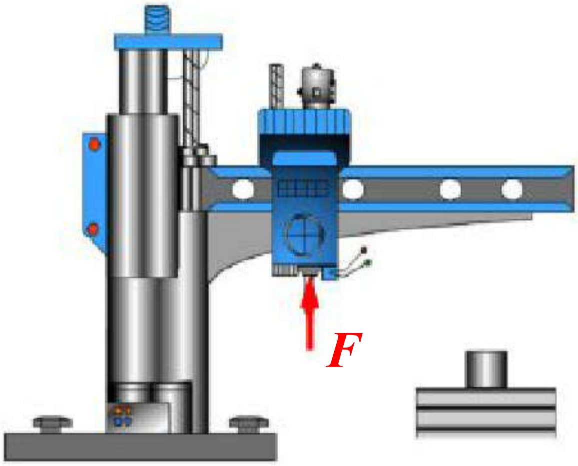
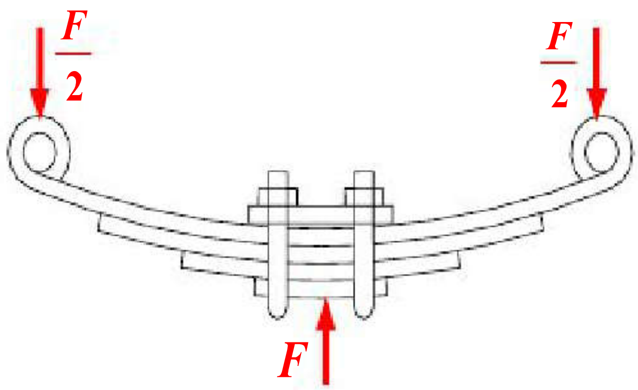

第六章　弯曲变形

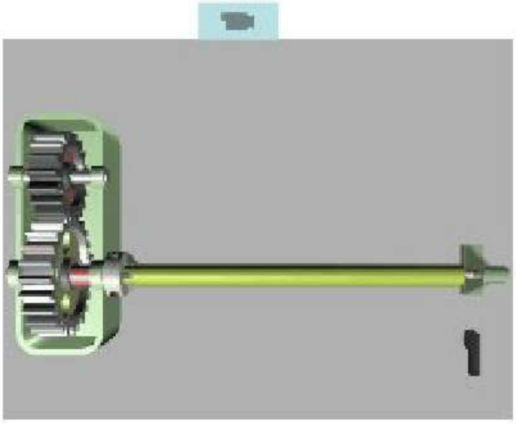
§6.1　工程中的弯曲变形问题

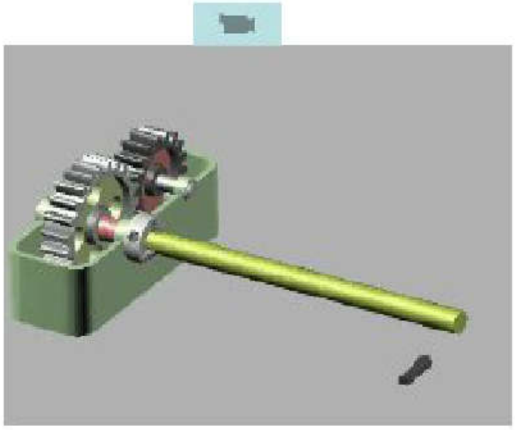
一、工程实例

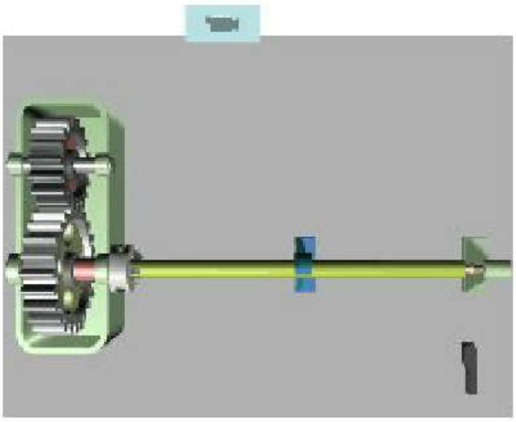


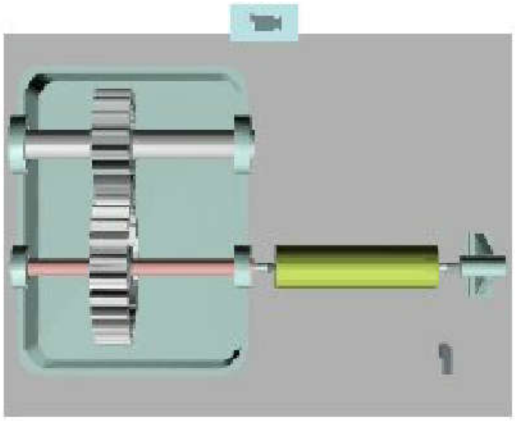


§6.1　工程中的弯曲变形问题







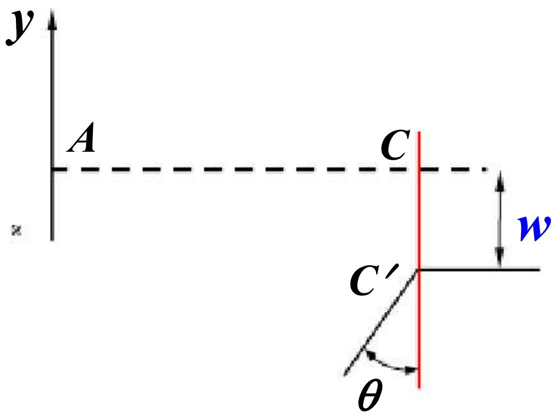


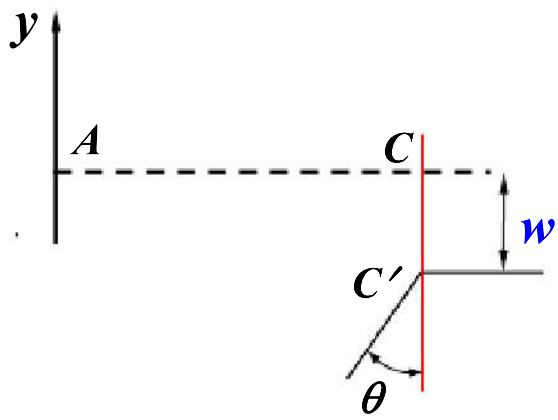
§6.2　挠曲线的微分方程

二、基本概念

1、挠度

横截面形心 C 在垂直于 x 轴方向的线位移. 用w表示.





4、挠度与转角的关系:

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

三、挠曲线的微分方程

1. 纯弯曲时曲率与弯矩的关系：
$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$$

横力弯曲时，M 和 ρ 都是x的函数.略去剪力对梁的位移的影响
$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI}$$

2. 由数学得到平面曲线的曲率：
$$\frac{1}{\rho(x)}=\pm\frac{|w''|}{(1+w'^2)^{3/2}}$$

$$\pm\frac{|w''|}{(1+w'^2)^{3/2}}=\frac{M(x)}{EI}$$
梁的挠曲线微分方程

w'^2 与 1 相比十分微小而可以忽略不计，故上式可近似为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M(x)}{EI}}$$
梁的挠曲线近似微分方程

因此梁的挠曲线近似微分方程:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d} x^2} = \frac{M(x)}{EI}}$$

讨论 :

(1) 横力弯曲时，分段列挠曲线的近似微分方程

(2) 小变形时适用

(3) 近似原因 ：（a） 略去了剪力的影响;

（b） 略去了 w'^2 项;

§6.3 用积分法求弯曲变形

一、用积分法求弯曲变形

梁的挠曲线近似微分方程: $$w''=\frac{M(x)}{EI}$$

若为等截面直梁, 其抗弯刚度EI为常量，则: $$EIw''=M(x)$$

积分一次得转角方程

$$\theta=EIw'=\int M(x)\mathrm{d}x+C$$ 梁的转角方程

再积分一次，得挠度方程

$$EIw=\iint M(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+Cx+D$$ 梁的挠曲线方程

C，D为积分常数，由边界条件和光滑连续性条件确定

§6.3 用积分法求弯曲变形

二、积分常数的确定

1.边界条件

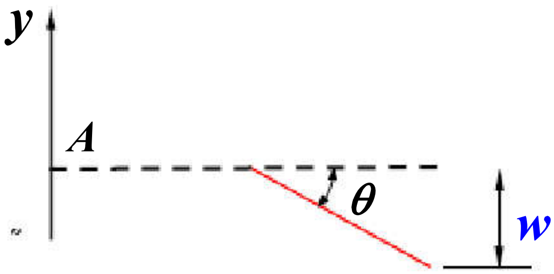
简支梁：$w_A = 0$ $\quad w_B = 0$

悬臂梁：$w_A = 0$ $\quad \boldsymbol{\theta_A = 0}$

已知：悬臂梁，EI，

求：最大挠度、最大转角。

解：(1)建立右手坐标系



(2)列挠曲线近似微分方程

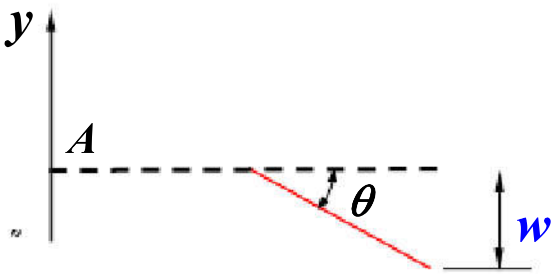
$$EIw''(x) = M$$

$$EI\theta = \frac{F}{2}x^2 - Flx + C$$

$$EIw = \frac{F}{6}x^3 - \frac{1}{2}Flx^2 + Cx + D$$

(3)边界条件

$x=0$时， $\theta_A=0$ $w_A=0$



将边界条件带入两式，得

$C=EI\theta_A=0$ $D=EIw_A=0$

转角和挠曲线方程为

$$\therefore EI\theta=\frac{F}{2}x^2-Flx$$

$$\therefore EIw=\frac{F}{6}x^3-\frac{Fl}{2}x^2$$

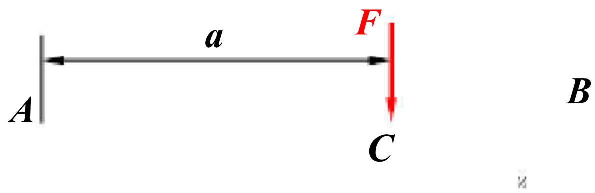
(4)最大挠度、最大转角

$$\theta_{\max}=\theta_B=-\frac{Fl^2}{2EI} \qquad w_{\max}=w_B=-\frac{Fl^3}{3EI}$$

江苏大学

已知:如图，EI，求： $\theta(x)$，$w(x)$，最大挠度、最大转角。

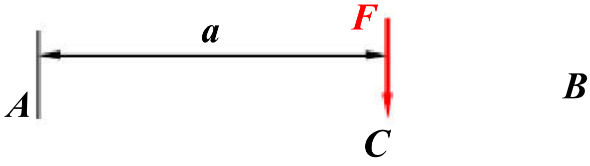
解:



$$M(x_1)=\frac{Fb}{l}x_1 \qquad (0\le x_1\le a)$$

CB段:

$$M(x_2)=\frac{Fb}{l}x_2-F(x_2-a) \qquad (a\le x_2\le l)$$



AC段: $$EIw_1'' = \frac{Fb}{l}x_1$$

$$EIw_1' = \frac{Fb}{2l}x_1^2 + C_1$$

$$EIw_1 = \frac{Fb}{6l}x_1^3 + C_1x_1 + D_1$$

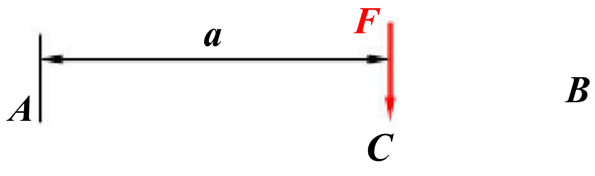
CB段:

$$EIw_2'' = \frac{Fb}{l}x_2 - F(x_2 - a)$$

$$EIw_2' = \frac{Fb}{2l}x_2^2 - \frac{F}{2}(x_2 - a)^2 + C_2$$

$$EIw_2 = \frac{Fb}{6l}x_2^3 - \frac{F}{6}(x_2 - a)^3 + C_2x_2 + D_2$$

边界条件:

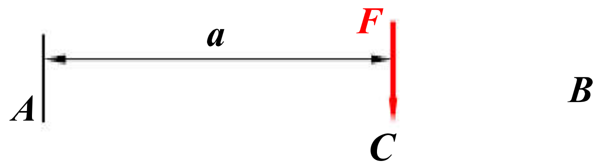


$x_1=0$时, $w_A=0$

$x_2=l$时, $w_B=0$

$\Rightarrow$ $D_1=D_2=0$

$\Rightarrow$ $C_1=C_2=-\dfrac{Fb}{6l}(l^2-b^2)$



AC段:

$$\theta_1 = w_1' = -\frac{Fb}{6EIl}(l^2 - 3x_1^2 - b^2)$$

$$w_1 = -\frac{Fb}{6EIl}x_1(l^2 - x_1^2 - b^2)$$

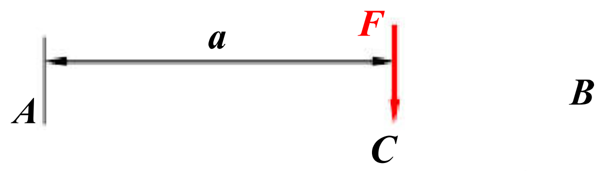
CB段:

$$\theta_2 = -\frac{Fb}{6EIl}[(l^2 - 3x_2^2 - b^2) + \frac{3l}{b}(x_2 - a)^2]$$

$$w_2 = -\frac{Fb}{6EIl}[(l^2 - x_2^2 - b^2) + \frac{l}{b}(x_2^2 - a)^3]$$

(5)在A端：

$$x_1 = 0, \qquad \theta_A = -\frac{Fab}{6lEI}(l+b)$$



在B端：

$$x_2 = l, \qquad \theta_B = \frac{Fab}{6lEI}(l+a)$$

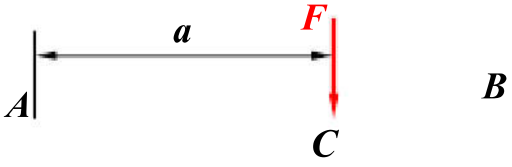
若a>b，最大转角：

$$\theta_{\max} = \theta_B = \frac{Fab}{6lEI}(l+a)$$

$$\theta_C = \frac{Pab}{3lEI}(a-b) > 0$$

∴ $\theta(x)$=0的点在AC段

(6)简支梁的最大挠度应在 $w'=0$ 处



$$\theta_1 = w_1' = \frac{Fb}{6lEI}(l^2 - b^2 - 3x^2) = 0$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$$

当 $a > b$时, $x_1 < a$ 最大挠度确实在第一段梁中

§6.3　用积分法求弯曲变形

积分法的优缺点:

（1）优点：可以求出转角和挠度的普遍方程

（2）缺点：计算过程比较繁琐

§6.4 用叠加法求弯曲变形

一、条件

1. 小变形
2. 材料服从胡克定律

二、叠加原理:

当梁上同时作用几个载荷时，梁的变形等于每一个载荷单独作用时所引起的变形的代数和。

$$\therefore EIw_{F1}'' = M_{F1} \qquad EIw_{F2}'' = M_{F2}$$

$$EIw_F'' = M$$

$$w'' = w_{F1}'' + w_{F2}'' \qquad w'' = (w_{F1} + w_{F2})''$$

已知：如图，求最大挠度

q

A *B*

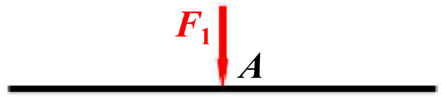
解： F、q单独作用时，梁的最大挠度发生在中点。

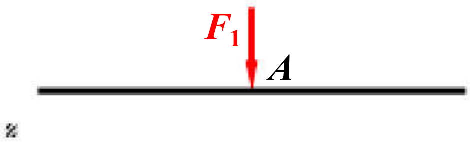
$$(w_C)_q =$$

$$(w_C)_F =$$

$$w_C =$$

用叠加法求梁截面A的挠度和截面B的转角和挠度.



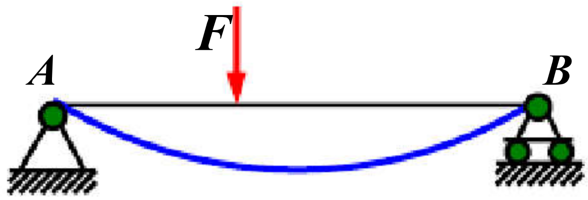

F_1
A

§6.5　简单静不定梁

一、基本概念

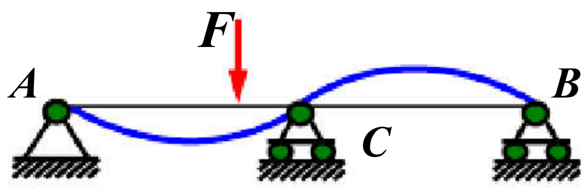
1. 超静定梁

单凭静力平衡方程不能求出全部支反力的梁，



2. “多余”约束

多于维持其静力平衡所必需的约束



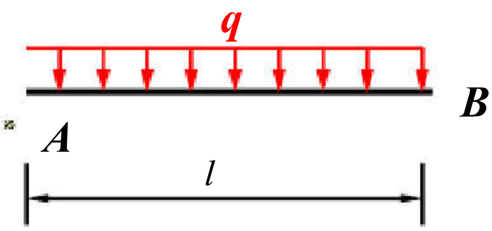
3. “多余”反力

“多余”与相应的支座反力

4. 超静定次数

n = 未知力的个数 - 独立平衡方程的数目

二、求解超静定梁的步骤



1. 画静定结构建立相当系统

2. 列几何方程-变形协调方程

$$-\frac{ql^4}{8EI}+\frac{F_{RB}l^3}{3EI}=0$$

由该式解得

$$F_{RB}=\frac{3}{8}ql$$

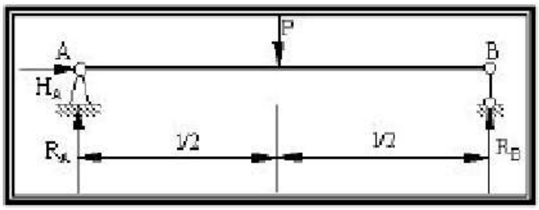
5. 求解其它问题（反力，应力，变形等）

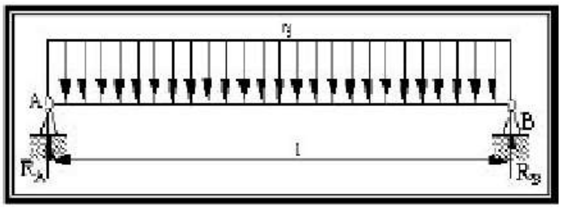
§6.6　提高弯曲刚度的措施

一、改善结构形式，使M降低。

1.载荷靠近支座 M=Pa

2.使集中力分散





$$\because \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI_z}$$

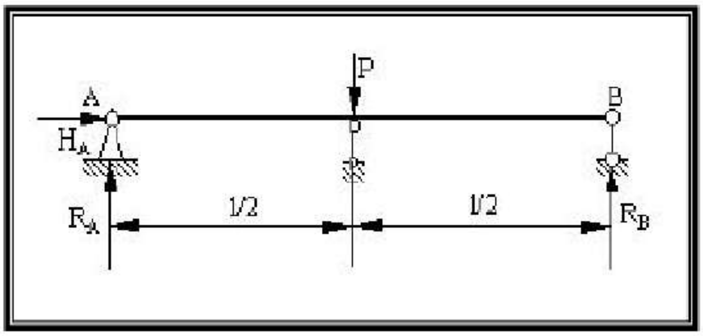
$$f_{\max}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

$$f_{\max}=\frac{5ql^4}{384EI}=\frac{5Pl^3}{384EI}$$

3.使跨度L减小

$$f_{\max}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

4.当跨度不能变时，可改善支承条件。



㈡选择合理的截面形状，增大惯性矩

1.工字形、槽形、T字形等比矩形圆形好。

2.波形板比平板好。

㈢其它

用桁架代替梁