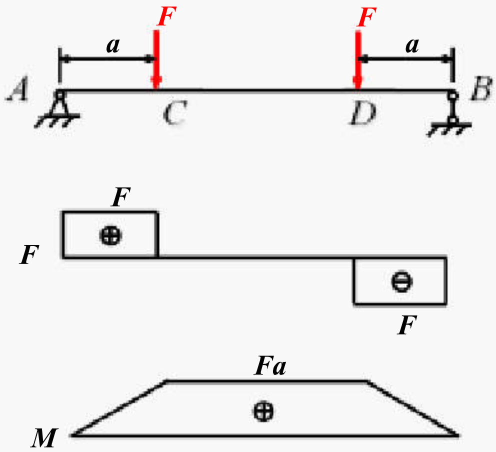

第五章 弯曲应力

§5.1 纯弯曲

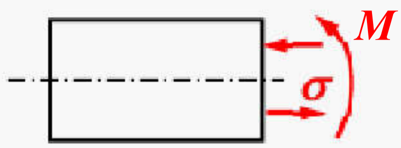
一、 引言



当梁上有横向外力作用时，一般情况下，梁的横截面上既又弯矩 M，又有剪力 F_S.

纯弯曲： 梁的横截面上只有弯矩，无剪力

横力弯曲： 梁的横截面上既有弯矩，又有剪力

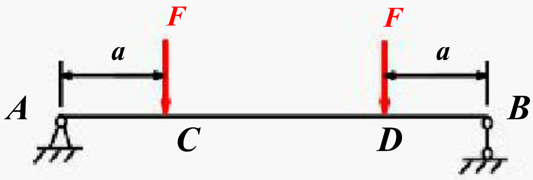


内力 $\begin{cases} \text{剪力}F_S \longrightarrow \text{切应力}\tau \\ \text{弯矩}M \longrightarrow \text{正应力}\sigma \end{cases}$

§5.2 纯弯曲时的正应力

二、实验

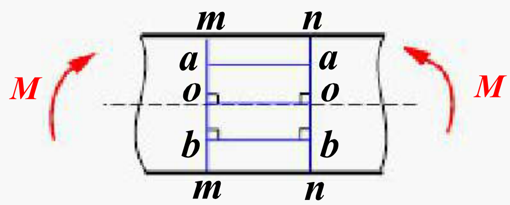
1. 变形现象



（1）纵向线 弯成弧线，

靠近顶端的纵向线缩短，

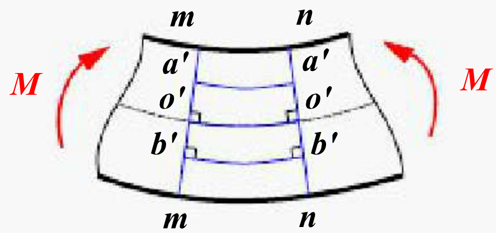
靠近底端的纵向线伸长.



（2）横向线 仍保持为直线

相对转过了一个角度，

仍与纵向弧线垂直.



§5.2 纯弯曲时的正应力

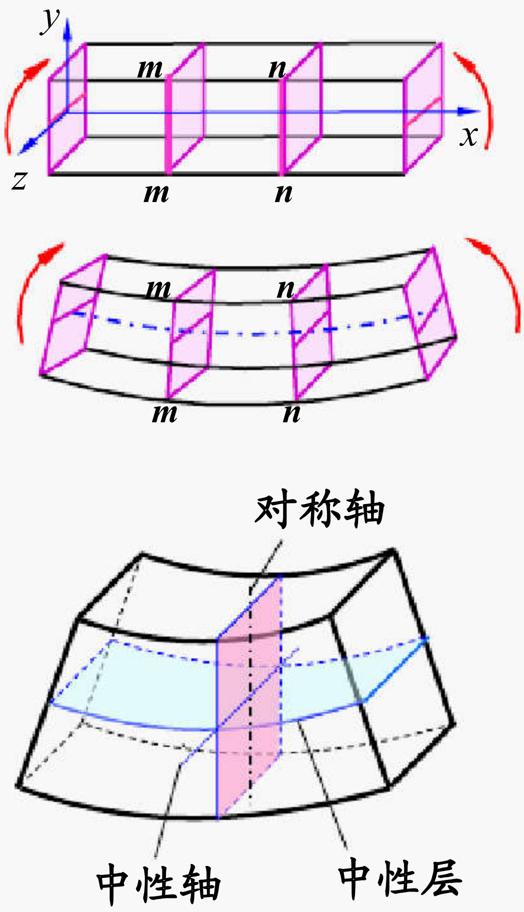
2.提出假设

(a) **平面假设**：横截面变形后仍为平面且垂直于变形后的梁轴线，绕某一轴转动一角度。

(b) **单向受力假设**：纵向纤维不相互挤压，只受单向拉压.

推论：必有一层变形前后长度不变的纤维—**中性层**

中性轴垂直于横截面对称轴



§5.2 纯弯曲时的正应力

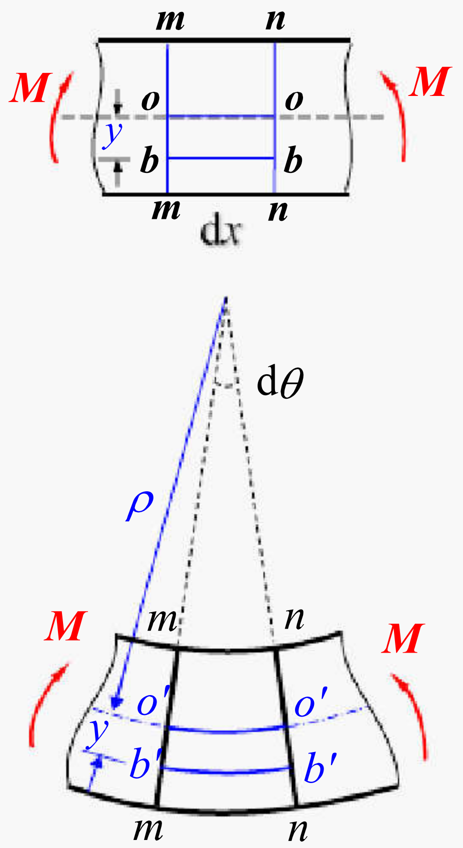
三、变形几何关系

$$\overline{bb} = \mathrm{d}x = \overline{OO} = \overset{\frown}{O'O'} = \rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$\overset{\frown}{b'b'} = (\rho + y)d\theta$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\overset{\frown}{b'b'} - \overline{bb}}{\overline{bb}} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad (1)$$

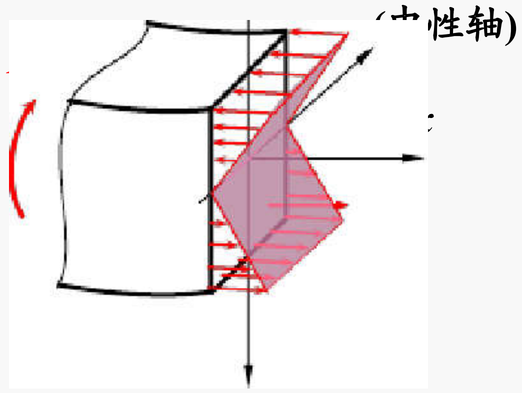


* 纯弯曲时纵向纤维的应变与它到中性层的距离成正比.

四、物理关系

当 $\sigma \leq \sigma_P$时， 胡克定律:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho} \qquad (2)$$



* 横截面上任意一点的正应力，与它到中性轴的距离成正比.

问题: (1) 中性轴的位置?

(2) 中性层的曲率半径ρ?

§5.2 纯弯曲时的正应力

五、静力关系

横截面上内力系为垂直于横截面的空间平行力系，简化得到三个内力分量.

1.$\sum X=0$

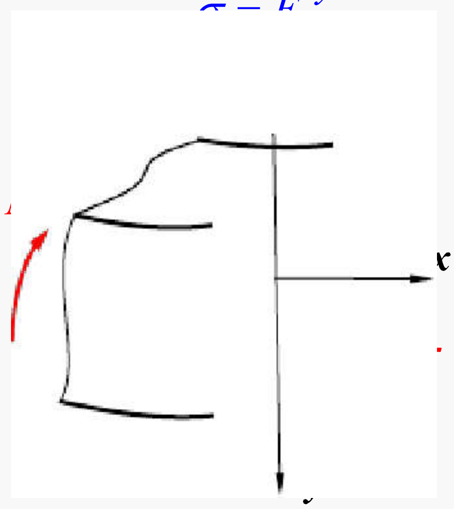
$$F_x=\int_A \sigma \mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\overbrace{\int_A y\mathrm{d}A}^{S_z}=0 \Rightarrow S_z=0$$

➡ 中性轴通过横截面形心

2.$\sum M_y=0$

$$M_y=\int_A z\sigma \mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\overbrace{\int_A yz\mathrm{d}A}^{I_{yz}}=0 \Rightarrow I_{yz}=0$$

➡ y为对称轴上式自然满足



内力与外力相平衡

§5.2 纯弯曲时的正应力

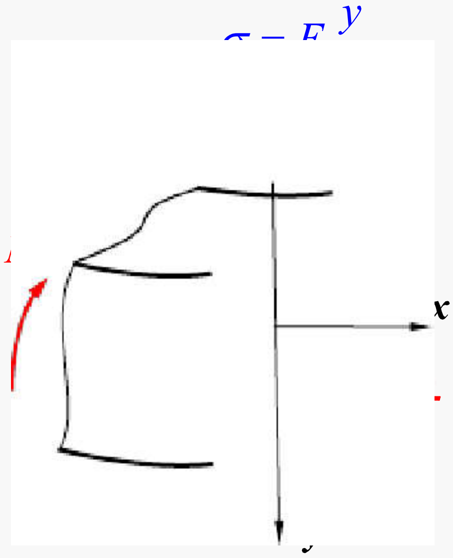
3.$\sum M_z=0$

$$M_z=\int_A y\sigma \mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\int_A y^2\mathrm{d}A=\frac{EI_z}{\rho}=M$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z} \qquad (3)$$

代人正应力(2)式: $\sigma=E\dfrac{y}{\rho}$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma=\frac{My}{I_z}} \qquad (4)$$



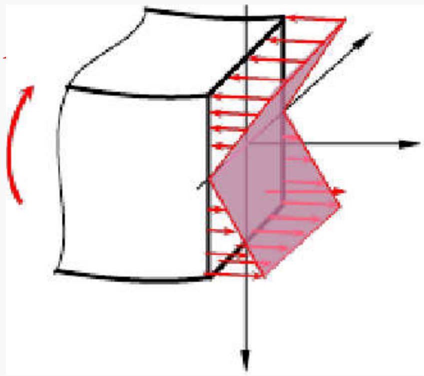
I_z——为梁横截面对中性轴的惯性矩.

§5.2 纯弯曲时的正应力

讨论:

1、公式适用于: (1)线弹性;　(2) 纵向对称面;

(3) 等直梁;



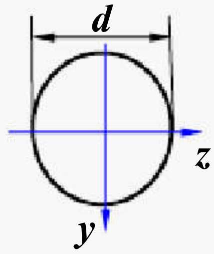
2、σ: 拉应力为正号，压应力为负;

3、最大正应力: $\sigma_{max}=\dfrac{M\,y_{max}}{I_z}$　(5)

令: $W=\dfrac{I_z}{y_{max}}$ —抗弯截面系数

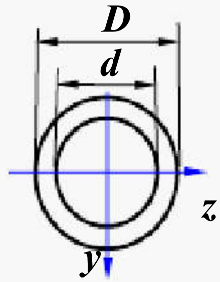
则公式(5)改写为: $$\boxed{\sigma_{max}=\frac{M}{W}}$$ (6)

4、常用截面的抗弯截面系数



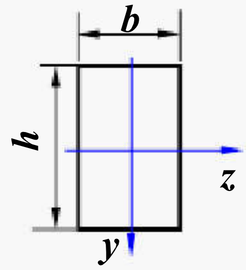
实心圆截面： $I_z = \dfrac{\pi d^4}{64}$

$$W = \frac{I_z}{d/2} = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$$



空心圆截面： $I_z = \dfrac{\pi D^4(1-\alpha^4)}{64}$ $\quad \alpha = \dfrac{d}{D}$

$$W = \frac{I_z}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$$



矩形截面： $I_z = \dfrac{bh^3}{12}$

$$W = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

§5.3 横力弯曲时的正应力

强度条件： 当$l/h \gg 1$时，正应力远大于切应力

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \le [\sigma]}$$

1.塑性材料

$$[\sigma_t] = [\sigma_c] = [\sigma]$$

只需求出整个梁的σ_{max}，则$\sigma_{max} \le [\sigma]$

2.脆性材料

$$[\sigma_t] \ne [\sigma_c]$$

需要求出σ_{tmax}和σ_{cmax}，则：$\sigma_{tmax} \le [\sigma_t]$

$$\sigma_{cmax} \le [\sigma_c]$$

夹紧装置如图所示.已知板长$3a$ = 150mm，压板材料的弯曲许用应力$[\sigma]$ = 140MP.试计算压板传给工件的最大允许压紧力F.

画弯矩图:

F_2=4kN

A

C B

1m 1m 1 m

B截面

$\sigma_{\mathrm{t\,max}} =$

$\sigma_{\mathrm{c\,max}} =$

C截面

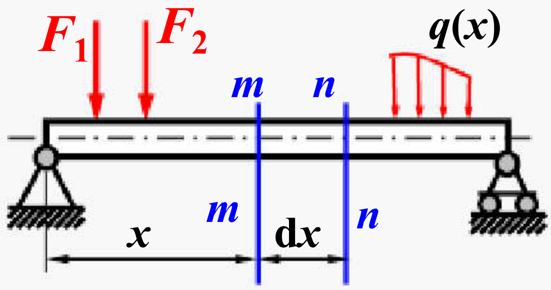
$\sigma_{\mathrm{t\,max}} =$

2.5kN

4kN

§5.4 弯曲切应力

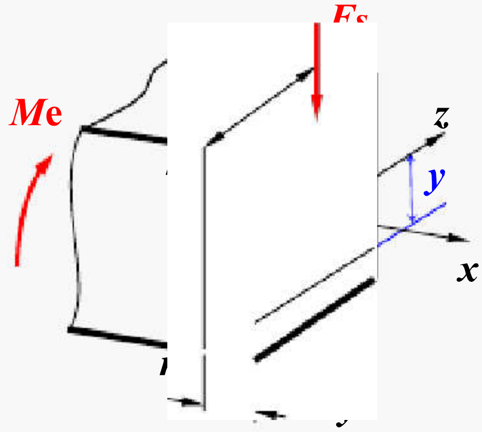
一、矩形截面梁



1、两个假设

（a）横截面上各点的剪应力

都平行于剪力F_S



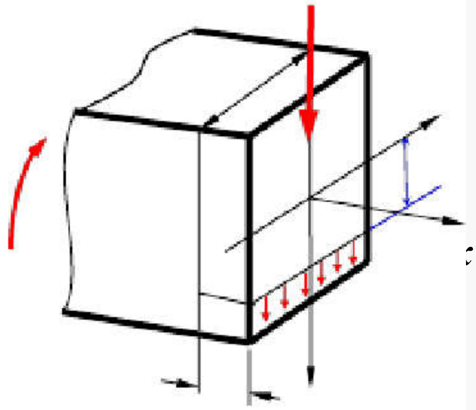
（b）切应力沿截面宽度均匀

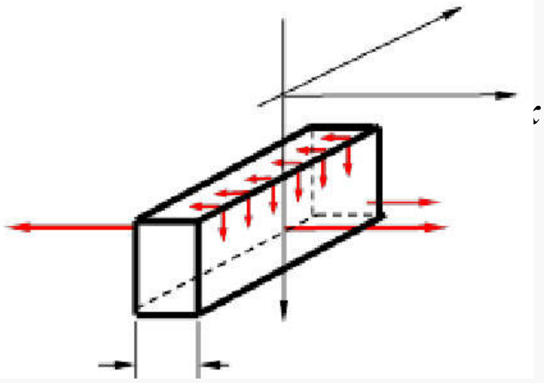
分布

（距中性轴等距离处切应力

相等）.

2、分析方法



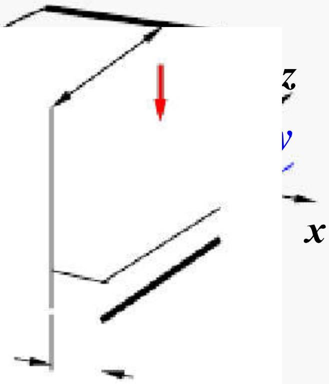


3、公式推导

$F_{N1} = \int_{A_1} \sigma_1 \mathrm{d}A = \int$

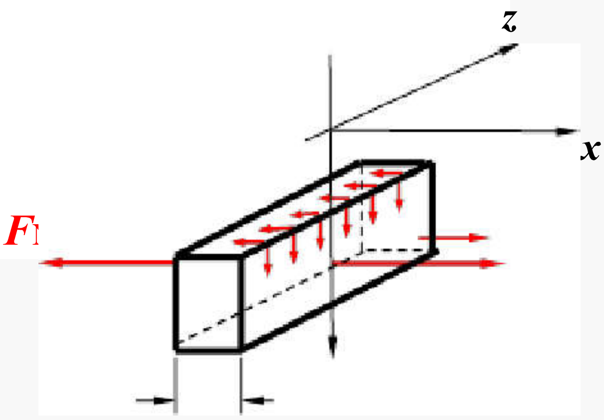
$= \frac{M}{I_z} S_z^*$

$F_{N2} = \int_{A_1} \sigma_2 \mathrm{d}A = \int_{A_1} \frac{M + \ M \ y}{I_z} \mathrm{d}A$



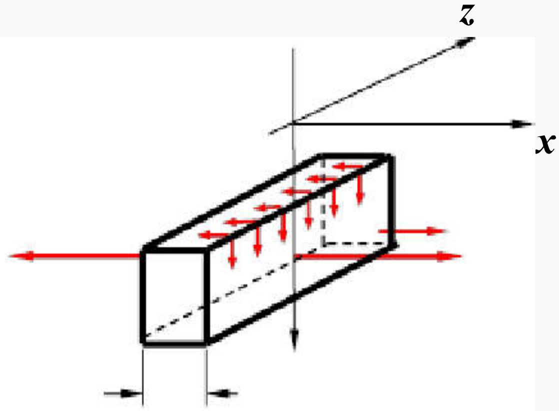
式中：A_1为距中

外部分的



$S_z^* = \int_{A_1} y_1 \mathrm{d}A$ 面积A_1对中性轴的静矩.

$F_{N1} = \frac{M}{\ } S^*$ $F_{N2} = \frac{M + \mathrm{d}M}{\ } S^*$



d

由

$\sum$

I_z I_z ⟹ $\mathrm{d}x$ $I_z b$

$\because \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = F_S$ ⟹ $\boxed{\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}}$

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

I_z —— 整个横截面对中性轴的惯性矩.

b —— 矩型截面的宽度.

S_z^* —— 距中性轴为y的横线以外部分横截面面积对中性轴的静矩.

$$S_z^* = \int_{A_1} y_1 \mathrm{d}A = \int_y^{h/2} y_1 b \mathrm{d}A_1 = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

4、切应力沿截面高度的变化规律

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

((1))切应力沿截面高度按抛物线

规律变化。

(2) $y=\pm h/2$，$\tau = 0$

(3) $y=0$，**切应力达到最大值**

$$\tau_{\max} = \frac{F_S h^2}{8I_z} = \frac{F_S h^2}{8\times bh^3/12} = \frac{3}{2}\times\frac{F_S}{bh} = \frac{3F_S}{2A}$$

矩形截面梁的最大切应力是平均切应力的1.5倍

5、 截面静矩的计算方法

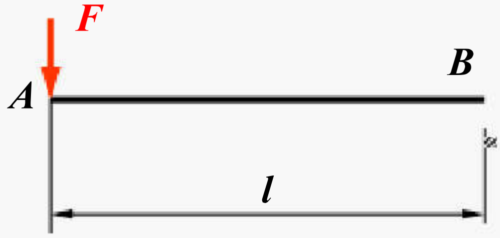
$$S_z=\int_{A_1} y\mathrm{d}A=A_1\bar{y}$$

z

A_1为截面面积

$\bar{y}$为截面的形心坐标

四、剪切强度条件



$$|M|_{\max} = Fl$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{6Fl}{bh^2} \times \frac{2bh}{3F}$$

对非薄壁细长梁：$l >> h$，

∴弯曲正应力是控制梁的主要因素

§5.4 弯曲切应力

结论：要考虑弯曲正应力、弯曲剪应力的情况:

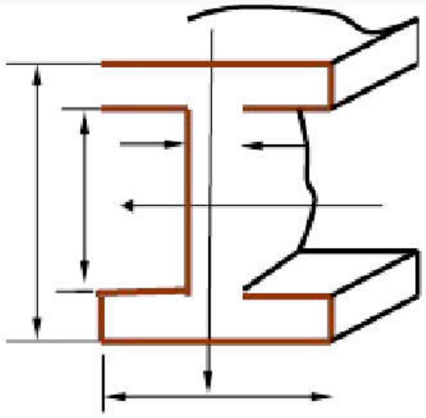
(1)梁的跨度较短，或在支座附近有较大的载荷。

(2)铆接焊接而成的工字梁。

(3)胶合的梁

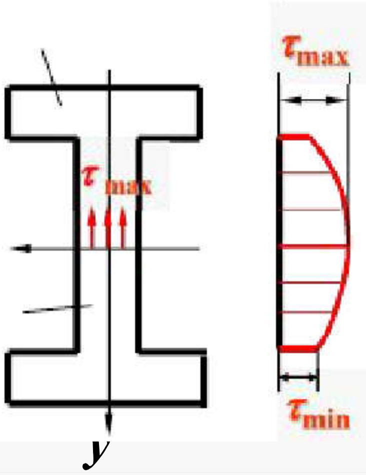
§5.4 弯曲切应力

二、工字形截面



讨

(1) 腹板τ沿高度抛物线变化



简支梁*AB*如图所示. l = 2m，a = 0.2m. 梁上的载荷为q为10kN/m，F = 200kN.材料的许用应力为[σ]=160MPa，[τ] = 100MPa，试选择工字钢型号.

解：（1）计算支反力做内力图.

q

A B

（2）选择工字钢型号

$$W_z =$$

查型钢表，选用22a工字钢，

其W_z = 309cm^3

腹板厚度 *d*=0.75cm，最大剪力为210kN

$$\tau_{\max}=\frac{F_{S\max}S_{z\max}^{*}}{I_z b}=\frac{210\times10^{3}}{18.9\times10^{-2}\times0.75\times10^{-2}}$$

$$=148\text{MPa}>[\tau]$$

$\tau_{\max}$超过[τ]很多，应重新选择更大的截面.现已25b工字钢进行试算

查表得 $\frac{I_z}{S_{z\max}^{*}}=21.3\text{cm},$ ***d*=1cm**

$$\tau_{\max}=\frac{210\times10^{3}}{21.3\times10^{-2}\times1\times10^{-2}}$$

$$=98.6\text{MPa}\le[\tau]$$

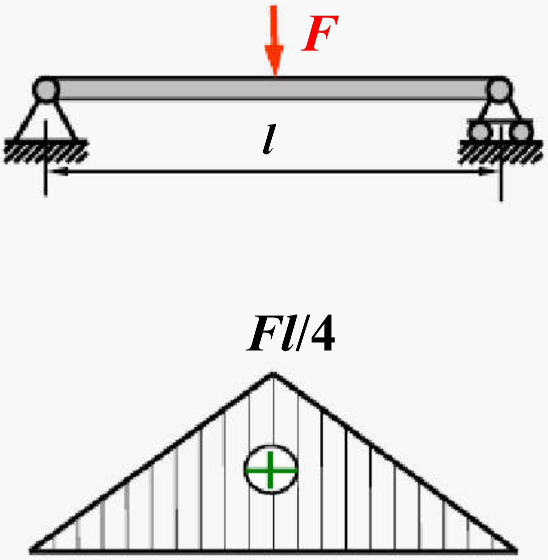
所以应选用型号为25b的工字钢.

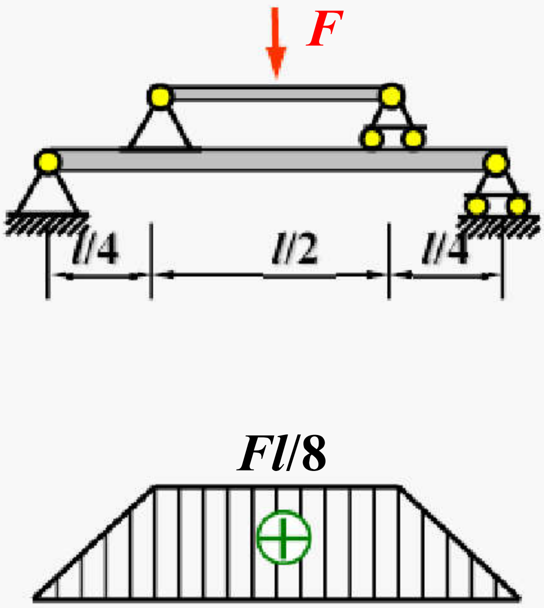
§5.5　提高弯曲强度的措施

一、合理安排梁的受力情况

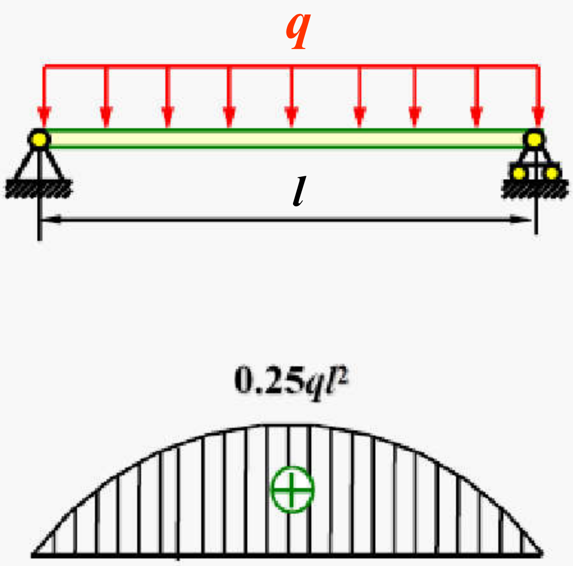
1、合理布置载荷

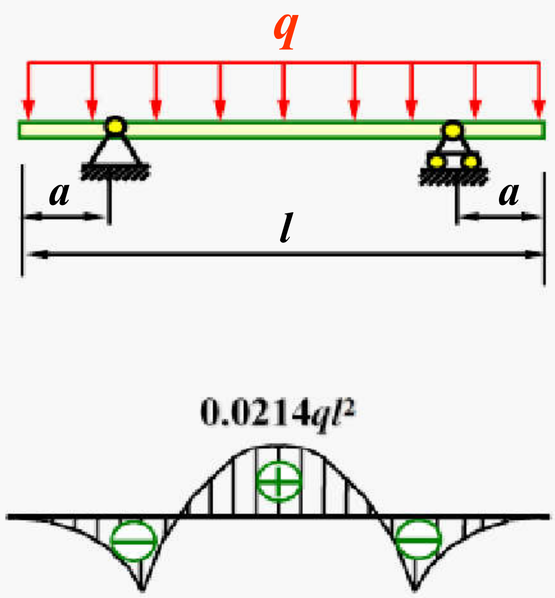
$$\because \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \le [\sigma]$$





2、合理布置支座





二、合理截面

1、合理的截面形状

2、截面放置

三、考虑材料的特性

(1) 脆性材料: $[\sigma_t]<[\sigma_c]$

$$\frac{\sigma_{t\max}}{\sigma_{c\max}}=\frac{\dfrac{M_{\max}y_1}{I_z}}{\dfrac{M_{\max}y_2}{I_z}}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}$$

(2) 塑性材料: $[\sigma_t]=[\sigma_c]$

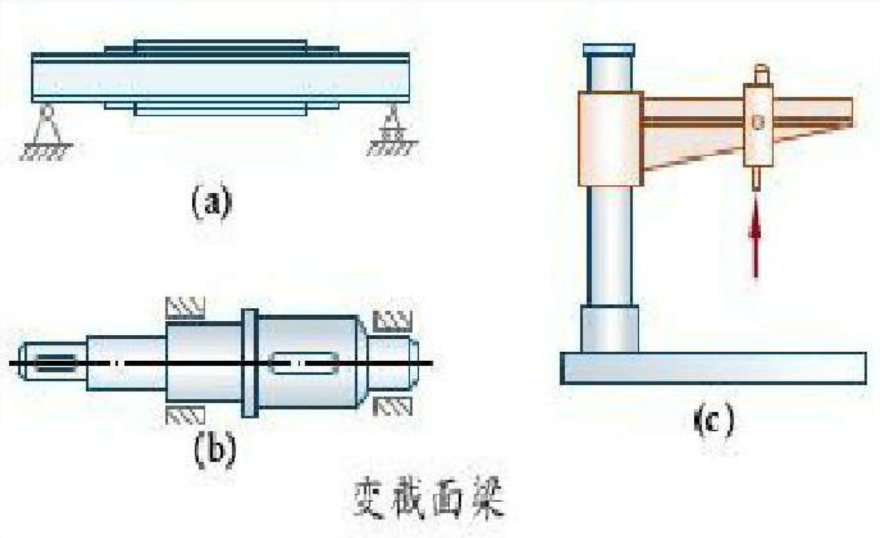
采用中性轴对称的截面

$$\frac{\sigma_{t\max}}{\sigma_{c\max}}=\frac{\dfrac{M_{\max}y_1}{I_z}}{\dfrac{M_{\max}y_2}{I_z}}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}=1$$

§5.5　提高弯曲强度的措施

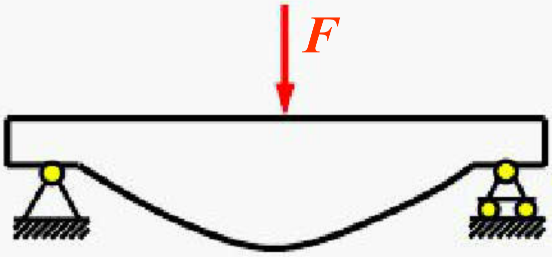
四、等强度梁

1.变截面梁:



§5.5 提高弯曲强度的措施

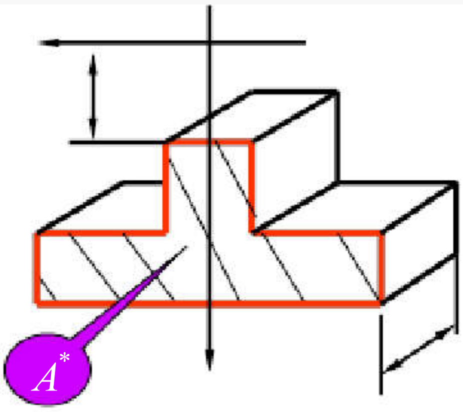
2.等强度梁：变截面梁各个截面上最大正应力都等于许用应力

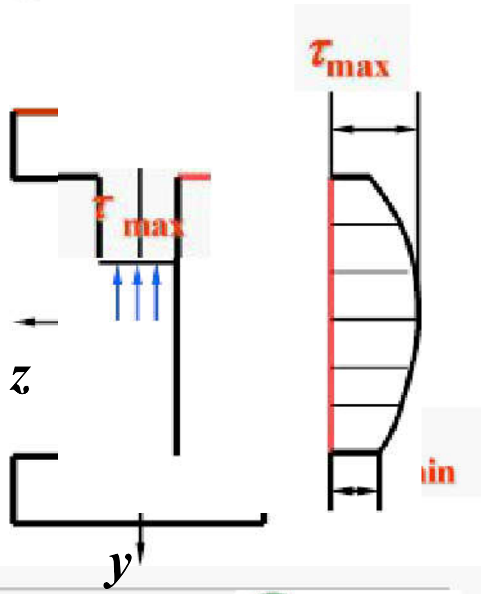


讨

(

(





§5.4 弯曲切应力

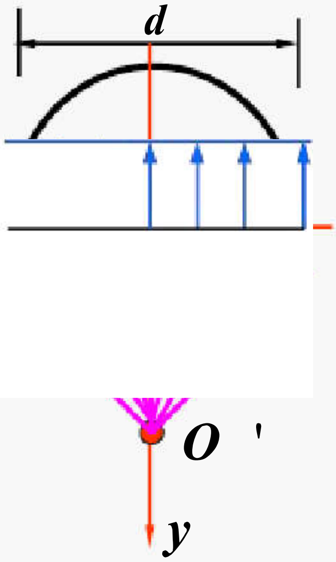
三、圆形截面

1.假设:

(1)圆上AB弦各点的剪应力作用线P过点

(2)弦AB上各点的剪应力的垂直分量相等

2.公式



最大切应力发生在中性轴上

$$\boxed{\tau_{\max}=\frac{4}{3}\frac{F_S}{\pi R^2}=\frac{4}{3}\tau_{平均}}$$