第十六章　多元函数的极限与连续

§1 平面点集与多元函数

一　　平面点集

二　　R^2 上的完备性定理

三　　多元函数的概念

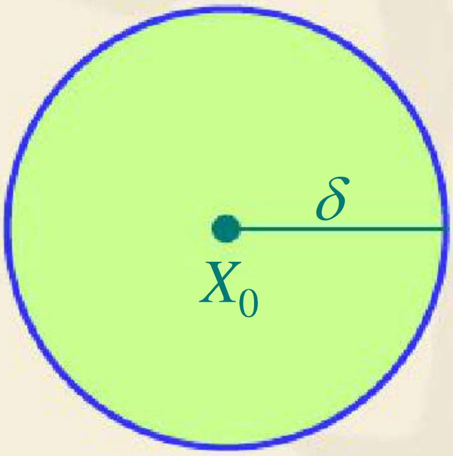
一、平面点集

1. 邻域: 以点 $X_0=(x_0, y_0)$为中心, 以 δ为半径的圆内部点的全体称为 X_0 的δ邻域. 记作$\mathrm{U}(X_0,\delta)$,

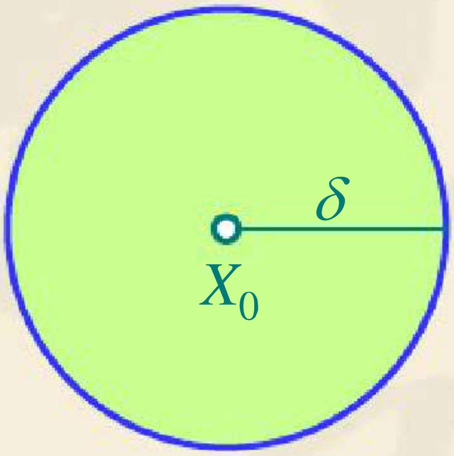
即 $$\mathrm{U}(X_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

$$=\{X=(x,y) \mid \|X-X_0\|<\delta\}$$

记 $\hat{\mathrm{U}}(X_0,\delta)=\mathrm{U}(X_0,\delta)-\{X_0\}$, 称为 X_0 的去心 δ邻域. 如图



U (X_0, δ)



$\hat{U}$ (X_0, δ)

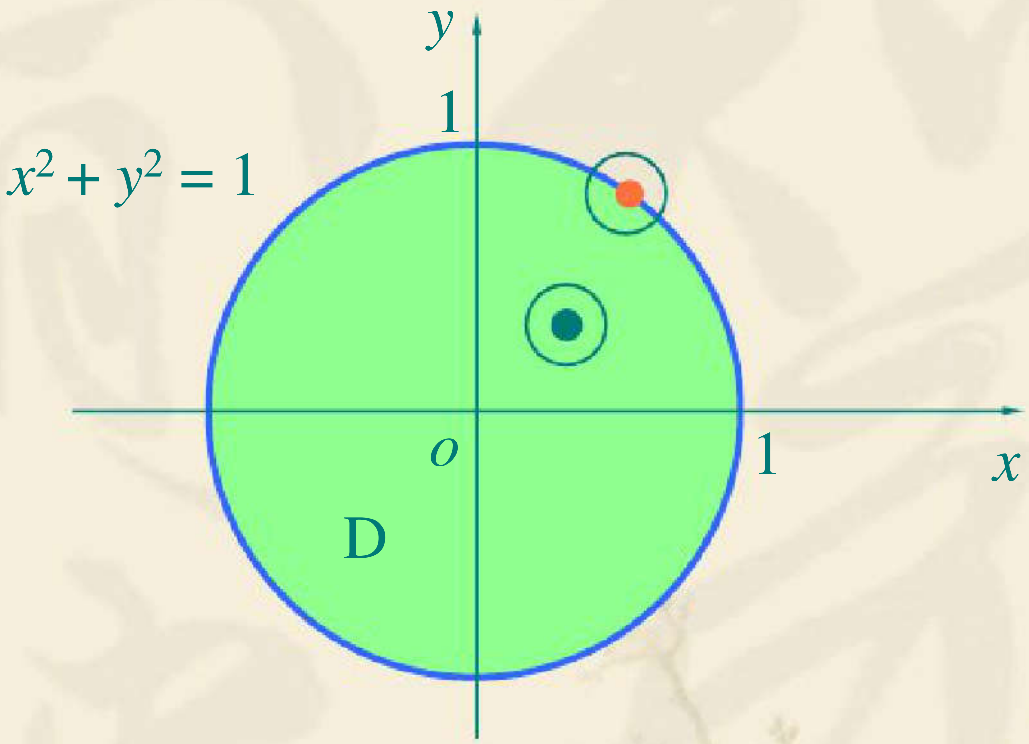
当不关心邻域半径时, 简记为U (X_0)和 $\hat{U}$ (X_0).

2. 内点: 设 E 是一平面点集, $X_0=(x_0,\ y_0)\in E$, 若**存在**邻域 $U(X_0,\delta)\subseteq E$, 则称 X_0 为 E 的内点.

E 的全体内点所成集合称为 E 的内部, 记为E^0.

比如$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的定义域D为单位圆盘,

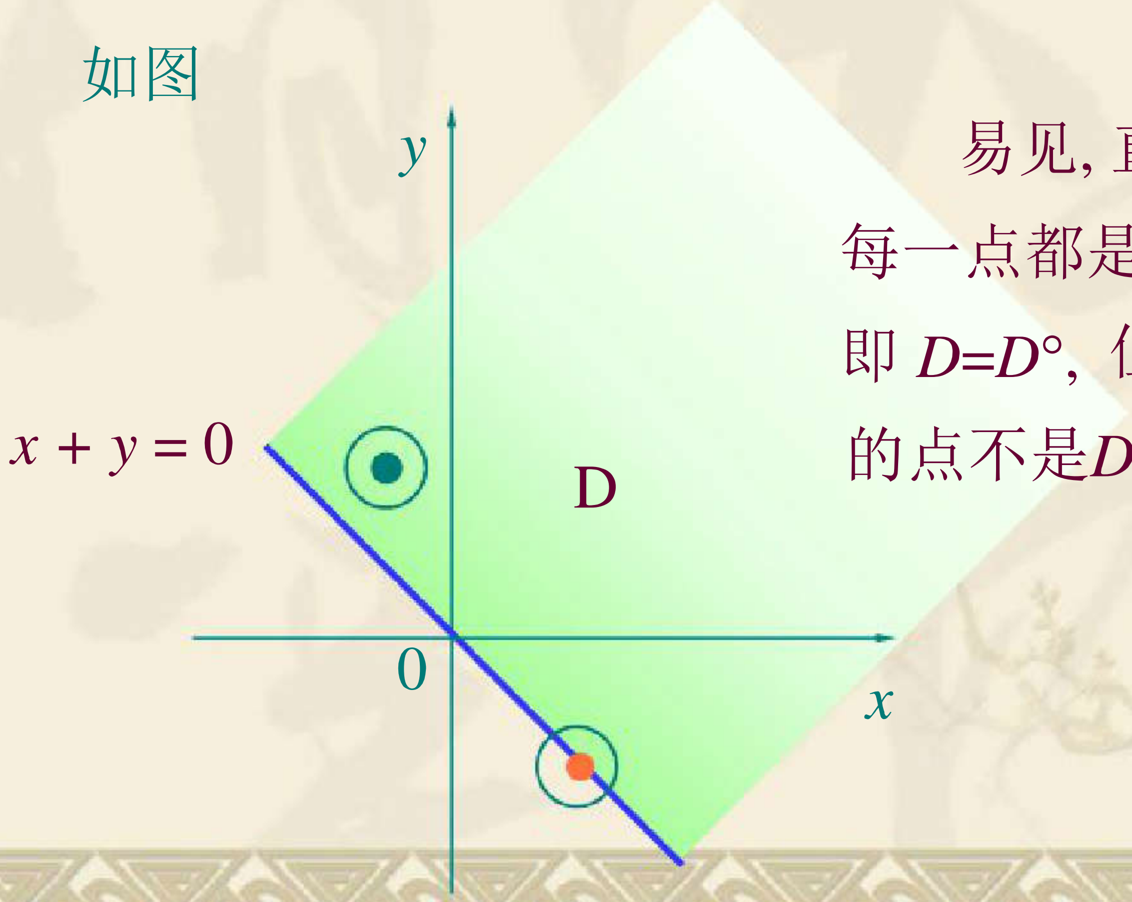
$D=\{(x,\ y)|\ x^2+y^2\leq 1\ \}$ 如图



易知, 圆内部的每一点都是 D 的内点. 但圆周上的点不是 D 的内点.

又如 $z=\ln(x+y)$的定义域 $D=\{(x,y)|\ x+y>0\}$

如图



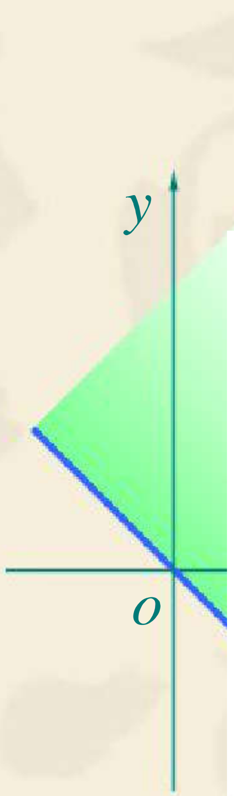
易见, 直线上方每一点都是D的内点.即 $D=D°$, 但直线上的点不是D的内点.

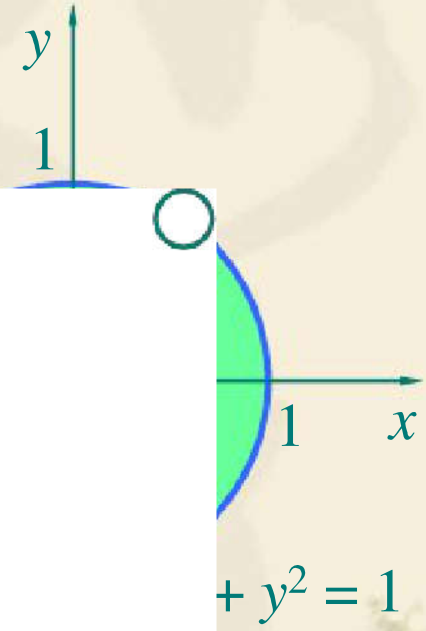
3. 边界点:

设 E 是一平面点集, $X_0 = (x_0, y_0)$是平面上一个点. 若 X_0的**任何**邻域 $U(X_0, \delta)$ 内既有属于 E 的点, 又有不属于 E的点, 则称 X_0 为 E 的边界点.

E 的全体边界点所成集合称为 E 的边界. 记作 ∂E.

如, 例1中定义域 D 的边界是直线 $x+y=0$ 上点的全体. 例2中定义域 D 的边界是单位圆周 $x^2+y^2=1$上的点的全体. 如图





D

的边界点可以是 E 中的点,
也可以不是 E 中的点.

4. 开集

设 E 是一平面点集, 若 E 中每一点都是 E 的内点.

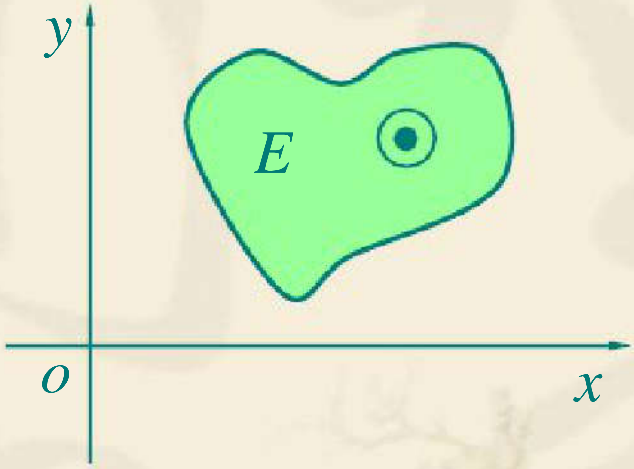
即 $E \subseteq E^0$, 则称 E 是一个开集. 规定, $\varnothing$, R^2为开集.

由于总有 $E^0 \subseteq E$, 因此, $E \subseteq E^0 \Leftrightarrow E = E^0$

故也可说, 若$E = E^0$, 则称 E 是一个开集.

比如, 例1中 D 是开集, $(D = D^0)$, 而例2中 D 不是开集.

又比如, E 如图



若 E 不包含边界, 则 E 为开集.

若 E 包含边界, 则 E 不是开集.

结论: 非空平面点集 E 为开集的充要条件是 E 中每一点都不是 E 的边界点. 即 E 不含有 E 的边界点.

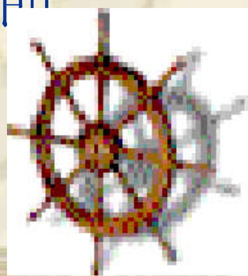
证: **必要性.** 设 E 为开集, $\forall X \in E$,

由开集定义知 X 为 E 的内点.

故 X 不是 E 的边界点.

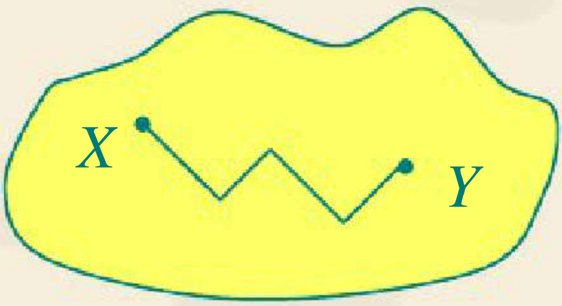
充分性. 若 E 中每一点都不是 E 的边界点.

要证 E 为开集. $\forall X \in E$, 由于 X 不是 E 的边界点. 故必存在X的一个邻域$U(X,\delta)$,在这个邻域 $U(X, \delta)$ 内或者全是 E 中的点. 或者全都不是 E 中的点, 两者必居其一. 由于$X \in E$, 故后一情形不会发生. 因此, $U(X, \delta)$内必全是 E 中的点. 故 $X \in E^0$, 即 $E \subseteq E^0$, 所以 E 是开集.



5. 连通集

设 E 是一非空平面点集, 若$\forall X\ ,Y\in E$. 都可用完全含于 E 的折线将它们连接起来, 则称 E 为连通集. 如图

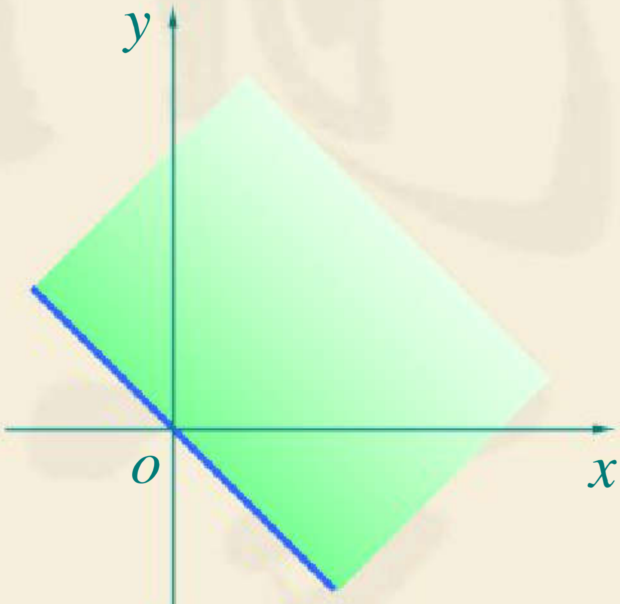


E 连通

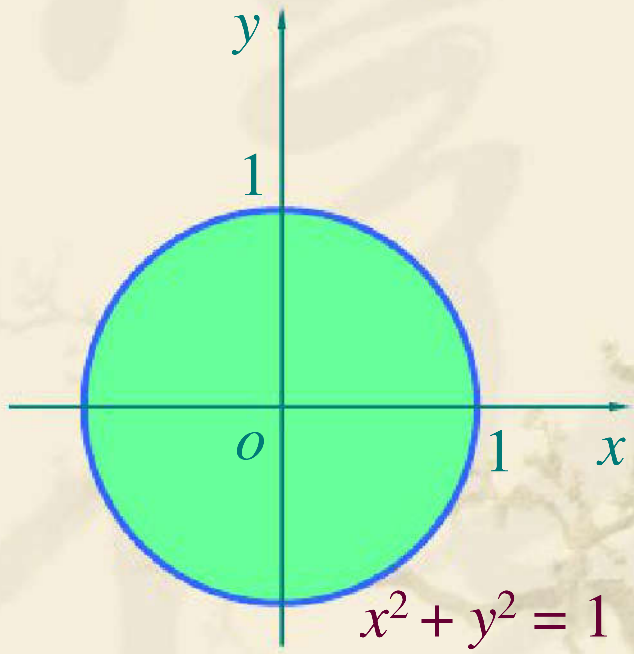
E 不连通

从几何上看, 所谓 E 是连通集, 是指 E 是连成一片的. E 中的点都可用折线连接.

例1, 2中的 D 都是连通集.　如图



$x+y=0$



$x^2+y^2=1$

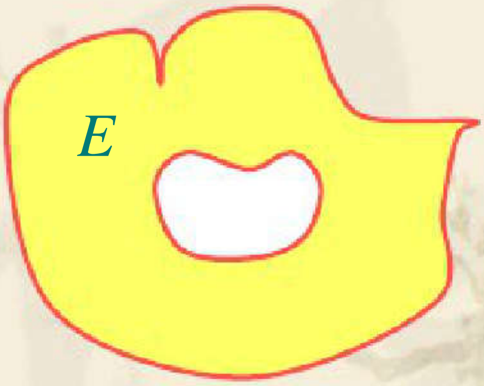
6. 开区域(开域)

设 E 是一平面点集.

若 E 是连通的非空开集, 则称 E 是开区域.

比如, 例1中 D 是开区域. 从几何上看, 开区域是连成一片的, 不包括边界的平面点集.

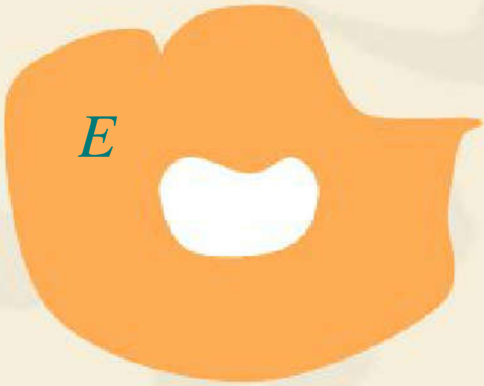
如图.



7. 闭区域 (闭域)

若 E 是开域, 记 $\overline{E} = E \cup \partial E = E^0 \cup \partial E$ 称为闭区域.

如图.



易见, 例2中的 D 是闭区域. 从几何上看, 闭区域是连成一片的. 包括边界的平面点集.

(本书把)开区域和闭区域都叫作区域.

8. 设 $E \subseteq R^2$, 若存在 $r > 0$, 使 $E \subseteq \mathrm{U}(O, r)$, 则称 E 为有界集. 否则称 E 为无界集.

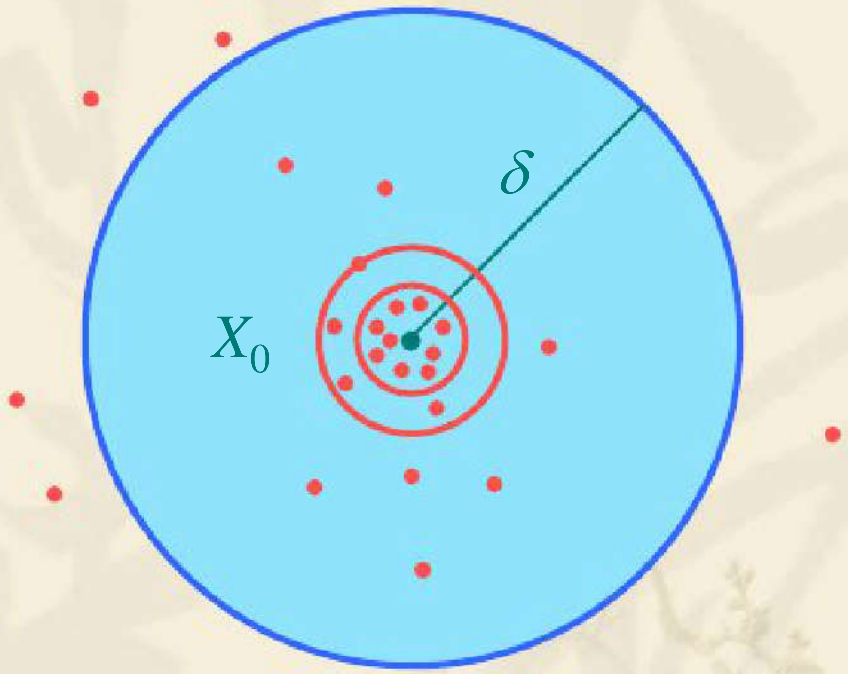
易见, 例1中 D 是无界集, 它是无界开区域, 而例2中 D 是有界集, 它是有界闭区域.

9. 聚点.

设 E 是平面点集, X_0 是平面上一个点. 若X_0的**任一**邻域内总有无限多个点属于 E . 则称 X_0 是E 的一个聚点.

从几何上看, 所谓 X_0 是 E 的聚点是指在 X_0 的附近聚集了无限多个 E 中的点. 即, 在 X_0 的任意近傍都有无限多个 E 中的点.

如图



1. 聚点定义也可叙述为: 若 X_0 的任一邻域内至少含有 E 中一个**异于** X_0 的点. 则称 X_0 为 E 的 一个聚点. (自证).

2. E 的聚点 X_0可能属于 E , 也可能不属于E .

3. E 的内点一定是 E 的聚点.

4. 若 E 是开区域. 则 E 中每一点都是 E 的聚点.

若$\overline{E} = E \cup \partial E$为闭区域.则$\overline{E}$中每一点都是$E$的聚点.

从而是$\overline{E}$的聚点. 即, 区域中的任一点都是该区域的聚点.

一般, 集合 E 的边界点不一定是 E 的聚点.
但若 E 是开集, 则 E 的边界点一定是 E 的聚点, 自证.

邻域, 内点, 边界点, 开集, 连通, 有界, 开区域, 闭区域, 聚点这些概念都可毫无困难地推广到三维空间 R^3 中去, 且有类似的几何意义. 它们还可推广到 4 维以上的空间中去, 但不再有几何意义.

说明：

（1）内点一定是聚点；

（2）边界点可能是聚点；

例如，$\{(x,y)\mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$

$(0, 0)$ 既是边界点也是聚点.

（3）点集E的聚点可以属于E，也可以不属于E.

例如，$\{(x,y)\mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$

$(0, 0)$ 是聚点但不属于集合.

例如，$\{(x,y)\mid x^2 + y^2 = 1\}$

边界上的点都是聚点也都属于集合.

（4）n 维空间

实数 x $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 数轴点.

实数全体表示直线(一维空间) R

数组 (x, y) $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 平面点

(x, y) 全体表示平面(二维空间) R^2

数组 (x, y, z) $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 空间点

(x, y, z) 全体表示空间(三维空间) R^3

推广：

n 维数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 全体称为 n 维空间，记为 R^n .

n 维空间中两点间距离公式

设两点为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

特殊地，当 $n=1, 2, 3$时，便为数轴、平面、空间两点间的距离.

n 维空间中邻域概念：

$$U(P_0,\delta)=\left\{P \,\middle|\, |PP_0|<\delta, P\in R^n\right\}.$$

区域、内点、边界点、区域、聚点等概念也可定义.

二 R^2 上的完备性定理

定义 1 设$\{p_n\}$ $(\subset R^2)$为平面点列，$P_0\in R^2$为一固定点．若对任给的正数ε，存在正整数 N，使得当，n>N 时，有 $P_n\in U(P_o;\ \varepsilon)$，则称点列$\{P_n\}$收敛于点 P_n，记作

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p_0 \quad \text{或} \quad P_n \dashrightarrow P_n,\ n\to\infty.$$

定理 16.1(柯西准则) 平面点列$\{P_n\}$收敛的充要条件是：任给正数ε，存在正整数 N，使得当 n>N 时，对一切正整数 p，都有

$$\rho(p_n p_{n+p}) < \varepsilon$$

定理 16.2(闭域套定理)设$\{D_n\}$是R^2中的闭域列，它满足：

(i) $D_n \supset D_{n+1}$，n=1，2，…;

(ii) $d_n = d(D_n)$，$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$，

则存在惟一的点$P_o \in D_n$，n=1，2，….

定理 16.3(聚点定理)　设 $E \subset R^2$为有界无限点集，则 E 在R^2中至少有一个聚点.

推论:有界无限点列$\{P_n\} \subset R^2$必存在收敛子列$\{P_{n_k}\}$.

定理 16.4(有限覆盖定理)　设 $D\subset R^2$ 为一有界闭域，$\{\triangle_a\}$ 为一开域族，它覆盖了 D(即 $D\subset\bigcup_{\alpha}\Delta_{\alpha}$)，则在 $\{\Delta_{\alpha}\}$ 中必存在有限个开域 $\triangle_1$，$\triangle_2$，…，$\triangle_n$，它们同样覆盖了 D（即 $D\subset\bigcup\Delta_{\alpha}$）

在更一般的情况下，可将定理 16.4 中的 D 改设为有界闭集，而 $\triangle_a\subset R^2$ 一族开集，此时定理结论依然成立.

三 多元函数的概念

回忆

设x和y是两个变量。D是一个给定的数集，若对于每个数$x\in D$，变量y按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称y是x的函数，记作 $y=f(x)$.

1.二元函数的定义

定义 2 设D是平面上的一个点集，如果对于每个点$P(x,y)\in D$，变量z按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称z是变量x,y的二元函数，记为 $z=f(x,y)$ （或记为$z=f(P)$）.

点集 D ---定义域，x、y ---自变量，z ---因变量.

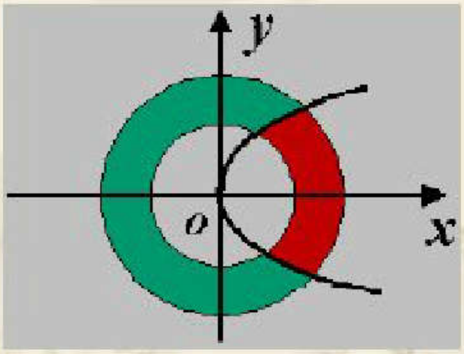
$W=\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ --- 值域.

与一元函数相类似，对于定义域约定：

定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切点集.

例 求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解 $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$

所求定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}$.

二元函数 $z=f(x,y)$的图形

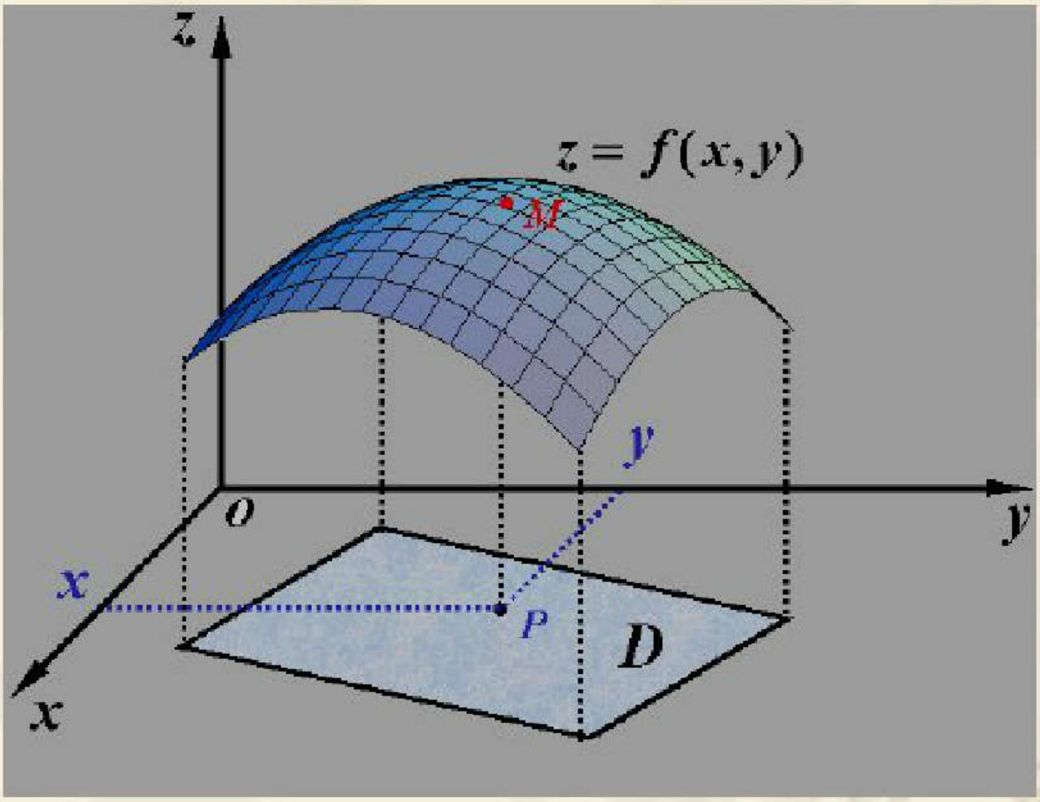
设函数$z=f(x,y)$的定义域为D，对于任意取定的$P(x,y)\in D$，对应的函数值为$z=f(x,y)$.

以x为横坐标、y为纵坐标、z为竖坐标在空间就确定一点$M(x,y,z)$，当(x,y)取遍D上一切点时，得一个空间点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集称为二元函数的图形.

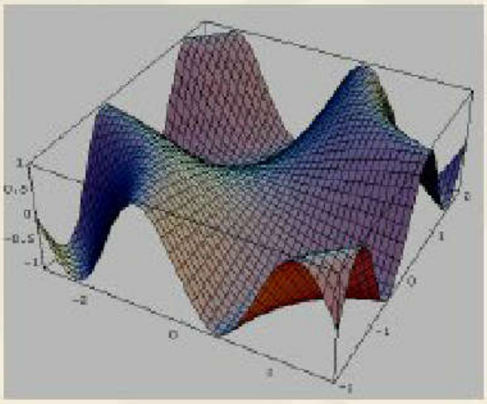
（如下页图）



二元函数的图形通常是一张曲面.

例如，　$z=\sin xy$

图形如右图.



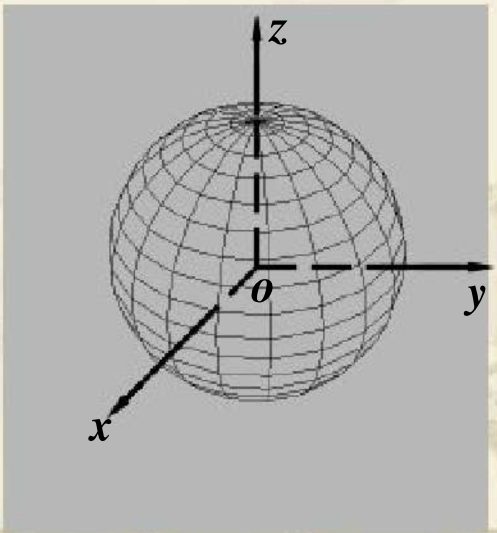
例如，　$x^2+y^2+z^2=a^2$

左图球面.

$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}$.

单值分支：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.



2.多元函数的概念

定义 设D是R^n的一个非空子集，从D到实数集R的任一映射f称为定义在D上的一个n元（实值）函数，记作$f: D \subset R^n \to R$

或y

其中 量

D称 $\}$

称为

$\{(x_1,$

$y =$