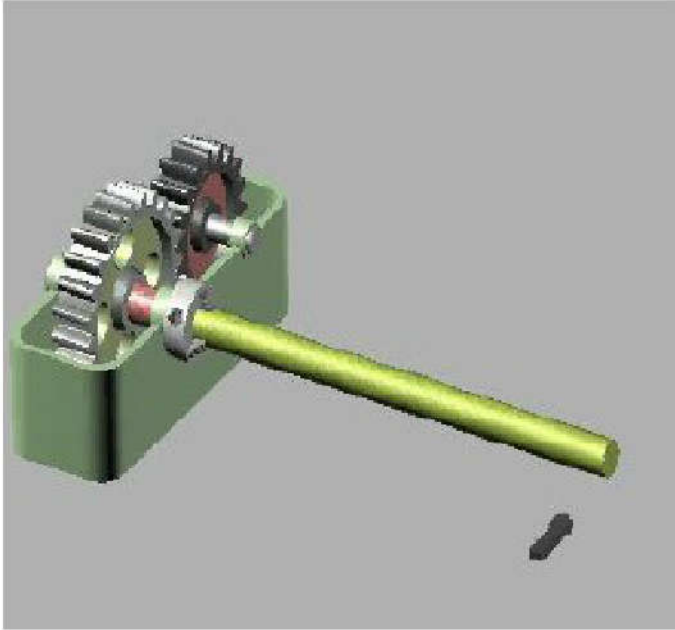


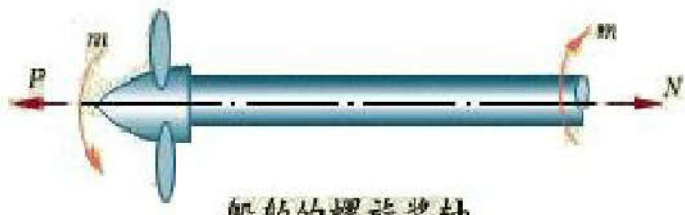
第三章 扭转



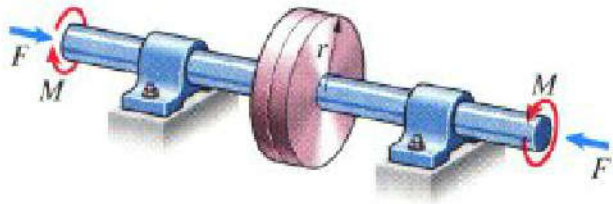
一、工程实例



§ 3.1 扭转的概念和实例



船舶的螺旋桨轴



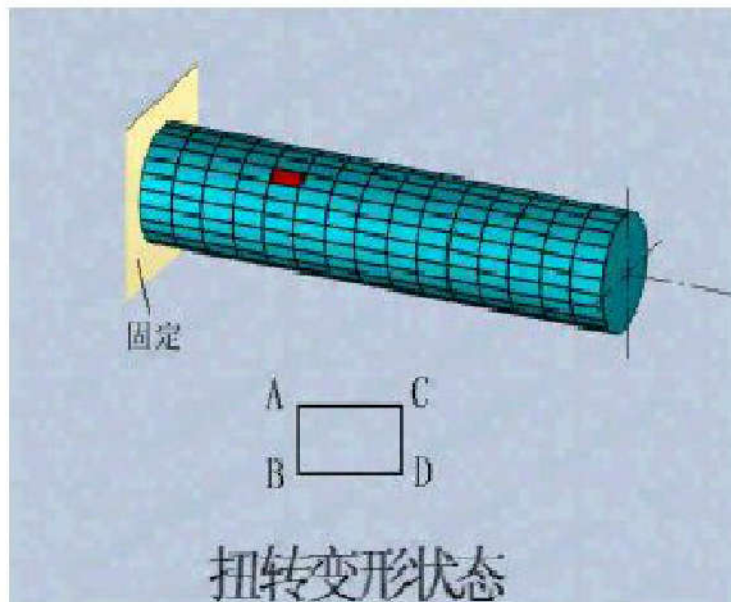
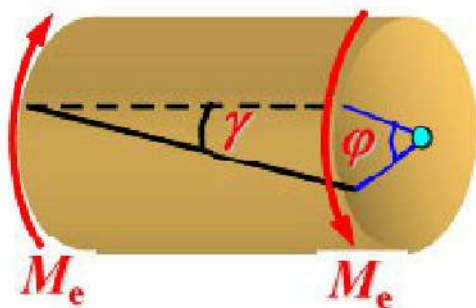
§ 3.1 扭转的概念和实例

二、受力特点

杆件的两端作用两个**大小相等**、**方向相反**、且作用平面垂直于杆件轴线的**力偶**。

三、变形特点

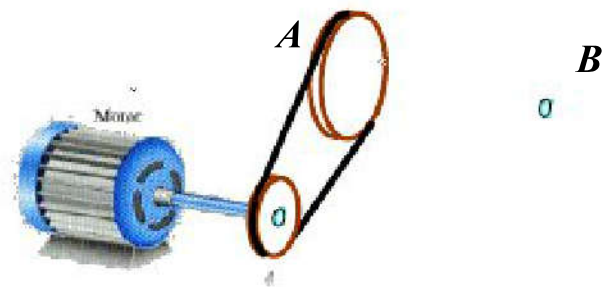
杆件的任意两个横截面都发生绕轴线的相对转动。



§ 3.2 外力偶矩的计算 扭矩和扭矩图

一、外力偶矩的计算

已知：传动轴的转速 $n(\text{r}/\text{min})$ ，
输入功率 $P(\text{kW})$



外力偶矩做功： $W = M_e \varphi$

$$\varphi = 2\pi n \quad W = 2\pi n \times M_e$$

皮带输入功： $W_1 = P \times 1000 \times 60$

$$M_e = 9549 \frac{P}{n}$$

§ 3.2 外力偶矩的计算 扭矩和扭矩图

二、内力的计算

1. 大小

取左段:

$$\sum m_x = 0 \quad T - M_e = 0$$

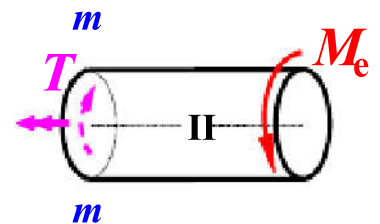
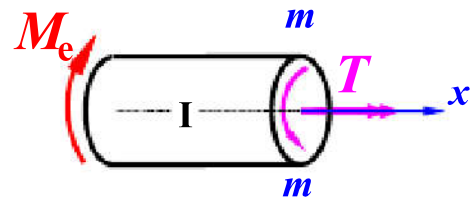
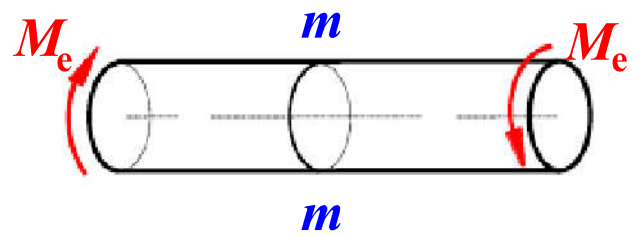
$$T = M_e$$

同理: 取右段: $T = M_e$

2. 符号规则

右手螺旋法则, 若大拇指与截面外法线方向一致, 为正。若大拇指与截面外法线方向相反, 为负。

*解题时用设正法



三、扭矩图

3.按大致比例画

§ 3.3 纯剪切

一、薄壁圆筒扭转时的剪应力

薄壁圆筒：壁厚 $\delta \leq \frac{1}{10} r_0$ (r_0 —圆筒的平均半径)

1. 实验观察

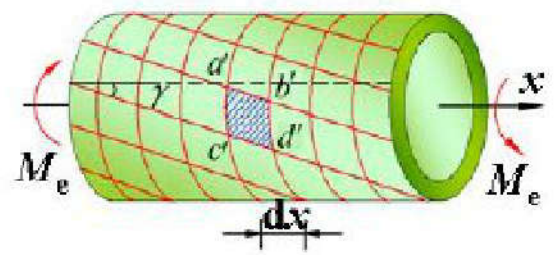
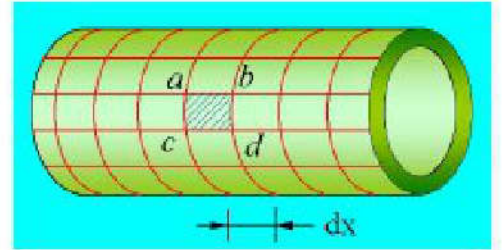
(1) 圆周线的形状、间距、大小不变，但绕轴线发生相对转动，

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0,$$

$$\therefore \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0,$$

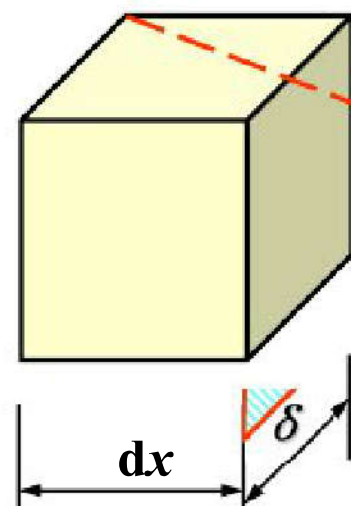
(2) 各纵向线均倾斜同一角度 γ 。

(3) 矩形方格变为平行四边形。



2.结论

- (1) 横截面上无正应力 σ ，只有切应力 τ ；
- (2) 切应力 τ 方向垂直半径或与圆周相切。
- (3) 近似认为 τ 均布。

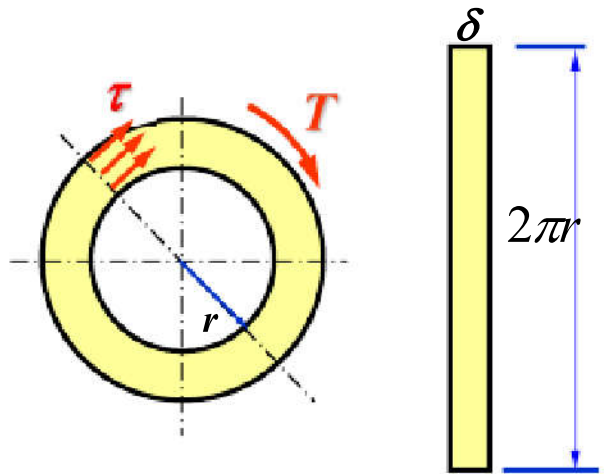


3、推导公式

$$\sum m_x = 0 \quad T = A \cdot \tau \cdot r$$

$$A = 2\pi r \cdot \delta$$

$$\therefore \tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta}$$



薄壁筒扭转时横截面上的切应力均匀分布,与半径垂直,指向与扭矩的转向一致.

§ 3.3 纯剪切

二、剪应力互等定理

取单元体: $\sum M_z = 0$

左右两侧面对 z 轴的力偶矩为:

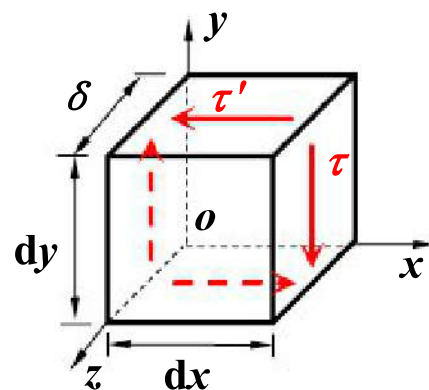
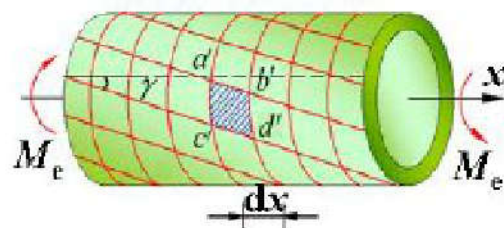
$$(\tau dy \delta) dx$$

上下两侧面对 z 轴的力偶矩为:

$$(\tau' \delta dx) dy$$

$$\therefore (\tau dy \delta) dx = (\tau' \delta dx) dy$$

$$\tau' = \tau$$



在相互垂直的两个平面上,剪应力必然**成对**存在,且数值**相等**;两者都**垂直**于两个平面的交线,方向则共同**指向**或共同**背离**这一交线. ——**剪应力互等定理**

§ 3.3 纯剪切

三、剪应变、剪切胡克定律

1. 纯剪切: 单元体的各个面上
只有 τ 无 σ

2. 剪应变:

$$\gamma l = r\varphi \quad \longrightarrow \quad \gamma = \frac{r\varphi}{l}$$

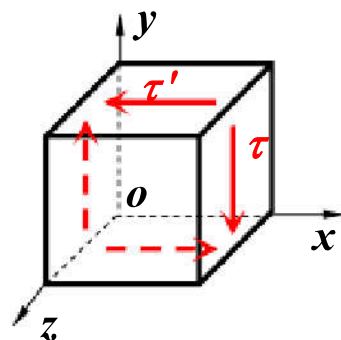
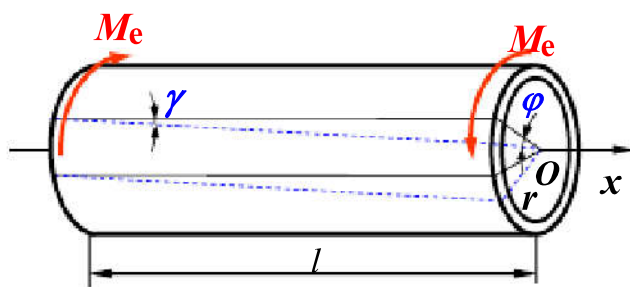
3. 剪切胡克定律:

$$\text{当 } \tau \leq \tau_p \text{ 时, } \tau = G \gamma$$

G : 剪切弹性模量, 单位: GPa

对于各向同性材料, 三个弹性常数的关系:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$



§ 3.3 纯剪切

四、剪切应变能

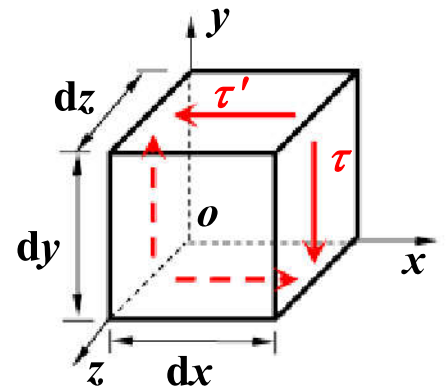
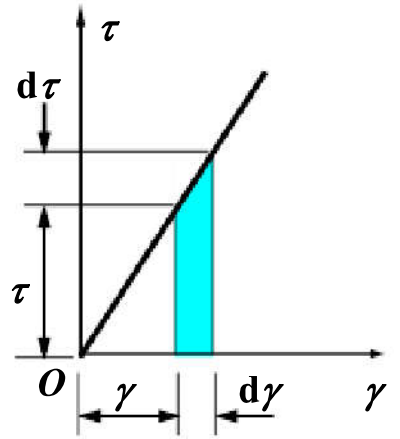
$$\begin{aligned} \text{作功: } dV_\varepsilon = dW &= \int_0^{\gamma_1} (\tau dx dy) (dz d\gamma) \\ &= \left(\int_0^{\gamma_1} \tau d\gamma \right) dV \end{aligned}$$

单元体的剪切变形比能:

$$v_\varepsilon = \frac{dV_\varepsilon}{dV} = \int_0^{\gamma_1} \tau d\gamma$$

当在弹性范围内时:

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$



§ 3.4 圆轴扭转时的应力

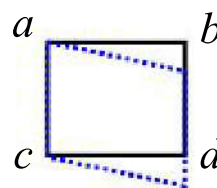
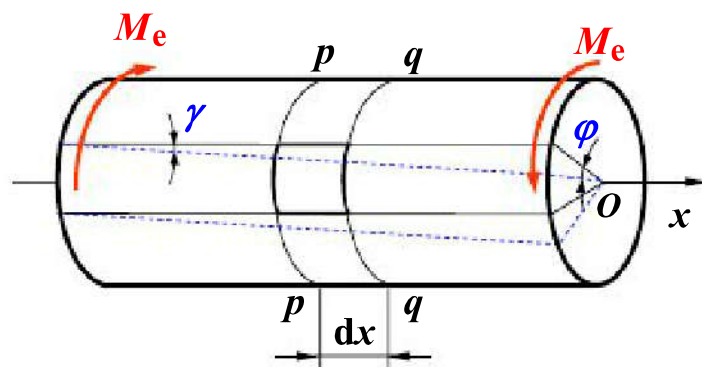
一、变形几何关系

1. 实验观察

(1) 圆周线的形状、大小、间距不变；但绕轴线发生相对转动。

(2) 各纵向线均倾斜同一角度；小方格变为平行四边形。

2. 平面假设：横截面在变形后仍保持为平面。



推论：横截面上只有 τ ，没有正应力 σ 且垂直于半径。

§ 3.4 圆轴扭转时的应力

3. 几何关系

取微段:

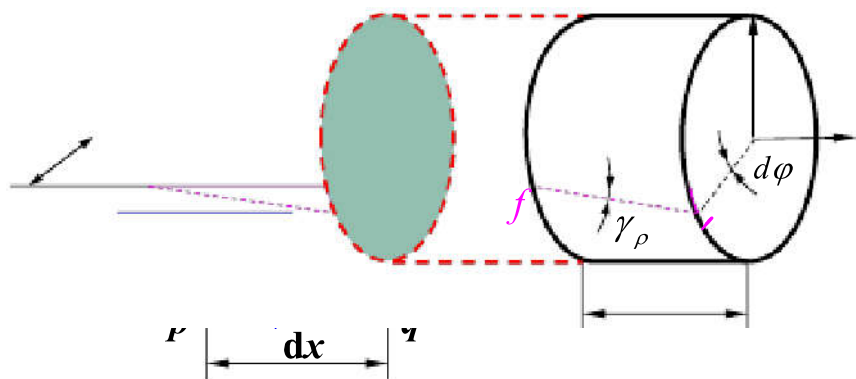
$$\overline{ee'} = \rho d\varphi = \gamma_\rho dx$$

$$\gamma_\rho = \frac{\rho d\varphi}{dx}$$

材料、截面、外力

$$\frac{d\varphi}{dx} = C \quad \text{单位长度相对扭转角}$$

$$\therefore \gamma_\rho \propto \rho$$



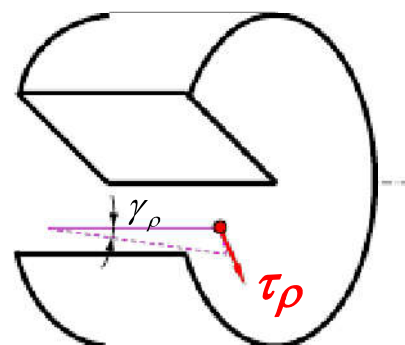
§ 3.4 圆轴扭转时的应力

二、物理关系

由剪切胡克定律:

$$\tau_{\rho} = G\gamma_{\rho} = G\rho\frac{d\varphi}{dx} \quad (3)$$

$$\gamma_{\rho} = \frac{\rho d\varphi}{dx}$$



横截面上的切应力:

(1) 线性分布

当 $\rho=0$, 在圆心, $\tau_{\rho}=0$

当 $\rho=R$, 在圆周, $\tau_{\rho} \rightarrow \tau_{\max}$

(2) 垂直于半径

b τ_{\max}

§ 3.4 圆轴扭转时的应力

三、静力关系

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$T = \int_A \rho \cdot \tau_\rho dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA \quad (4)$$

令: $I_p = \int_A \rho^2 dA$ 横截面对圆心的极惯性矩

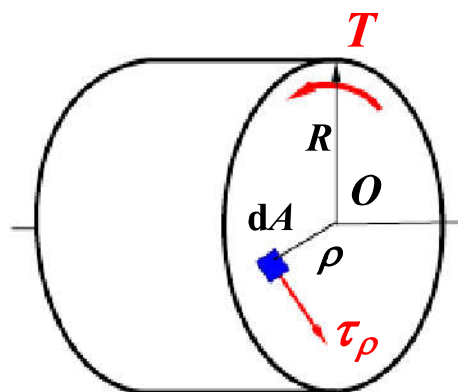
$$\text{得: } T = G \frac{d\varphi}{dx} I_p \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

代入物理关系式 (3) 中:

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx} = G\rho \frac{T}{GI_p}$$



$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p} \quad (5)$$



§ 3.4 圆轴扭转时的应力

讨论:

(1) 适用于等直圆杆 (实心、空心)。

(2) 对于小锥度杆近似可用。

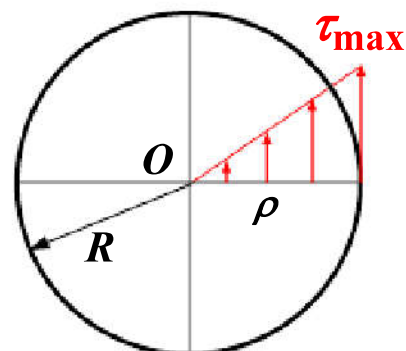
(3) 当 $\rho=R$ 时, 最大切应力:

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{I_p} \quad (6)$$

令: $W_t = \frac{I_p}{R}$ 抗扭截面系数

得:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \quad (7)$$



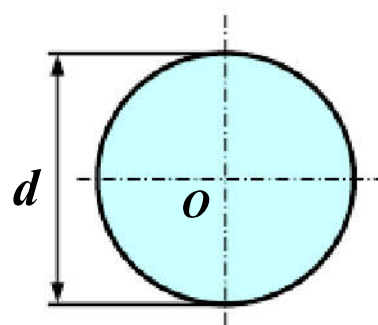
§ 3.4 圆轴扭转时的应力

四、常用截面的极惯性矩和抗扭截面系数

(1) 实心圆截面

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32}$$

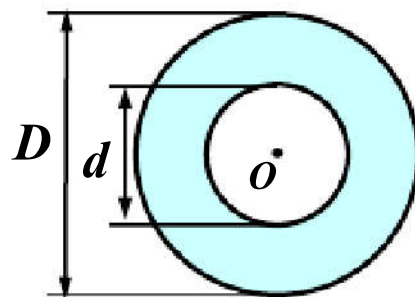
$$W_t = \frac{I_P}{d/2} = \frac{\pi d^4 / 32}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$$



(2) 空心圆截面

$$I_P = \frac{\pi D^4 (1 - \alpha^4)}{32} \quad \text{其中: } \alpha = \frac{d}{D}$$

$$W_t = \frac{I_P}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$



§ 3.4 圆轴扭转时的应力

五、强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$$

强度校核:

$$\frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$$

设计截面:

$$W_t \geq \frac{T_{\max}}{[\tau]}$$

许可载荷:

$$T_{\max} \leq W_t [\tau]$$



低碳钢扭转破坏



铸铁扭转破坏

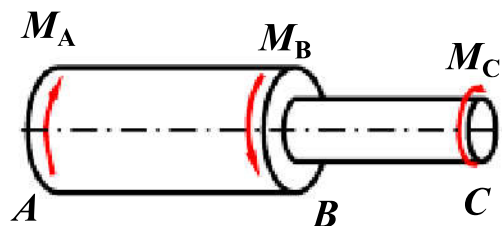
例3-1

图示阶梯圆轴， AB 段直径 $d_1=120\text{mm}$ ， BC 段 $d_2=100\text{mm}$ 。扭转力偶矩 $M_A=22\text{ kN}\cdot\text{m}$ ， $M_B=36\text{ kN}\cdot\text{m}$ ， $M_C=14\text{ kN}\cdot\text{m}$ 。材料的 $[\tau]=80\text{MPa}$ ，试校核该轴的强度。

解：（1）作轴的扭矩图

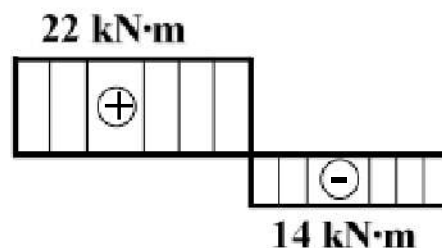
$$AB\text{段: } T_1 = 22\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$BC\text{段: } T_2 = -14\text{kN}\cdot\text{m}$$



（2） AB 段：

$$\tau_{1\max} = \frac{T_1}{W_{t1}} = \frac{22 \times 10^6}{\pi \times 120^3 / 16} = 64.84\text{MPa} < [\tau]$$



BC 段：

$$\tau_{2\max} = \frac{T_2}{W_{t2}} = \frac{14 \times 10^6}{\pi \times 100^3 / 16} = 71.3\text{MPa} < [\tau]$$

∴ 该轴满足强度要求。

由无缝钢管制成的汽车传动轴,外径 $D=90\text{mm}$,壁厚 $t=2.5\text{mm}$,材料45钢,使用时 $T_{\max}=1.5\text{KN}\cdot\text{m}$, $[\tau]=60\text{MPa}$,校核轴的扭转强度。

解: $\alpha =$

$$W_t =$$

$\phi 90$

$$\therefore \tau_{\max} =$$

满足强度

若将上题传动轴改为实心轴，要求与原来的空心轴强度相等，试确定其直径。并比较两者的重量。

解：∵两者的强度相同

$$\therefore \text{实心轴: } \tau_{\max} = 51 \text{MPa}$$

$\phi 90$

$$\therefore \tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{1.5 \times 10^3}{\frac{1}{16} \pi D_1^3} = 51 \text{MPa}$$

$$D_1 = 0.0531 \text{m}$$

$$\frac{G_{\text{空}}}{G_{\text{实}}} = \frac{A_{\text{空}}}{A_{\text{实}}} = \frac{\pi(D^2 - d^2)/4}{\pi D_1^2/4} = 0.31$$

在载荷、强度相同的情况下，空心轴重量轻，节省材料

§ 3.5 圆轴扭转时的变形

一、扭转变形

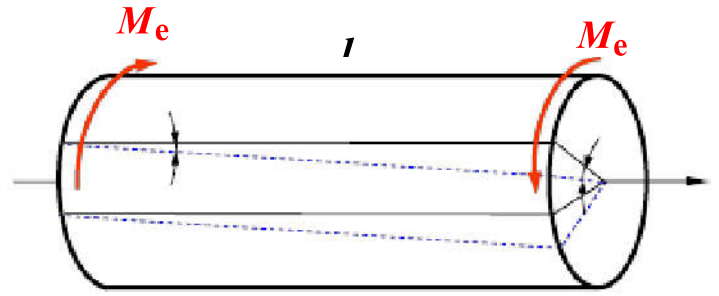
圆轴扭转时的

转角 φ 来度量

$$\frac{d\varphi}{dx}$$

其中 $d\varphi$ 代表
截面间的相对

$$d\varphi = \frac{M_e}{GI_p} dx$$



长为 l 的杆两端面间的相对扭转
角：

$$\varphi = \int_l d\varphi = \int_l \frac{M_e}{GI_p} dx$$

§ 3.5 圆轴扭转时的变形

$$\varphi = \int_l d\varphi = \int_l \frac{T}{GI_p} dx$$

讨论:

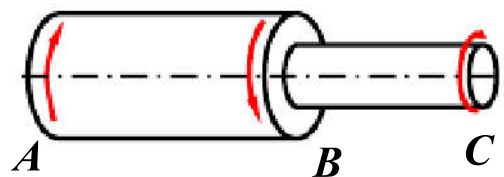
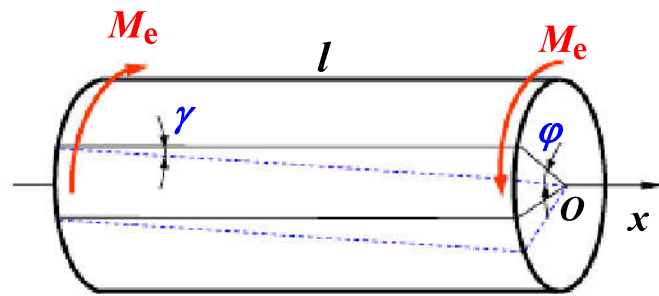
(1) 等直杆:

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \quad \text{单位: rad}$$

GI_p 称为圆轴的抗扭刚度

(2) 阶梯轴 $\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i l_i}{GI_{pi}}$

(3) 小锥度杆: $\therefore \varphi = \int_0^l \frac{T(x)}{GI_p(x)} dx$



§ 3.5 圆轴扭转时的变形

2、单位长度扭转角

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \quad (\text{rad/m})$$

若T为常量，且圆轴
横截面不变，则：

$$\varphi' = \frac{T}{GI_p} = \frac{\varphi}{l} \quad (\text{rad/m})$$

3、刚度条件

$$\varphi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\varphi'] \quad (\text{rad/m})$$

工程中用 $(^\circ)/\text{m}$ 作为 $[\varphi']$ 的单位，则

$$\varphi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \leq [\varphi'] \quad \text{单位：}(^\circ)/\text{m}$$

$[\varphi']$ 称为许可单位长度扭转角

例3-3

传动轴的转速为 $n=500\text{r/min}$ ，输入功率为 $P_A=368\text{kW}$ ，输出功率 $P_B=147\text{kW}$ 、 $P_C=221\text{kW}$ ，材料的 $G=80\text{GPa}$ ， $[\tau]=70\text{MPa}$ ， $[\theta]=1^\circ/\text{m}$ 。试设计轴的直径 d 。

解： 1. 计算外扭矩

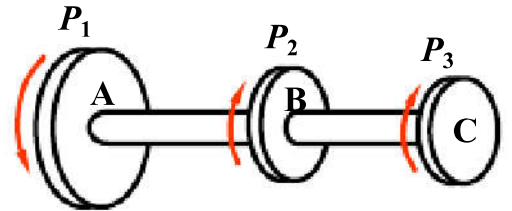
$$M_{eA} = 9549 \times \frac{368}{500} = 7047 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{eB} = 9549 \times \frac{147}{500} = 2810 \text{ N} \cdot \text{m}$$

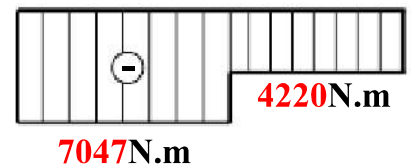
$$M_{eC} = 9549 \times \frac{221}{500} = 4220 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. 作扭矩图，确定危险截面

$$|T|_{\max} = 7047 \text{ N} \cdot \text{m}$$



T



例3-3

$$|T|_{\max} = 7047 \text{ N} \cdot \text{m}$$

3. 按强度条件求 d

$$\text{由 } \tau_{\max} = \frac{|T|_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$$

$$\text{和 } W_p = \frac{\pi d^3}{16} \quad \text{得到}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16|T|_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 7047}{\pi \times 40 \times 10^6}}$$
$$= 27.2 \text{ mm}$$

4. 按刚度条件求 d

$$\text{由 } \theta_{\max} = \frac{|T|_{\max}}{GI_p} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\theta]$$

$$\text{和 } I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad \text{得到}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32|T|_{\max} \times 180}{G\pi^2[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 7047 \times 180}{80 \times 10^9 \times \pi^2 \times 1.5}}$$
$$= 29.7 \text{ mm}$$

\therefore 取 $d = 29.7 \text{ mm}$ 。

结论: 此轴的直径是由刚度条件控制的

§ 4.6 圆柱形密圈螺旋形弹簧应力和变形

一、弹簧丝横截面上的应力

假设:

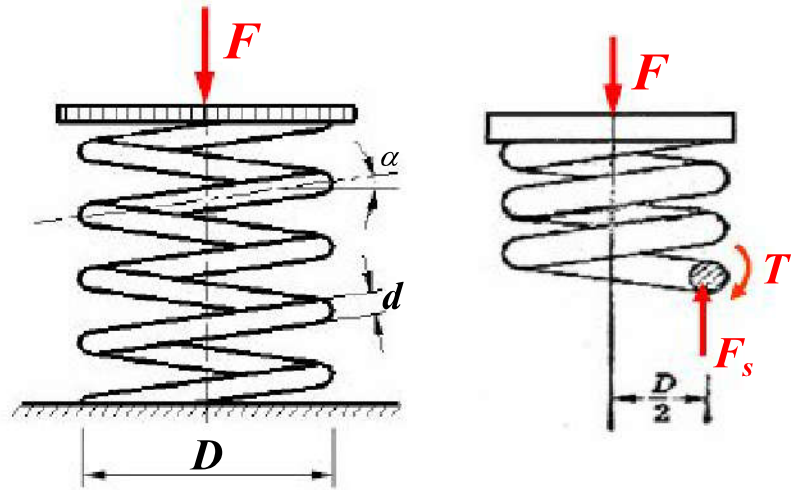
(1) 当螺旋角 $\alpha < 5^\circ$ 时, 近似认为簧丝横截面与弹簧轴线共面。

(2) 当 $D > 10d$, 忽略簧丝曲率影响, 近似用直杆公式计算。

1. 内力的计算

$$\sum Y = 0 \quad F_s = F$$

$$\sum M_o = 0 \quad T = F \frac{D}{2}$$



§ 4.6 圆柱形密圈螺旋形弹簧应力和变形

2、应力计算

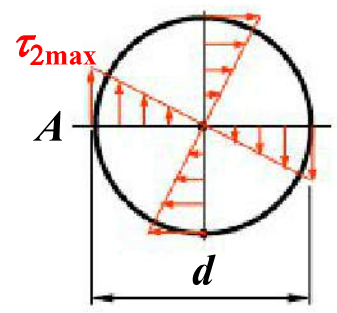
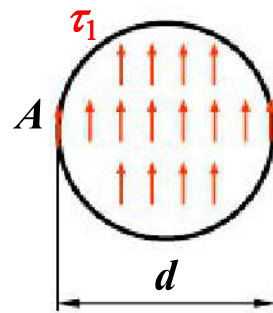
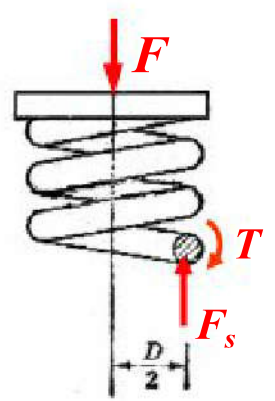
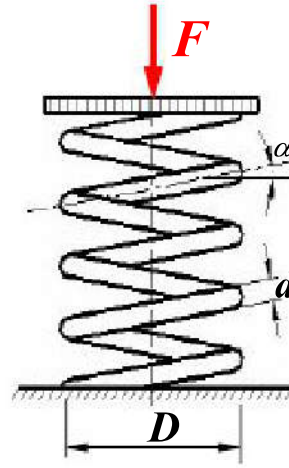
$$\tau_1 = \frac{F_s}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} \quad \tau_{2\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{8FD}{\pi d^3}$$

在A总应力大最大，即**弹簧内**
侧剪应力最大

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_{2\max} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8FD}{\pi d^3}$$

$$= \frac{8FD}{\pi d^3} \left(\frac{d}{2D} + 1 \right)$$

$$\text{当 } \frac{D}{d} \geq 10 \text{ 时 } \quad \tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3}$$



§ 4.6 圆柱形密圈螺旋形弹簧应力和变形

3、修正公式:

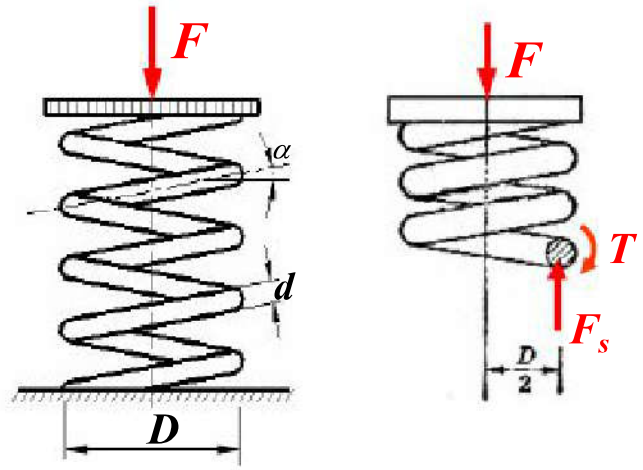
$$\tau_{\max} = k \frac{8FD}{\pi d^3}$$

$$c = \frac{D}{d} \quad k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c}$$

c: 弹簧指数, k: 曲度系数

公式修正的原因:

- (1) 当 D/d 较小, 会引起很大的误差;
- (2) 假定剪切引起的切应力是均匀分布的.



4、强度条件

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

§ 4.6 圆柱形密圈螺旋形弹簧应力和变形

二、弹簧的变形

1、外力功 $W = \frac{1}{2} F \lambda$

2、变形能 $\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{16FD\rho}{\pi d^4}$

$$\therefore v_\varepsilon = \frac{\tau_\rho^2}{2G} = \frac{128F^2 D^2 \rho^2}{G\pi^2 d^8}$$

$$V = \int_V v_\varepsilon dV = \frac{4F^2 D^3 n}{Gd^4}$$

3、由 $V=W$ ，得：

$$\frac{1}{2} F \lambda = \frac{4F^2 D^3 n}{Gd^4} \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} = \frac{64FR^3 n}{Gd^4}$$

n : 弹簧的有效圈数

