§2 二元函数的极限

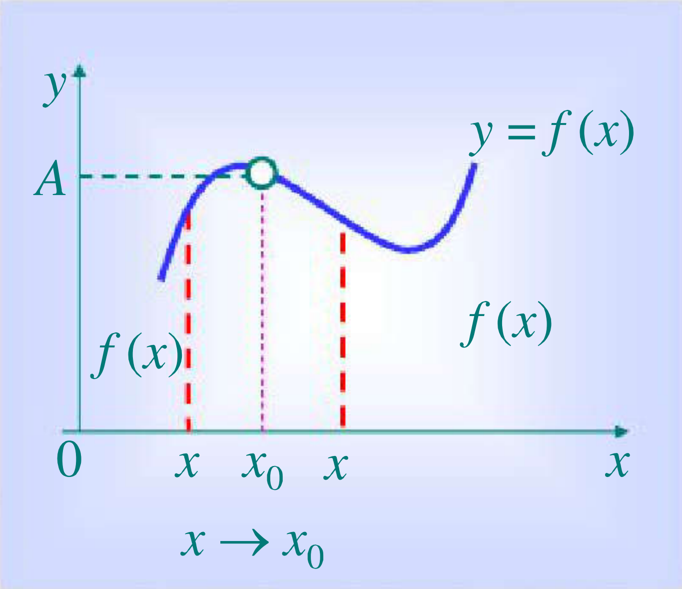
一、二元函数的极限

二、多元函数的极限

三、累次极限

回忆一元函数的极限. 设 $y=f(x)$,

所谓 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 表示当 x 不论是从 x_0 的左边还是从 x_0 的右边无限接近于 x_0 时，对应的函数值无限接近于数 A. 如图

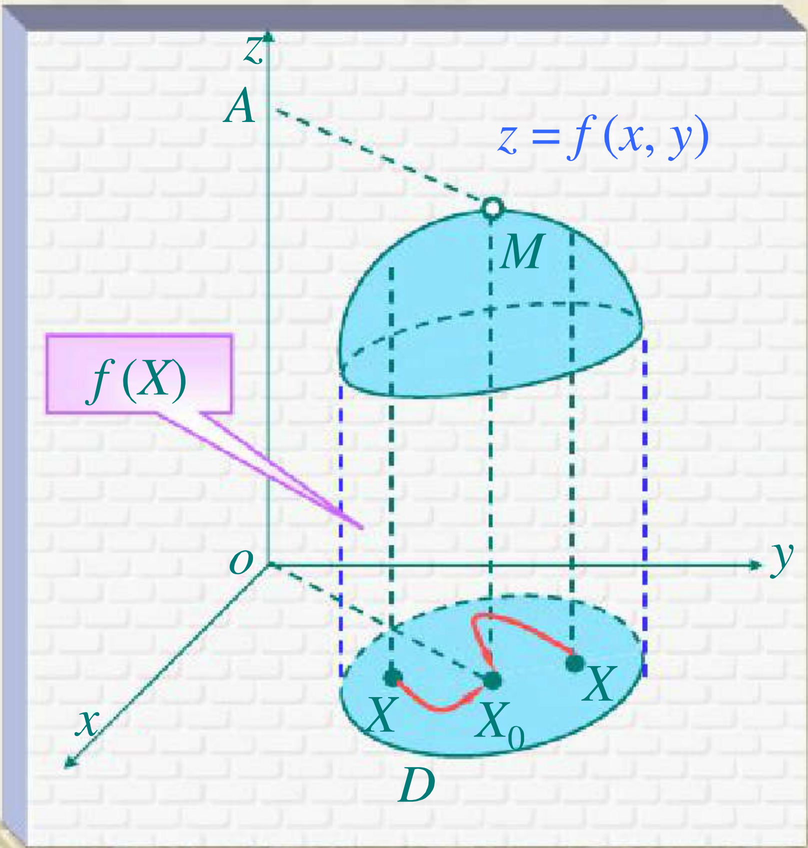


$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 用 $\varepsilon-\delta$ 语言表示. 就是 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$.

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

一、二元函数的极限

设二元函数 $z = f(X) = f(x, y)$, 定义域为D. 如图



如果当X在D内变动并无限接近于X_0时（从任何方向, 以任何方式),对应的函数值 $f(X)$无限接近于数 A,

则称A为当X趋近于X_0时$f(X)$的极限.

类似于一元函数, $f(X)$无限接近于数 A可用 $|f(X)-A|<\varepsilon$ 刻划. 而平面上的点 $X=(x, y)$ 无限接近于点 $X_0=(x_0, y_0)$ 则可用它们之间的距离

$$\|X-X_0\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$ 来刻划.

定义1 设二元函数 $z = f(X) = f(x, y)$. 定义域为D. $X_0 = (x_0, y_0)$是 D 的一个聚点. A 为常数.

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < \| X - X_0 \|$ $= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$时，对应的函数值满足

$$|f(X) - A| < \varepsilon$$

则称 A 为$z = f(X)$的, 当 X 趋近于X_0时(二重)极限.

记作 $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = A$, 或 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$,

也可记作$f(X) \to A(X \to X_0)$，或，$f(x, y) \to A\ (x \to x_0, y \to y_0)$

利用点函数的形式有 n元函数的极限

定义 2′ 设n元函数$f(P)$的定义域为点集D，P_0是其聚点，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|<\delta$$

的一切点 $P\in D$，都有$|f(P)-A|<\varepsilon$成立，则称 A 为$f(P)$当$P\to P_0$时的**极限**，记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

说明：

（1）定义中 $P \to P_0$ 的方式是任意的；

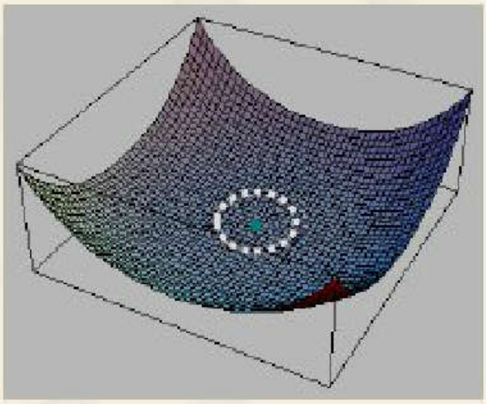
（2）二元函数的极限也叫**二重极限** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$;

（3）二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

（4）二重极限的**几何意义**：

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists P_0$ 的去心δ邻域 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$。 在 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$ 内，函数 $z = f(x,y)$ 的图形总在平面 $z = A + \varepsilon$ 及 $z = A - \varepsilon$ 之间。

例2 求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$



证 $\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|$

$$=\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le x^2+y^2$$

$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta=\sqrt{\varepsilon},$

当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon.$$

原结论成立.

注意： $P \to P_0$ 是指 P 以任何方式趋于 P_0.

一元中

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A, \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=A, \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

多元中

$$\lim_{P\to P_0} f(x)=A, \quad \Rightarrow f(x)\to A \quad (P\text{ 以某种方式趋于 }P_0).$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x)=A \quad \Rightarrow \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}} f(x,y)=A & (\text{沿平行 } x \text{ 轴} \to P_0) \\ \lim\limits_{\substack{x=x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A & (\text{沿平行 } y \text{ 轴} \to P_0) \\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_0+k(x-x_0)\to y_0}} f(x,y)=A & (\text{沿 } y=y_0+k(x-x_0) \to P_0) \end{cases}$$

确定极限不存在的方法：

（1） 令$P(x,y)$沿$y=y_0+k(x-x_0)$趋向于$P_0(x_0,y_0)$，若极限值与k有关，则可断言极限不存在；

（2） 找两种不同趋近方式，使 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，但两者不相等，此时也可断言 $f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处极限不存在.

例3 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x\neq 0, y\neq 0,\\ 0, & x=0, y=0.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

解 $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$,

但取 $y=kx$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

其值随 k 的不同而变化。

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

例4 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(x^2+2y^2+3xy)$.

解 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(x^2+2y^2+3xy)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(x^2)+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(2y^2)+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(3xy)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(x^2)+2\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(y^2)+3(\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}x)\cdot(\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}y)$$

$$=0+2\cdot 1+3\cdot 0\cdot 1=2.$$

例5 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \cdot \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$,

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \overset{u=x^2 y}{=\!=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$,

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

于是，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = 0.$

注1. 定义1中要求X_0是定义域D的聚点，这是为了保证 X_0的任意近傍总有点X使得$f(X)$存在，进而才有可能判断 $|f(X)-A|$ 是否小于 ε 的问题.

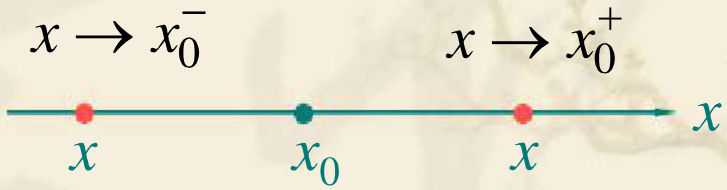
若D是一区域. 则只须要求 $X_0 \in \overline{D} = D \bigcup \partial D$, 就可保证 X_0 是D的一个聚点.

另外, " $0 < \|X - X_0\| < \delta$ "表示 X 不等于X_0.

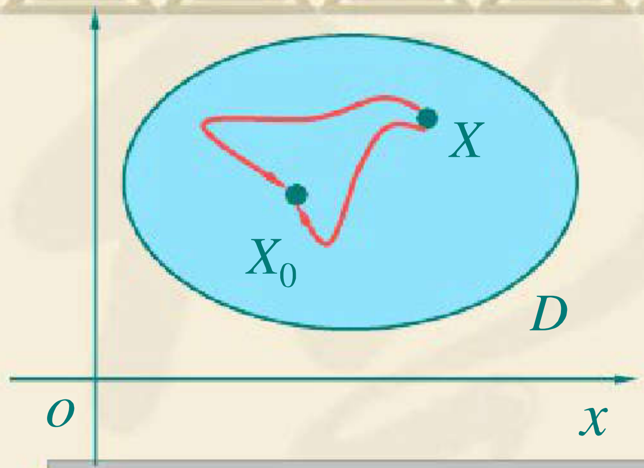
2. 对一元函数 $f(x)$,

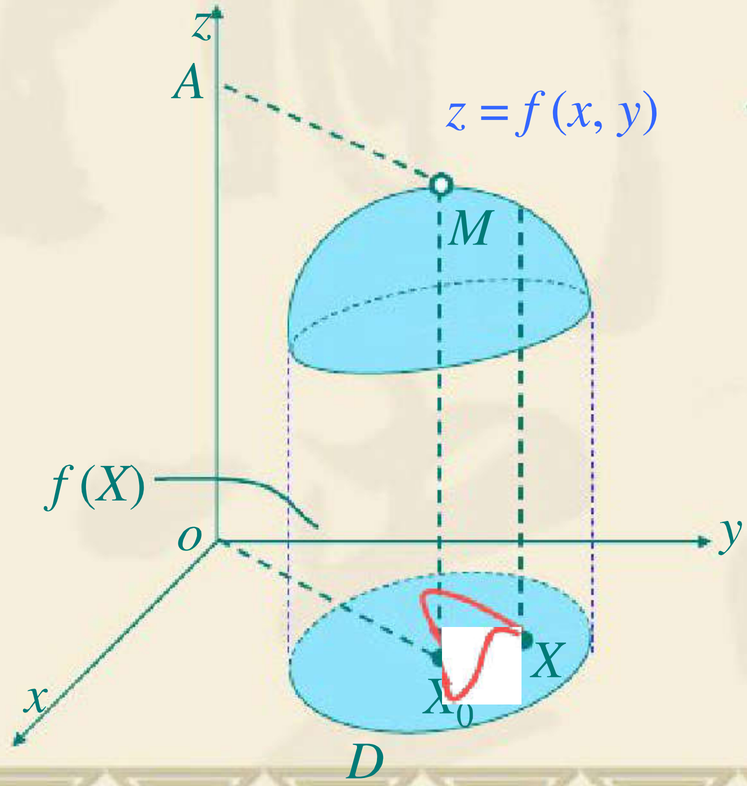
有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A.$

如图



对二元函数 $f(X)$, 如图





有 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=A.$

$\Leftrightarrow$ 点X以任何方式趋近于X_0时, $f(X)$的极限都存在且为A.

因此，如果当X以某几种特殊方式趋于X_0时，$f(X)$的极限为A. 不能断定二重极限 $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = A$.

若X以不同方式趋于X_0时，$f(X)$的极限不同，则可肯定二重极限 $\lim\limits_{X \to X_0} f(X)$不存在.

3. 极限定义可推广到三元以上函数中去，且多元函数极限的运算法则等都与一元函数相同.

例6. 设二元函数$f(X)=f(x,y)=xy\sin\dfrac{1}{x+y}$,

用定义证明: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} xy\sin\dfrac{1}{x+y}=0$

证: $\forall\varepsilon>0$,(要证$\exists\delta>0$, 使得当$0<\|X-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}$

$<\delta$时, 有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$).

考虑$|f(x,y)-0|=\left|xy\sin\dfrac{1}{x+y}\right|\le|xy|\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$

要使 $|f(x,y)-0|<\varepsilon$, 只须 $\dfrac{x^2+y^2}{2}<\varepsilon$

即 $\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{2\varepsilon}$

取 $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$,则当 $\|X-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon$$

故 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\sin\frac{1}{x+y}=0$$

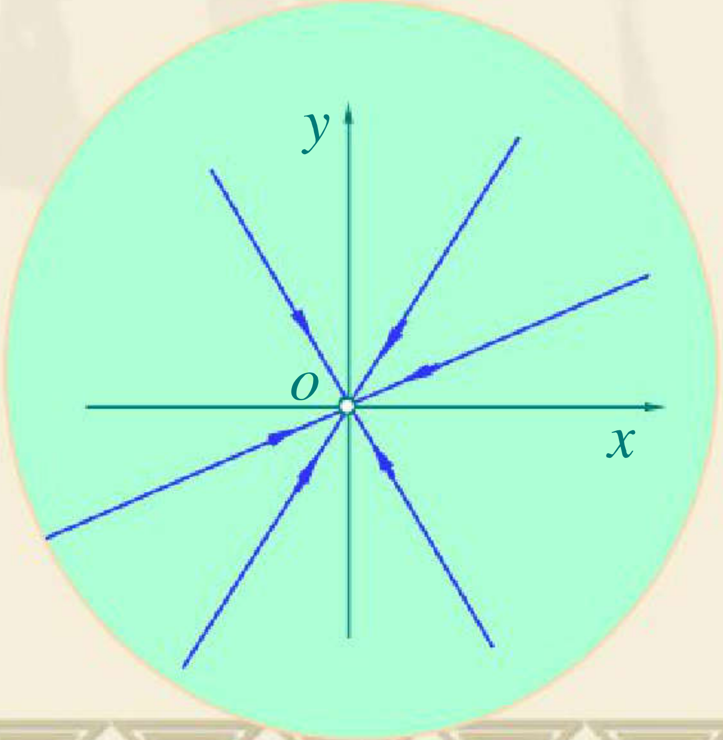
例7. 设$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & 当x^2 + y^2 \neq 0时, \\ 0, & 当x^2 + y^2 = 0时, \end{cases}$

证明 $f(x, y)$在 $(0, 0)$点的极限不存在.

证: 由注2知, 只须证明当X 沿不同的线路趋于$(0, 0)$时, 函数$f(x, y)$对应的极限也不同即可.

考察 $X=(x, y)$沿平面直线 $y=kx$ 趋于(0, 0)的情形.

如图



对应函数值

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{kx^2}{x^2(1+k^2)}, \quad (x,y)\neq(0,0)$$

从而, 当 $X=(x, y)$ 沿 $y=kx$ 趋于(0,0)时,

函数极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

当 k 不同时, 极限也不同. 因此, $f(x, y)$ 在 (0, 0)的极限不存在 .

请考察当$X=(x, y)$沿 x 轴, 沿 y 轴趋于(0, 0)的情形.

沿 x 轴, $y=0$. 函数极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0}=0$$

沿 y 轴, $x=0$. 函数极限

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0+y^2}=0$$

但不能由此断定该二重极限为0 (注2).

二　多元函数的极限

1.定义 设 D 是 R^n 的一个开集，$a\in D$，A 是一个常数，$f(x)$ 是定义在 $D-\{a\}$ 上的 n 元函数．如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in O_\delta(a)-\{a\}$ 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to a$ 时 n 元函数收敛，其极限是 A，记为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ or $f(x)\to A\quad(x\to a)$

or $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \vdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,x_2,\cdots x_n)=A$，

（其中，$x=(x_1,\cdots,x_n),a=(a_1,\cdots,a_n)$）.

说明：1） 上述极限又称重极限或全极限，它与后面讲的逐次极限或累次极限不同；

2） 从形式上看，n 元函数极限的定义与一元函数的极限完全一样，但在这里 $x, a \in R^n$， $O_\delta(a)-\{a\}$ 是 n 维去心开球；

3） “$x \in O_\delta(a)-\{a\}$” 可改写为 “$0<|x-a|<\delta$”，用坐标写出来为：$0<\sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}<\delta$

4） “$x \in O_\delta(a)-\{a\}$”、“$0<|x-a|<\delta$”、和下面的叙述是等价的：$|x_1-a_1|<\delta$， $|x_2-a_2|<\delta$， …，

$|x_n - a_n| < \delta_n$， $(x_1, \cdots, x_n) \neq (a_1, \cdots, a_n)$ （即 $x \neq a$）；但要注意： $|x_i - a_i| < \delta$ （ $i = 1,2,\cdots,n$ ）， $x \neq a$ 和 $0 < |x_i - a_i| < \delta$ （$i = 1,2,\cdots,n$）不是一回事！

5） 和一元函数的情形一样，如果 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，则当 x 以任何点列及任何方式趋于 a 时，$f(x)$ 的极限即是 A；反之，x 以任何方式及任何点列趋于 a 时， $f(x)$ 的极限即是 A，即在的极限存在且为（Hermite 定理）。但若 x 在某一点列或沿某一曲线 $\to a$ 时， $f(x)$ 的极限为 A，还不能肯定 $f(x)$ 在 a 的极限是 A。所以说，这里的“ $x \to a$ ”要比一元函数的情形复杂得多.

2.多元函数极限的性质

性质 1（局部有界性） 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在，则存在 $\delta > 0$，使得 $f(x)$ 在 $O_\delta(a) - \{a\}$ 内有界；

性质 2（保号性） 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A > 0$，则存在 $\delta > 0$，使得在 $O_\delta(a) - \{a\}$ 内取正值；

性质 3（比较性） 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$，并且当 $x \in O_\delta(a) - \{a\}$ 时有 $f(x) \geq g(x)$，则 $A \geq B$；

性质 4（四则运算）与一 元函数运算相同

除了这些相似性之外，我们也指出，多元函数的极限较之一元函数的极限而云，要复杂得多，特别是自变量的变化趋势，较之一元函数要复杂.

三.　累次极限:

前面讲了$P(x,y)$以任何方式趋于$P_0(x_0,y_0)$时的极限，我们称它为二重极限，对于两个自变量x,y依一定次序趋于x_0，y_0时 $f(x,y)$ 的极限，称为累次极限。

对于二元函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$的累次极限由两个

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$

二重极限与累次极限的关系:

（１）两个累次极限可以相等也可以不相等，所以计算累次极限时一定要注意不能随意改它们的次序。

（２） 两个累次极限即使都存在而且相等，也不能保证二重极限存在

（３）二重极限存在也不能保证累次极限存在二重极限存在时，两个累次极限可以不存在.

（4）二重极**限**极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

和累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

(或另一次序)都存在 , 则必相等.

（5）累次极限与二重极限的关系

若累次极限和二重极限都存在， 则它们必相等