足三个条件.
在 X_0 有定义, 在 X_0 的极限存在, 两者相等,

定义可推广到三元以上函数中去.

2. 多元连续函数的和, 差, 积, 商(分母不为0)以及多元连续函数的复合仍是多元连续函数.

多元初等函数：

由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子所表示的多元函数叫**多元初等函数**。

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

在定义区域内的连续点求极限可用"**代入法**"：

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) \quad (P_0 \in \text{定义区域})$$

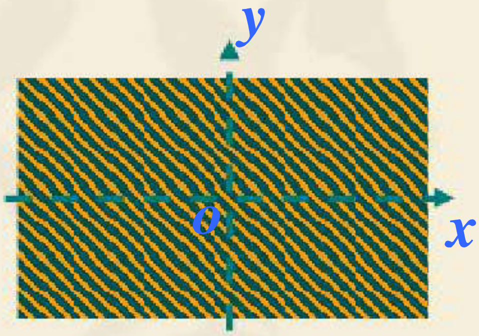
2. 连续函数性质：

（1）若 f 在点 P_0 连续，并且 $f(P_0)>0$，则存在 P_0 的领域 $O_\delta(P_0)$，当 $x\in O_\delta(P_0)$ 时有 $f(P)>0$；

（2）两个连续函数的和、差、积、商（若分母不为 0）都是连续函数；

（3）（复合函数的连续性）：设 D 是 R^2 中的开集，$(x_0,y_0)\in D$。函数 $f:D\to R$，$(x,y)\to Z$ 在点 $(x_0,y_0)\in D$ 连续。又设 $x=x(t),\ y=y(t)$，x 和 y 的值域在 D 内，并且当 $t=t_0$ 时 $x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0$，而 x,y 却在 t_0 连续。则复合函数在 t_0 连续。

例1 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x+y}{xy}$.



解 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是多元初等函数。

定义域：$D=\{(x,y)\mid x\neq 0,\ y\neq 0\}$.（不连通）

点 $(1,\ 2)\in D_1=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}\subset D$.

于是,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x+y}{xy}=\frac{1+2}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}.$$

例2 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

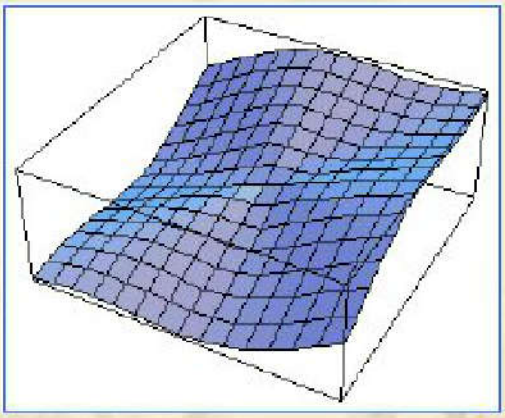
解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

例3 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在(0,0)处的连续性.



解 取 $x=\rho\cos\theta,$

$y=\rho\sin\theta$

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|$$

$$=\left|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\right|<2\rho$$

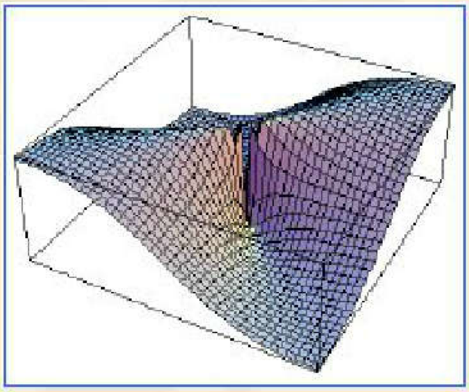
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时

$$\left| f(x,y) - f(0,0) \right| < 2\rho < \varepsilon$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

故函数在(0,0)处连续.

例4 讨论函数



$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0,0)的连续性.

解 取 $y=kx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

其值随k的不同而变化， 极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续.

3. 多元初等函数在它有定义的区域内都是连续的.

所谓多元初等函数是指以 $x, y, z, \ldots$ 为自变量的基本初等函数 $f(x), \varphi(y), g(z), \ldots$ 以及常函数, 经有限次四则运算和复合所构成的函数.

如 $f(x) = e^{xy} \cdot \sin(x^2+y)$, $\quad f(x,y) = \ln\sin(xy) + \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+z} - 3\operatorname{tg}(e^{\sin xy})$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{\sin xy} \cdot \sin(x^2+y) = e^0 \cdot \sin 0 = 0.$

4. 二元连续函数的几何意义:

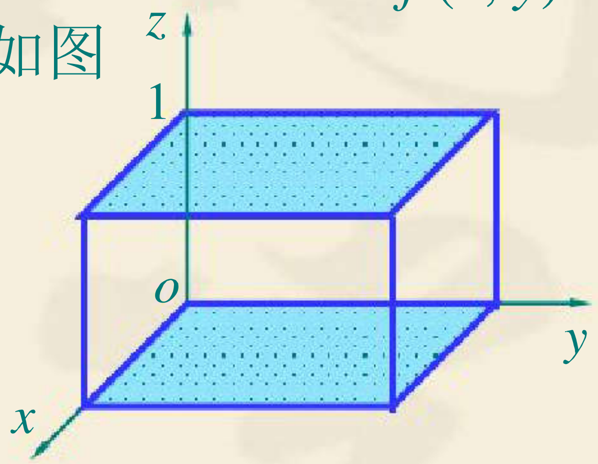
定义在区域 D 上的二元连续函数 $z = f(X) = f(x, y)$ 表示了在 D 上的一片没有 "空洞", 没有 "裂缝" 的连续曲面.

这里条件 "D 是一区域" 是必要的. 若 D 不是区域, $z = f(X)$ 可能不是通常意义下的连续曲面.

例. 设 $D=\{(x,y)\mid x,y$ 均为有理数$\}\subseteq R^2$. $z=f(x,y)$ 是定义在 D 上的, 在 D 上恒等于1, 在别的点上无定义的函数, 即

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当}(x,y)\in D\text{时},\\ \text{无定义}, & \text{当}(x,y)\notin D\text{时}.\end{cases}$$

如图



可知, $\forall\ (x_0,y_0)\in D$,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=1=f(x_0,y_0)$$

但曲面$z=f(x,y)$不是通常意义下的连续曲面.

二 有界闭区域上二元连续函数的性质

性质1. 设$\overline{D} \subseteq R^2$为**有界闭域**，若$f(X)$在$\overline{D}$上**连续**，则 $f(X)$在$\overline{D}$上必须取最大值和最小值.

性质2. 设$\overline{D} \subseteq R^2$为**有界闭域**，若$f(X)$在$\overline{D}$上**连续**，则 $f(X)$在$\overline{D}$上有界. 即$\exists M > 0$,使得对$\forall X \in \overline{D}$,有$|f(X)| \le M$.

P.105 习题 6

6. 若 $f(x,y)$ 在某一区域 G 内对变量 x 为连续，对变量 y 满足李普希兹条件，即对任何 $(x,y')\in G,(x,y'')\in G$

有 $|f(x,y')-f(x,y'')|\le L|y'-y''|$

其中 L 为常数，则此函数在 G 内连续。

证明 因为 $f(x,y)$对变量 x连续，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0,$
使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{2L}\}$

当 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时，

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|$$

$$\leq |f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}+L|y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2}+L\delta<\frac{\varepsilon}{2}+L\frac{\varepsilon}{2L}=\varepsilon$$

小结

多元函数的定义

多元函数极限的概念

（注意趋近方式的任意性）

多元函数连续的概念

闭区域上连续函数的性质

作业：P105　1，2，3，4，5，6，7．