第十章 动载荷

§10-1 概述

一、基本概念

1、静载荷：a=0

动载荷：　a≠0
- 1.惯性力
- 2.冲击荷载
- 3.振动问题
- 4.交变应力

2、实验表明：

当$\sigma \leq \sigma_P$时，动载荷下的弹性模量E、σ_P、σ_e、σ_s、σ_b、$[\sigma]$等机械性质与静载一样，静载荷下的应力应变线性关系——胡克定律在动载荷下仍然成立

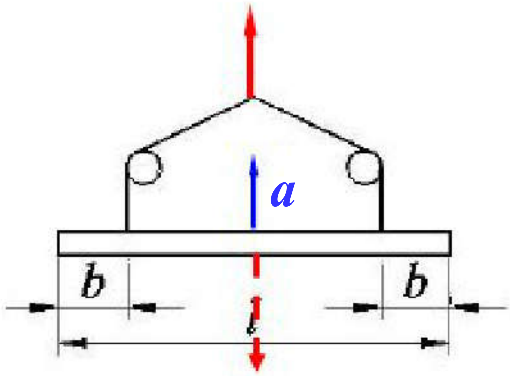
动载荷的计算与静载荷的计算方法一样

§10-2 动静法的应用

方法： 加速度a——＞惯性力 (F= $-ma$)——＞静力学问题

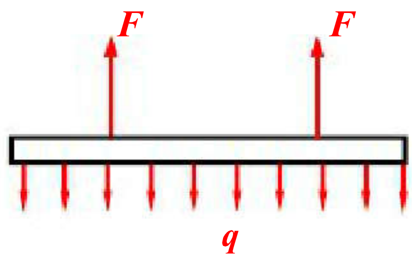
一、等加速直线运动构件中的动应力

例:如图所示表示以匀加速度a向上提升的杆件。若杆件横截面积为A，单位体积的质量为ρ。求梁的应力。



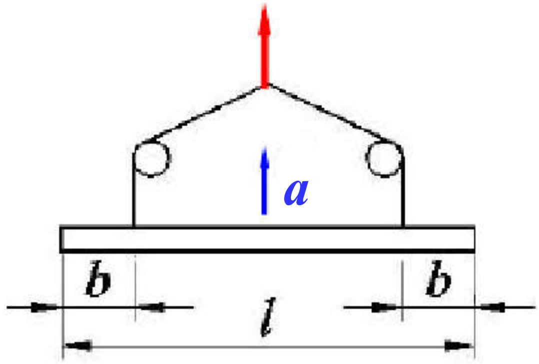
解： 单位长度的质量为Aρ，
相应惯性力为 $A\rho a$

$$q = A\rho g + A\rho a = A\rho g(1+\frac{a}{g})$$



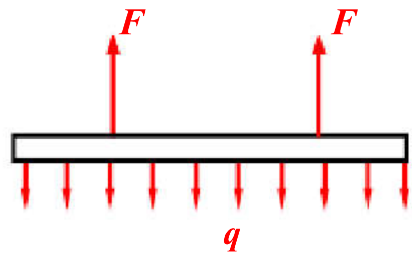
§10-2 动静法的应用

$$M_{\max}=F(\frac{l}{2}-b)-\frac{1}{2}q(\frac{l}{2})^2=\frac{1}{2}A\rho g(1+\frac{a}{g})(\frac{l}{4}-b)l$$



动应力 $\sigma_d=\frac{M}{W}=\frac{A\rho}{2W}(1+\frac{a}{g})(\frac{l}{4}-b)l$

静应力 $\sigma_{st}=\frac{A\rho g}{2W}(\frac{l}{4}-b)l$



$$\therefore\sigma_d=\sigma_{st}(1+\frac{a}{g})$$

令： $k_d=1+\frac{a}{g}$　　　动荷系数

$$\sigma_d=k_d\sigma_{st}$$

强度条件 $\sigma_{d\max} = k_d \sigma_{st\max} \leq [\sigma]$

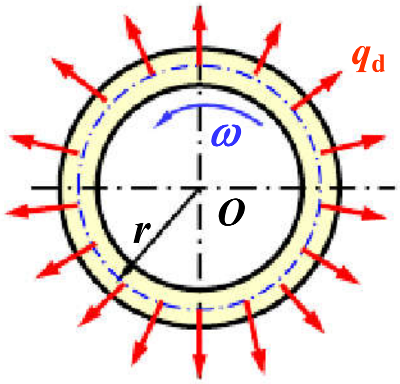
讨论: 1. 一般$K_d \geq 1$, 动载荷的工作应力比静载荷的工作应力要大

2. $a=c$的动载荷问题的解法与静载荷问题的解法一样，动应力与静应力相差K_d倍

3. 变形: $\delta_d = K_d \delta_{st}$

二、等角速转动构件内的动应力分析

例：如图薄圆环以匀角速度ω绕通过圆心且垂直于纸面的轴旋转，D>>t,比重ρ，求圆环横截面A上的正应力

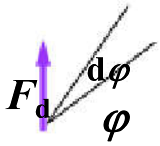


解：　向心加速度:

$$a_n = \frac{D\omega^2}{2} \qquad q_d = A\rho a_n$$

$$2F_{Nd} = \int_0^{\pi} q_d \sin\varphi \cdot \frac{D}{2} d\varphi = q_d D$$

$$F_{Nd} = \frac{q_d D}{2} = \frac{A\rho D^2\omega^2}{4}$$



$$\sigma_d = \frac{F_{Nd}}{A} = \frac{\rho D^2\omega^2}{4} = \rho v^2$$

式中： $v = \frac{D\omega}{2}$ —— **圆环轴线上点的线速度**

强度条件:

$$\sigma_d = \rho \cdot v^2 \le [\sigma]$$

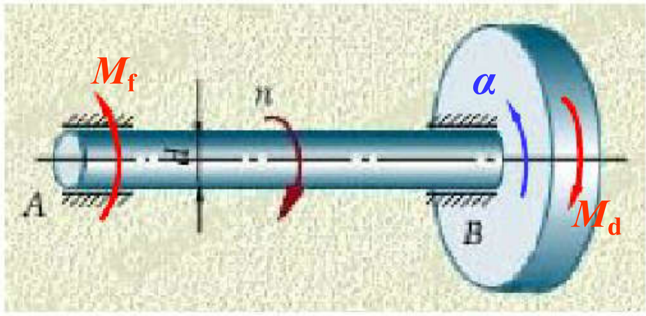
讨论:

环内应力与横截面面积A无关。要保证强度，应限制圆环的转速。

例题1

在AB轴的B端有一个质量很大的飞轮,与飞轮相比,轴的质量可以忽略不计.轴的另一端A装有刹车离合器。飞轮的转速为n=100r/min，转动惯量为I_x=0.5kN·m·s²。轴的直径d=100mm。刹车时使轴在10秒内均匀减速停止转动。求轴内最大动应力。

解： 1．计算惯性力矩



$$\omega_0=\frac{n\pi}{30}=\frac{\pi\times100}{30}=\frac{10\pi}{3}(rad/s)$$

$$\alpha=\frac{\omega_1-\omega_0}{t}=\frac{0-\frac{10\pi}{3}}{10}=-\frac{\pi}{3}(rad/s^2)$$

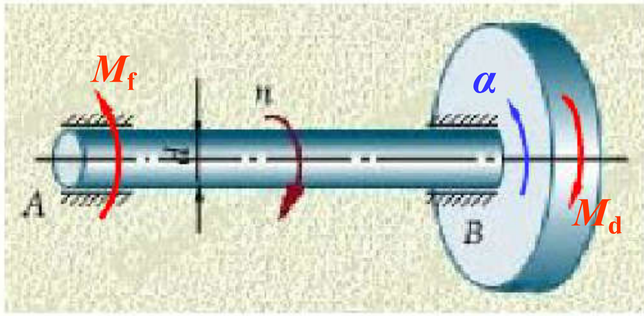
$$M_d=-I_x\alpha=-0.5(-\frac{\pi}{3})=\frac{0.5\pi}{3}(kN\cdot m)$$

例题1

2. 轴的扭矩

$$T = M_d = \frac{0.5\pi}{3}(kN \cdot m)$$

$$= 0.524(kN \cdot m)$$



3. 横截面的应力

$$W_p = \frac{\pi}{16}(100 \times 10^{-3})^3 = 1.96 \times 10^{-4}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{0.524 \times 10^3}{1.96 \times 10^{-4}} = 2.67(MPa)$$

问题:A端突然刹车（即突然停止转动）轴内的最大动应力?

§13.3 杆件受冲击时的应力和变形

一、冲击问题:

重锤打桩　　高速飞轮突然刹车　　钉钉子

1.特点：$a\to\infty$，$\Delta t\to 0$，速度变化非常大→冲击

2.冲击物、被冲击物

研究被冲击物的应力问题

注意:$\Delta t\to 0$，不能精确计算被冲击物的应力和位移，只能用近似的方法即能量法

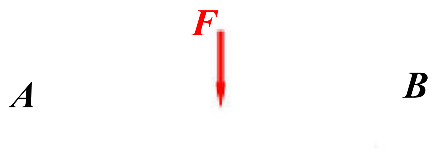
3. 假设:

(1) 冲击物视为刚体

(2) 被冲击物质量不计,可看成弹簧

$$\Delta l=\frac{Pl}{EA}=\frac{P}{EA/l}$$ 弹簧常数: $\frac{EA}{l}$

$$w=\frac{Pl^3}{48EI}=\frac{P}{48EI/l^3}$$ 弹簧常数: $\frac{48EI}{l^3}$



$$\phi=\frac{ml}{GI_p}=\frac{m}{GI_p/l}$$ 弹簧常数: $\frac{GI_p}{l}$

(3) 冲击后二位一体。（即塑性碰撞）

(4) 不计能量损耗

二、自由落体冲击问题

1、冲击物与弹簧开始接触的瞬时动能为*T*

接触后，弹簧的最大变形为 Δ_d，

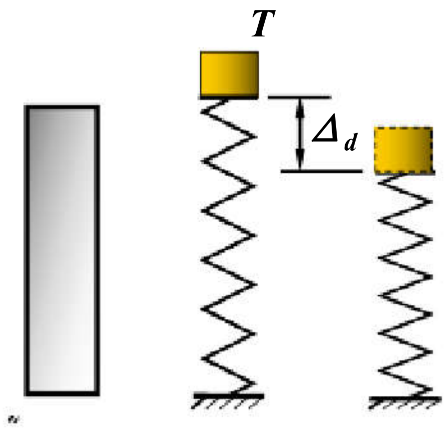
此时$v=0$，动能$T=0$，

势能变化：$V=P\Delta_d$

实验表明:冲击系统的载荷、应力、变形之间的关系静载相同,即在小变形及线弹性范围内时,载荷、应力、变形之间存在线性关系。

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_{st}} = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \frac{F_d}{P} = K_d$$

$$\Rightarrow \quad F_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} P$$



2.弹簧的变形能

根据能量守恒定律可知,冲击物所减少的动能T和势能V,应全部转换为弹簧的变形能$V_{\varepsilon d}$,即

其中 $T = 0$ $\quad V = P(h+\Delta_d)$ $\quad V_{\varepsilon d} = \frac{1}{2} F_d \Delta_d$

$$P(h+\Delta_d) = \frac{1}{2} F_d \Delta_d$$

§ 13.3 杆件受冲击时的应力和变形

$$\Delta_d^2 - 2\Delta_{st}\Delta_d - \frac{2T\Delta_{st}}{P} = 0$$

解得:

$$\Delta_d = \Delta_{st}\left(1+\sqrt{1+\frac{2T}{P\Delta_{st}}}\right)$$

动荷系数:

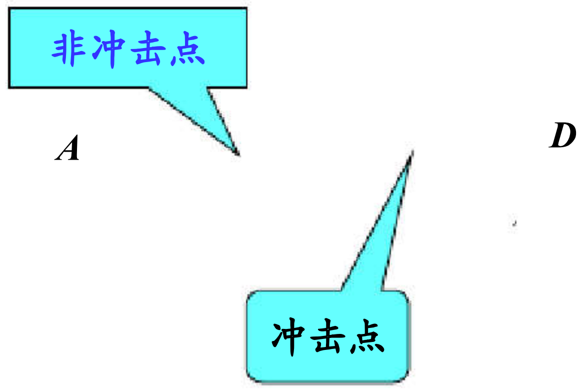
$$k_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = 1+\sqrt{1+\frac{2T}{P\Delta_{st}}}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{d}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{st}}, \quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{d}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{d}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{st}}$$

注意: 这里F_d、Δ_d、σ_d是指受冲杆件到达最大变形位置，冲击物速度等于零时的瞬时载荷、变形和应力，是冲击过程中的最大值

3、自由落体冲击：

$$v^2 = 2gh \qquad T = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 = Ph$$



$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T}{P\Delta_{st}}}$$

注意：Δ_{st}为冲击点处的静位移

$$K_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \frac{\sigma_d}{\sigma_{st}}$$

式中的Δ_d、Δ_{st}不一定是冲击点处的位移，可以是任意点处的位移。

强度条件： $\sigma_{d\max} = K_d \sigma_{st\max} \leq [\sigma]$

讨论:(1)△st的物理意义:以冲物的重量P作为静载,沿冲击方向作用在冲击点时,被冲击物在冲击点处沿冲击方向的静变形

(2)当h=0时,$K_d=2$,即突加载荷的应力和变形是静载的两倍

三、 水平冲击：

$$T + V = U_d$$

$$V = 0 \qquad T = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$$

线性关系

$$U_d = \frac{1}{2}F_d\Delta_d = \frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}P$$

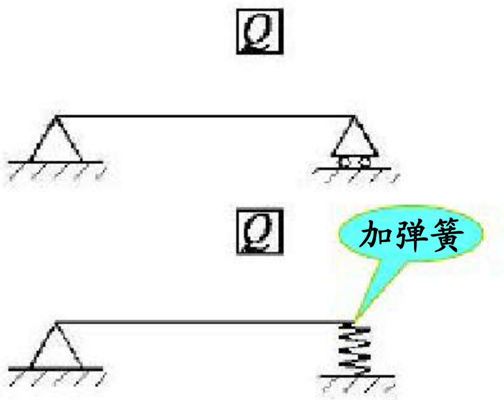
$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 = \frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}P$$

$$\Delta_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}\Delta_{st} \qquad K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$

§13.3 杆件受冲击时的应力和变形

2、提高构件抗冲击能力的措施:

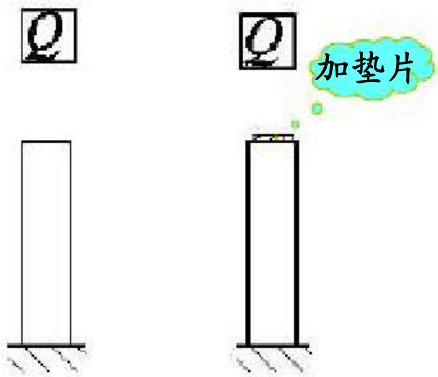
增大静变形但要避免增大静应力



总结:

解题的关键:求$K_d \rightarrow \Delta_{st}$(冲击点)

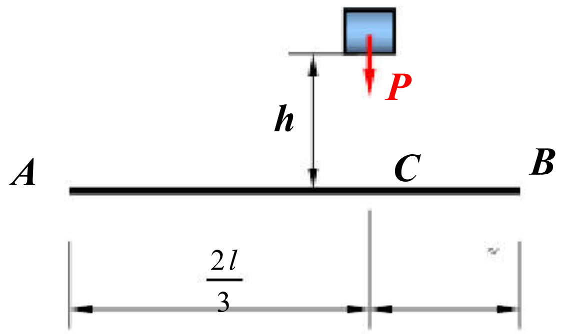
求$\sigma_d \rightarrow \sigma_{st}, \Delta_d \rightarrow \Delta_{st}$



自由落体冲击: $$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

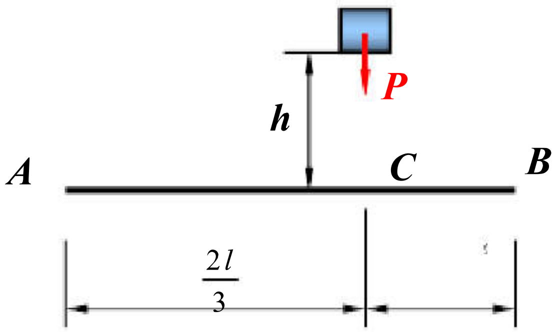
水平冲击: $$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$

重量为P的重物自高度h下落冲击于梁上的C点，设梁的E、I及抗弯截面模量W皆为已知量。试求梁内最大正应力及梁的跨度中点的挠度。



3. 中点挠度

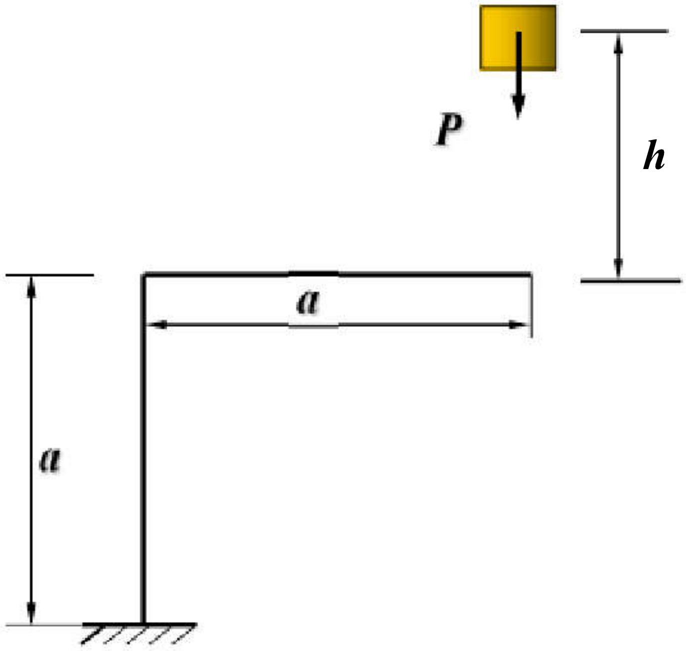
$$\Delta_{st1/2} = \frac{23Pl^3}{1296EI}$$



$$w_{d1/2} = K_d \Delta_{1/2}$$

$$= (1 + \sqrt{1 + \frac{243EIh}{2Pl^3}}) \frac{23Pl^3}{1296EI}$$

例：重量为Q的重物自由下落在如图所示的刚架上。设刚架的EI及抗弯截面模量W为已知，试求冲击时刚架内的最大正应力及C点x方向的动位移。（轴力和剪力不考虑）



解： 1．计算静位移及静应力

$$\delta_{st(cy)}=\frac{4Pa^3}{3EI}\qquad \delta_{st(cx)}=\frac{Pa^3}{2EI}$$

$$\sigma_{st}=\frac{Pa}{W}$$

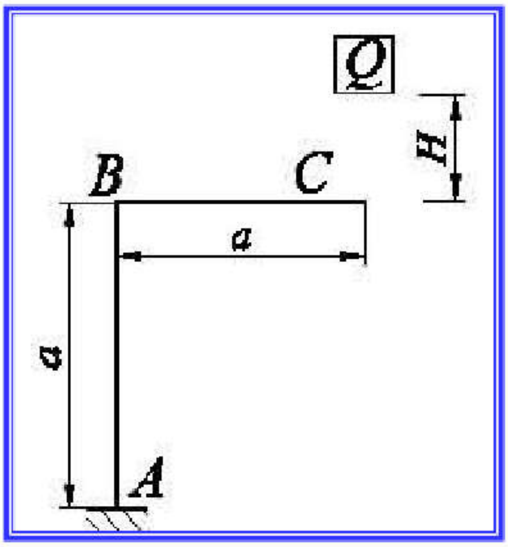
2．动荷系数K_d

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{3EIH}{2Pa^3}}$$

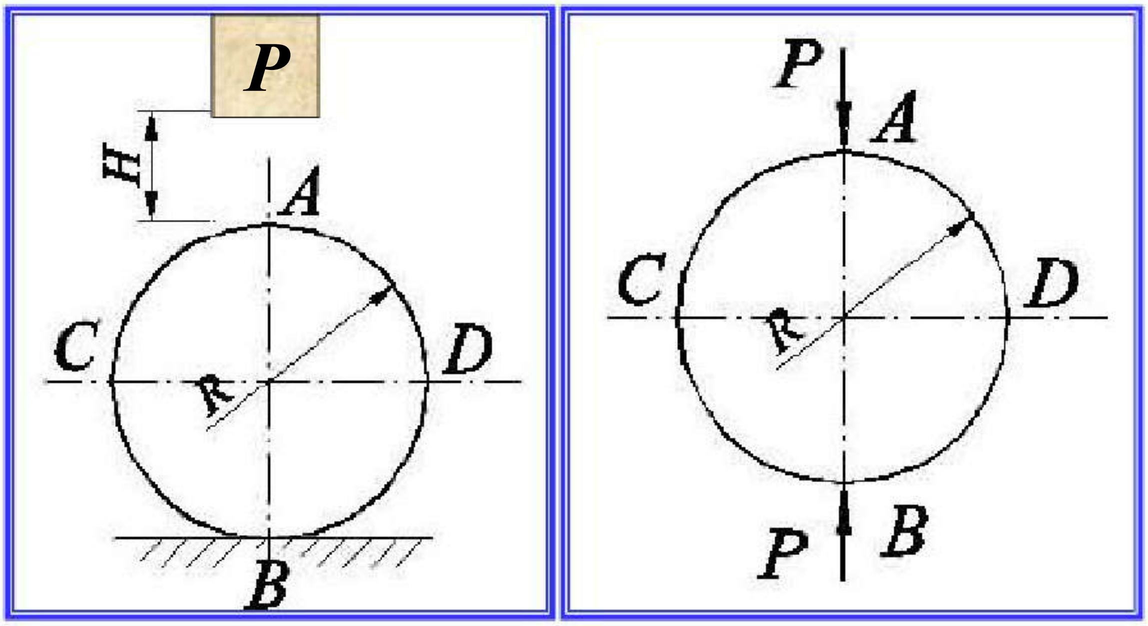
3．动应力及动位移

$$\sigma_{d\max} = K_d \sigma_{st} = (1 + \sqrt{1 + \frac{3EIH}{2Pa^3}})\frac{Pa}{W}$$

$$\delta_{d(cx)} = K_d \delta_{st(cx)} = (1 + \sqrt{\frac{3EIH}{2Pa^3}})\frac{Pa^3}{2EI}$$



例：一钢环受重物P铅垂下落冲击如图。已知钢环的平均半径R=11cm，其横截面为h×b=2×4cm的矩形，重物P=50N，H=2cm，E=200GPa。不考虑轴力和剪力的作用。计算钢环在冲击过程中的最大正应力。



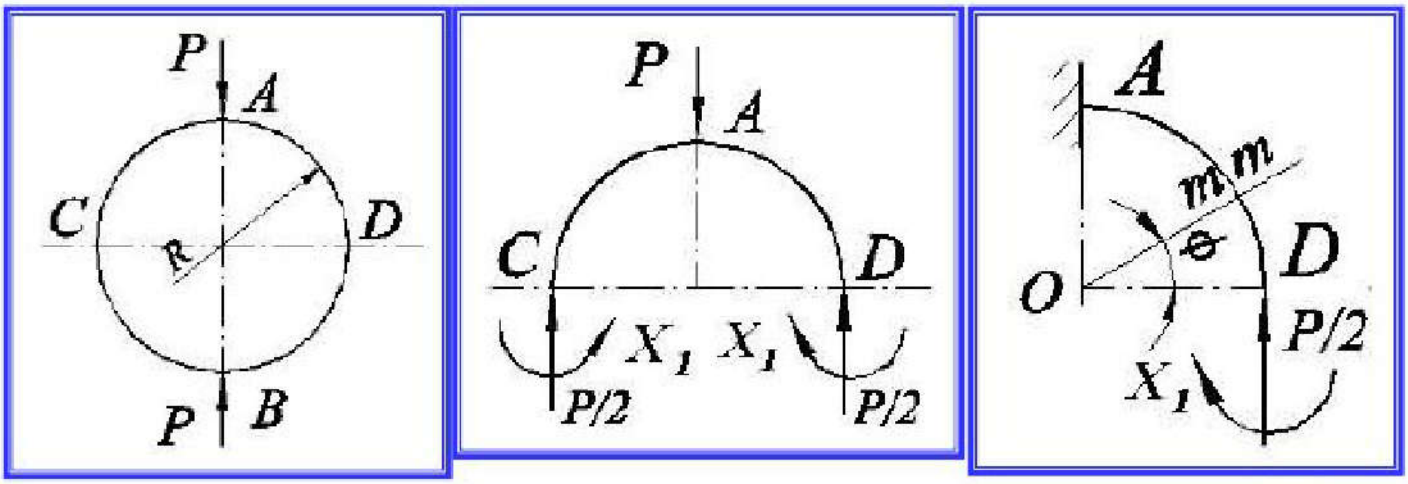
这是超静定问题与冲击问题的综合题

解： 1．计算静位移和静应力

解超静定　　静定基选择如图所示

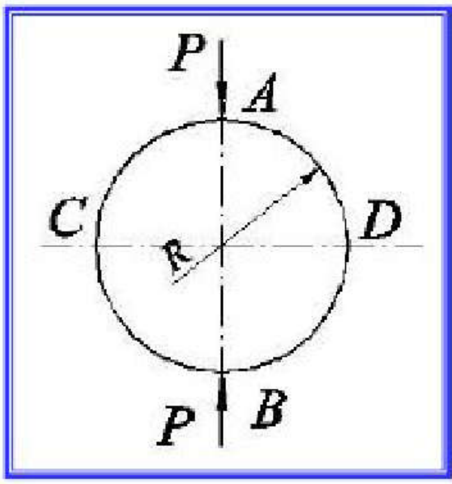
$$\delta_{11}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{EI}(Rd\varphi)=-\frac{\pi R}{2EI}$$

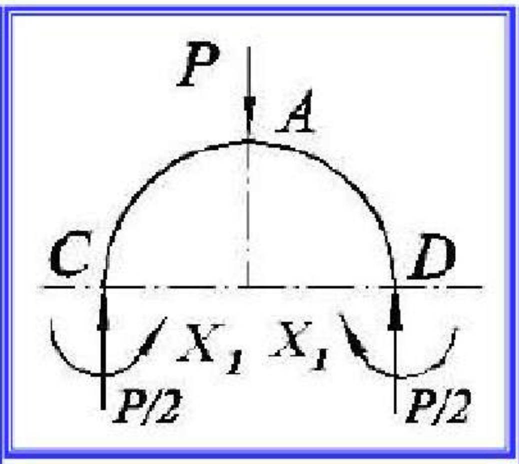
$$\Delta_{1P}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{PR(1-\cos\varphi)}{2EI}(Rd\varphi)=\frac{(\pi-2)PR^2}{4EI}$$

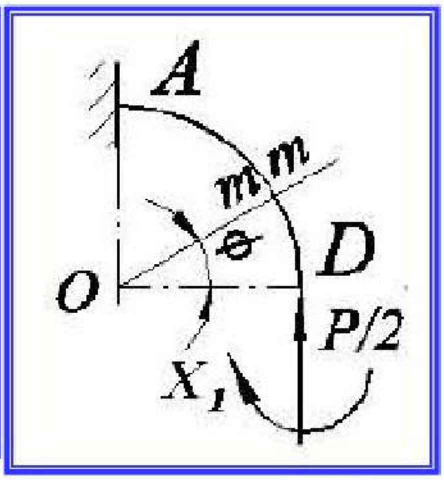


$$-\frac{\pi R}{2EI}X_1+\frac{(\pi-2)PR^2}{4EI}=0 \qquad X_1=\frac{\pi-2}{2\pi}PR$$

求最大弯矩 $$M_{\max}=-\frac{PR}{2}(1-\cos\varphi)+X_1$$
$$=-\frac{PR}{2}+\frac{\pi-2}{2\pi}PR=-\frac{PR}{\pi}$$

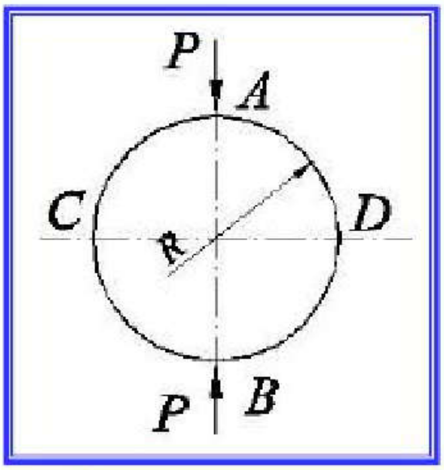






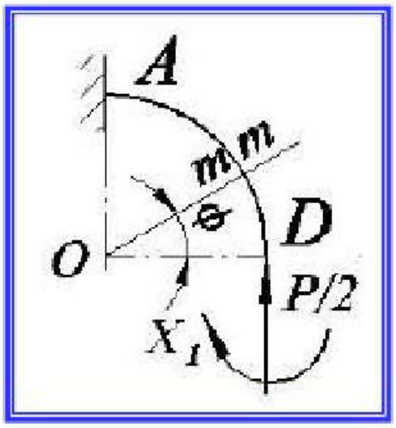
$$\sigma_{st}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{PR}{\pi}/\frac{bh^2}{6}$$

$$=\frac{6\times50\times110}{\pi\cdot40\times20^2}=0.657MPa$$



求冲击点的静位移

用单位载荷法



$$\delta_{st}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{PR}{2}(1-\cos\varphi)-X_1}{EI}\cdot R(1-\cos\varphi)(Rd\varphi)$$

$$=\frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{2}{\pi}-\cos\varphi)(1-\cos\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{PR^3}{EI}\frac{\pi^2-8}{4\pi}=0.149\frac{PR^3}{EI}=0.00186mm$$

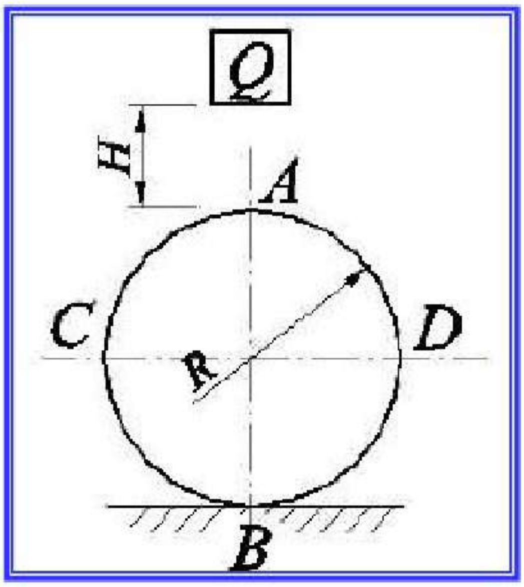
2．计算K_d和动应力

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

$$=1+\sqrt{1+\frac{2\times 20}{0.00186}}=148$$

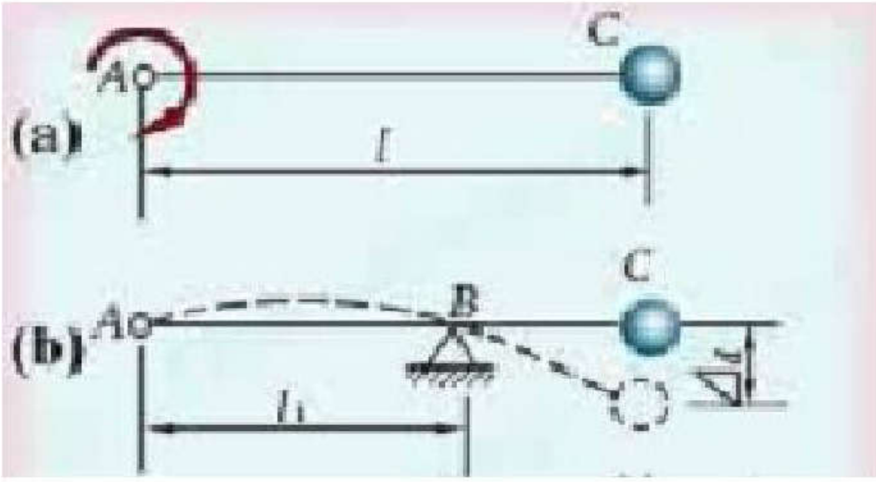
$$\sigma_{d\max}=K_d\sigma_{st}$$

$$=148\times 0.657=97MPa$$



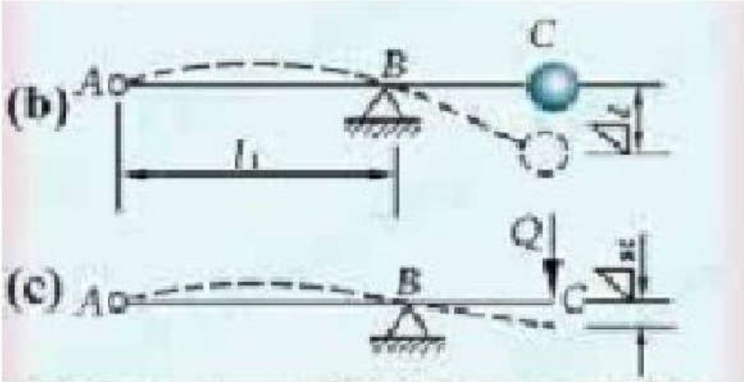
例：在水平平面内的AC杆，绕通过A点的垂直轴以匀角速度ω转动，如图是它的俯视图。杆的C端有一重为Q的集中质量。如因发生故障在B点卡住而突然停止转动，试求AC杆内的最大冲击应力。设AC杆的质量可以不计。

当冲击问题，没有现成公式可求K_d时？



解： 1. 能量守恒 T+V=U

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}(\omega\cdot l)^2=\frac{1}{2}P_d\Delta_d$$



2. 比例关系

$$\frac{P_d}{Q}=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}=\frac{\sigma_d}{\sigma_{st}}=k_d$$

3. 联立求解

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}(\omega\cdot l)^2=\frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}Q$$

$$k_d=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}=\sqrt{\frac{\omega^2 l^2}{g\Delta_{st}}}$$

$$\sigma_d=K_d\sigma_{st}=\sqrt{\frac{\omega^2 l^2}{g\Delta_{st}}}\cdot\sigma_{st}$$

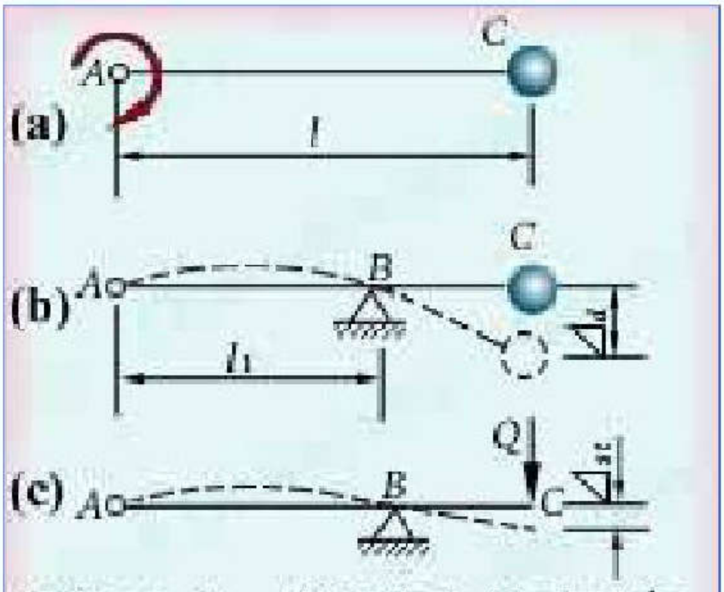
4．求静位移、静应力

$$\Delta_{st} = \frac{Ql(l-l_1)^2}{3EI}$$

$$\sigma_{st} = \frac{M}{W} = \frac{Q(l-l_1)}{W}$$

5．最大冲击应力

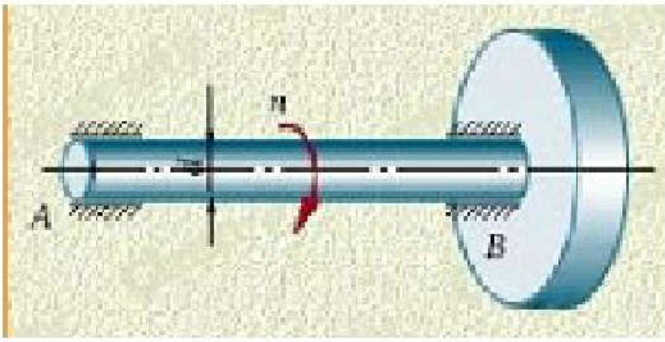
$$\sigma_d = \frac{\omega}{W}\sqrt{\frac{3EI \cdot l \cdot Q}{g}}$$



例图 13-2　绕固定点转动的杆突然停转

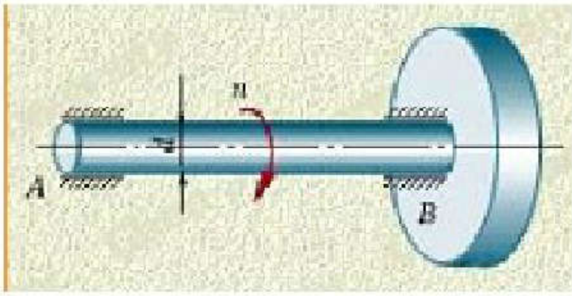
例：在AB轴的B端有一个质量很大的飞轮，与飞轮相比,轴的质量可以忽略不计.轴的另一端A装有刹车离合器。飞轮的转速为**n=100r/min**，转动惯量**I_x=0.5kN·m·s²**。轴的直径**d=100mm**。AB轴在A端突然刹车(即A端突然停止转动)。求轴内最大动应力。设**G=80GPa**,轴长***l=1m***。

注意：冲击问题与（a=常数）问题的区别?



解：　1．能量守恒 **T+V=U$_d$**

$$\frac{1}{2}I_x\omega^2=\frac{T_d^2 l}{2GI_p}\qquad T_d=\omega\sqrt{\frac{I_x GI_p}{l}}$$



2．求动应力：

$$\tau_{d\max}=\frac{T_d}{W_t}=\omega\sqrt{\frac{I_x GI_p}{W_t^2 l}}$$

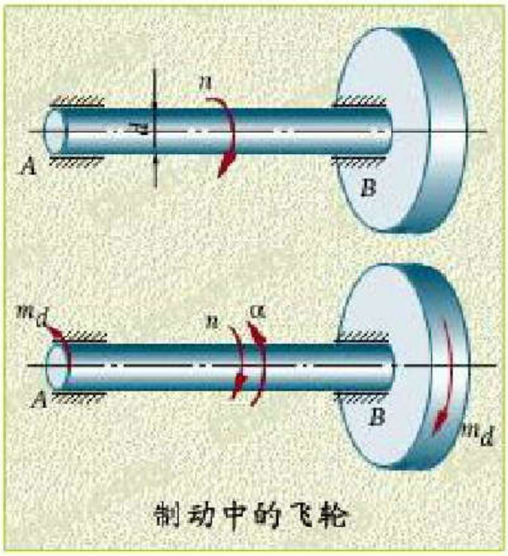
圆轴：
$$\frac{I_p}{W_t^2}=\frac{\pi d^4}{32}\times\left(\frac{16}{\pi d^3}\right)^2=\frac{2}{\frac{\pi d^2}{4}}=\frac{2}{A}$$

$$\tau_{d\max}=\omega\sqrt{\frac{2GI_x}{Al}}$$

Al为体积

$$\tau_{d\max} = \frac{10\pi}{3}\sqrt{\frac{2\times 80\times 10^{9}\times 0.5\times 10^{3}}{1\times(50\times 10^{-3})^{2}\pi}}$$

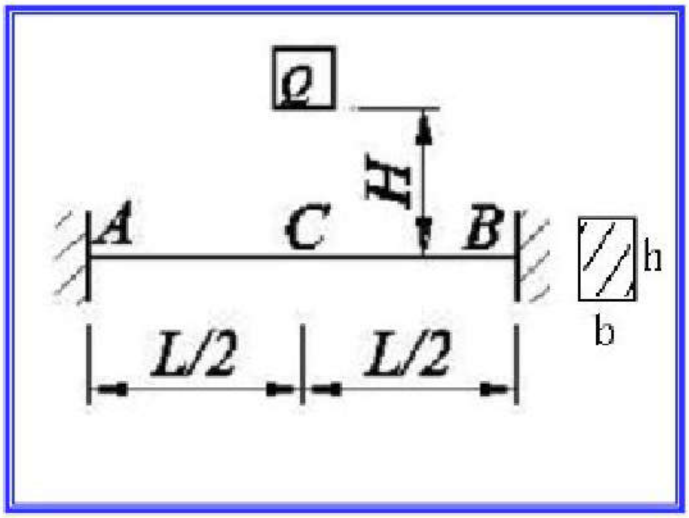
$$= 1057\times 10^{6}\,Pa = 1057\,MPa$$



注意比较：若刹车时使轴在**10**秒内均匀减速停止转动时的动应力：

$$\tau_{d\max} = 2.67\,MPa$$

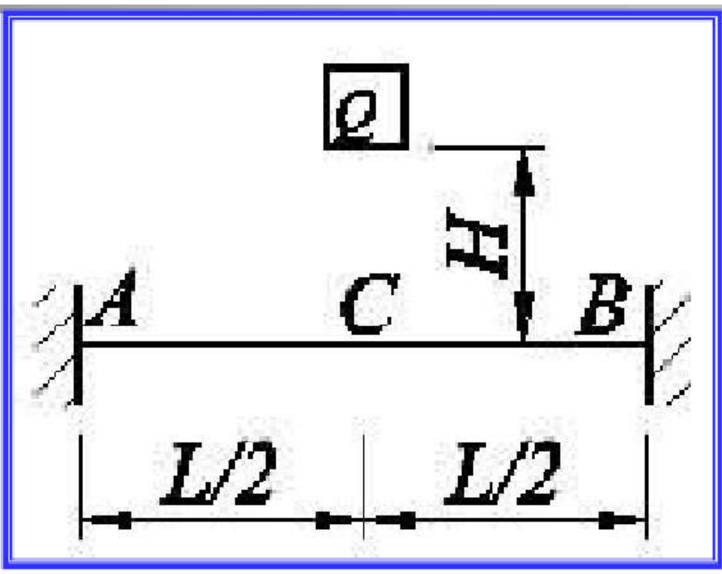
例：如图所示重物Q自高度H处下落，截面为矩形，高为h,宽为b,试求梁内的最大正应力。(不计梁内轴力)。



解：(1)当Q以静载作用时，

由对称性：$R_B=\dfrac{Q}{2}$

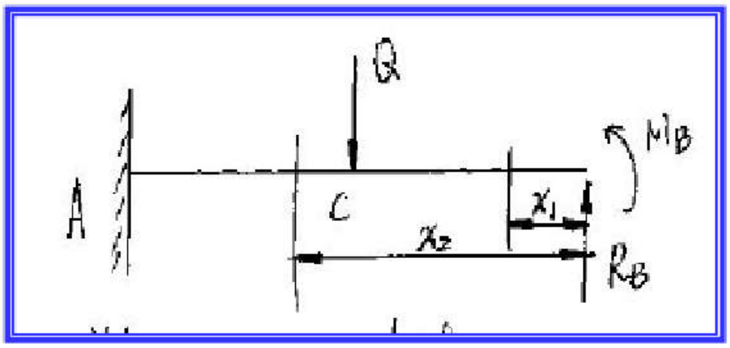
一次静不定，解除B处约束,代之以M_B，则: $\theta_B=0$



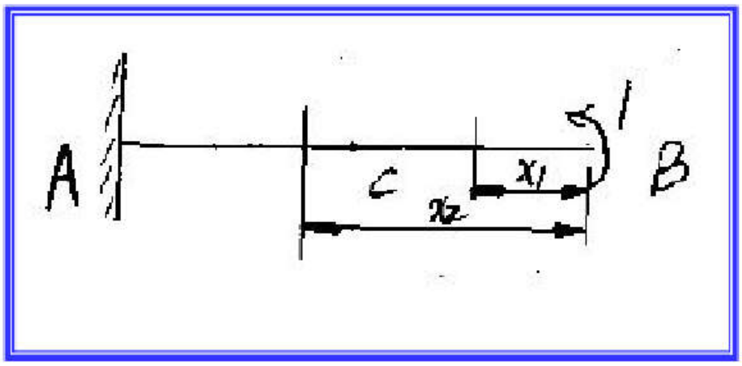
在真实力作用下：

$$M(x_1)=\frac{Q}{2}x_1+M_B$$

$$M(x_2)=-\frac{Q}{2}x_2+\frac{1}{2}Ql+M_B$$



在B加单位力偶



$$\overline{M}(x_1)=1$$

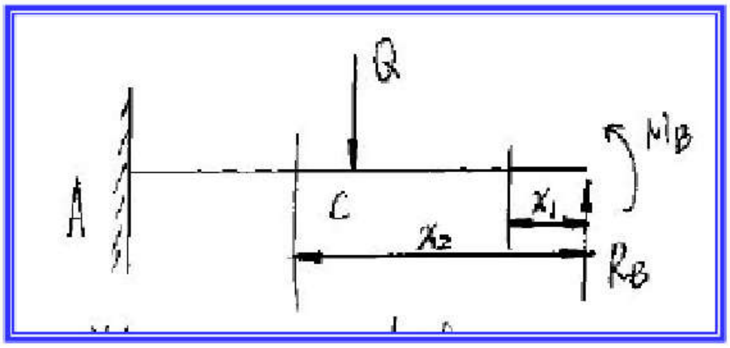
$$\overline{M}(x_2)=1$$

$$\theta_B=\frac{1}{EI}[\int_0^{\frac{l}{2}}(\frac{Q}{2}x_1+M_B)\times 1\times dx_1+$$

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(-\frac{Q}{2}x_2+M_B+\frac{1}{2}Ql)\times 1\times dx_2]=0$$

$$M_B=-\frac{1}{8}Ql$$

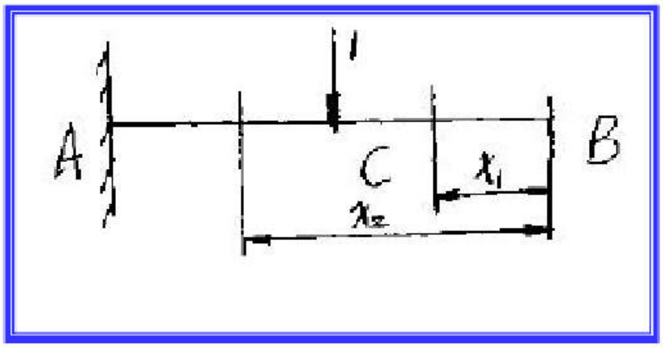
(2)求Δ_{cst}, σ_{stmax}(分析静基)



在C加单位力

$$\overline{M}(x_1)=0$$

$$\overline{M}(x_2)=-(x_2-\frac{l}{2})$$



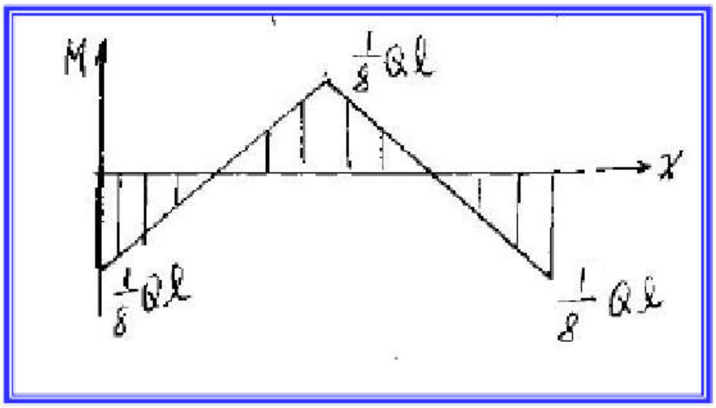
$$\Delta_{Cst}=\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{M(x_2)\overline{M}(x_2)}{EI}dx$$

$$=\frac{Ql^3}{192EI}$$

画弯矩图，

$$\sigma_{st\max} = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{8}Ql}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3Ql}{4bh^2}$$

(3)求k_d

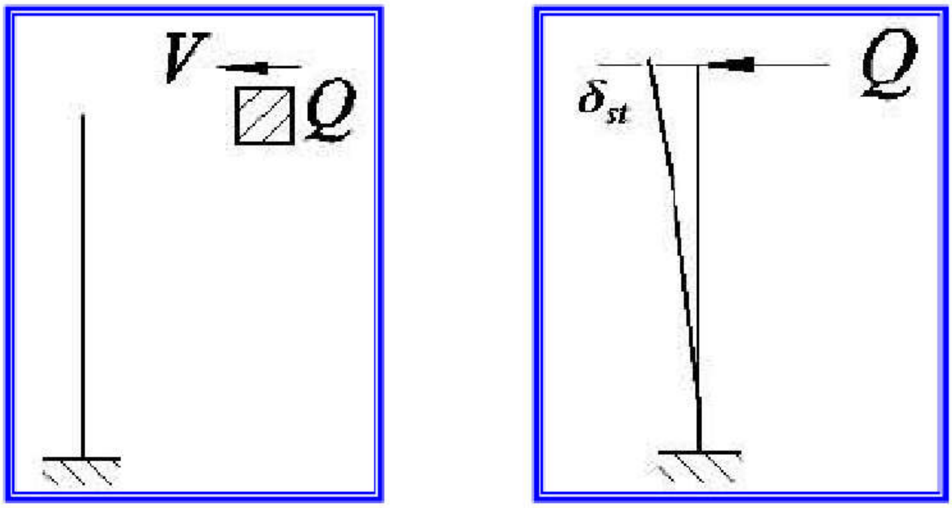


$$K_d = 1+\sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_{cst}}}$$

$$= 1+\sqrt{1+\frac{384EIH}{Ql^3}}$$

$$\sigma_{d\max} = K_d\sigma_{st\max} = \frac{3Ql}{4bh^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{384EIH}{Ql^3}}\right)$$

水平冲击中静位移Δ_{st} 的求法



总结： 自由落体冲击：

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

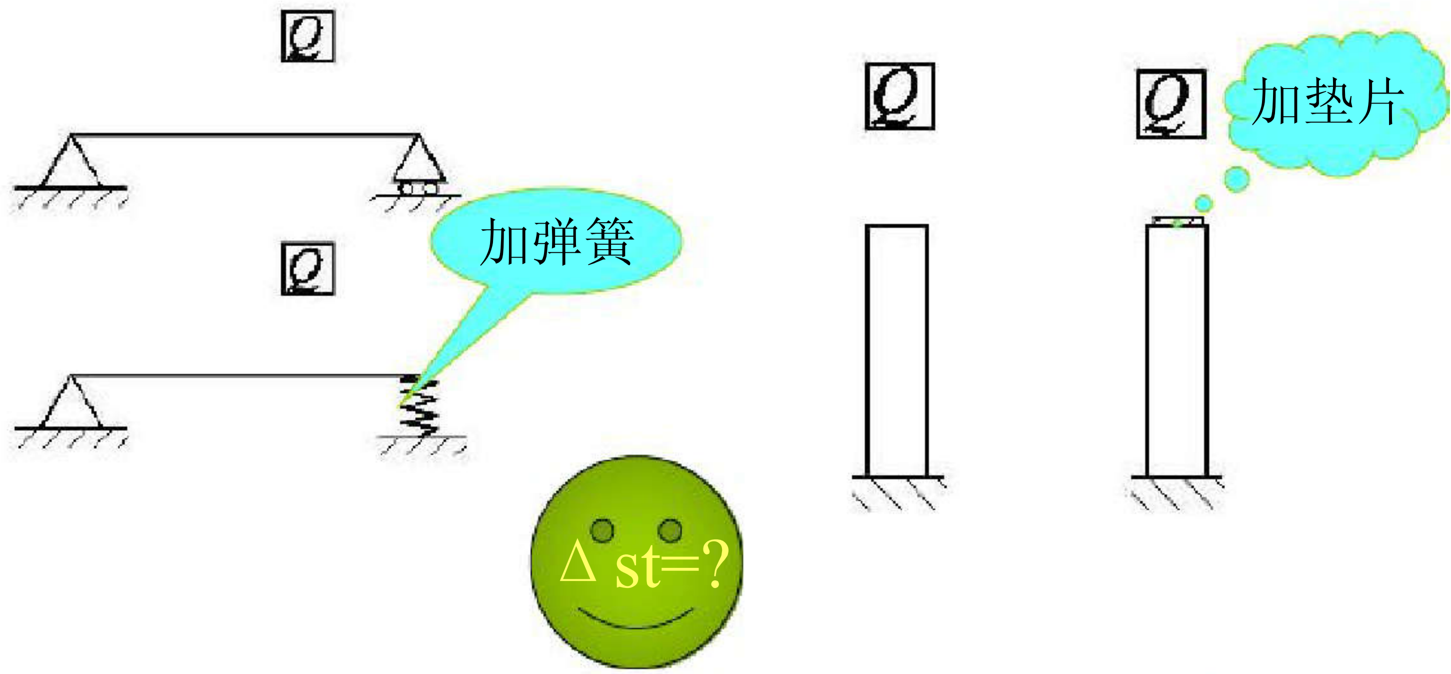
水平冲击：

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$$

㈤提高构件抗冲击能力的措施

1.增大静变形但要避免增大静应力

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$



2.采用等直杆

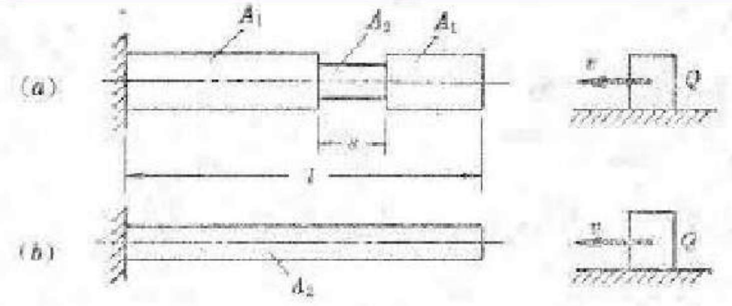


图 12-13

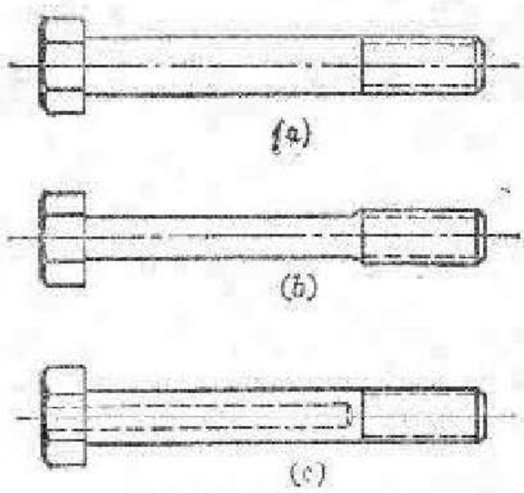


图 12-14

$$\sigma_{st(a)} = \sigma_{st(b)} \qquad k_{d(a)} > k_{d(b)}$$

$$\Delta_{st(a)} < \Delta_{st(b)} \qquad \sigma_{d(a)} > \sigma_{d(b)}$$