6.6 衍射光栅

— Gratings

对入射光的振幅和/或相位进行周期性空间调制的器件

Any arrangement which imposes on an incident wave a periodic variation of amplitude or phase , or both.

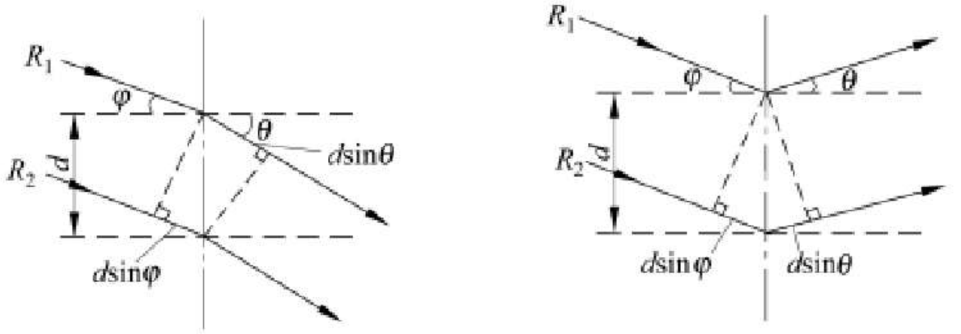
工作方式 $\begin{cases} \text{透射型} \\ \text{反射型} \end{cases}$

6.6.1光栅的分光性能

1. 光栅方程

多缝衍射干涉主极大条件

$$d\sin\theta = m\lambda$$



(a) 入射光与衍射光在光栅法线异侧　(b) 入射光与衍射光在光栅法线同侧

斜入射衍射极大条件 ----光栅方程

$$d(\sin\varphi \pm \sin\theta) = m\lambda \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \cdots \qquad \textbf{(6-53)}$$

衍射光与入射光同侧取正, 异侧取负号

d 为缝间距，称为光栅常数， φ 为入射角， θ 为衍射角

2. 性能参数

(A) 色散

(1) 角色散 $d\theta / d\lambda$

定义： 单位波长差 $(1\overset{0}{\mathrm{A}} = 10^{-10}\,\mathrm{m})$ 的两条谱线分开的角距离

公式： 由光栅方程 $d(\sin\varphi \pm \sin\theta) = m\lambda$

取微分并取绝对值

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta} \tag{6-54}$$

级次 ***m*** 越高，光栅常数 ***d*** 越小，色散能力越强。

(2) 线色散 $dl/d\lambda$

定义：在聚焦物镜的焦面上单位波长差 $(1\overset{0}{\mathrm{A}}=10^{-10}\,\mathrm{m})$ 的两条谱线分开的距离.

公式：

$$\frac{dl}{d\lambda}=f\frac{d\theta}{d\lambda}=f\frac{m}{d\cos\theta} \tag{6-55}$$

(B) 分辨本领

(1) 概念

分辨本领是表征分辨开两条波长相差很小的谱线的能力。

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \qquad (6\text{-}56)$$

$\delta\lambda$ —— 光栅所能分辨的最小波长差

(2) 公式

瑞利标准

$\lambda+\delta\lambda$ 的第 m级主极大正好落在 λ 的第 m级主极大旁的第一极小值处，则认为这两条谱线恰好可以分开。

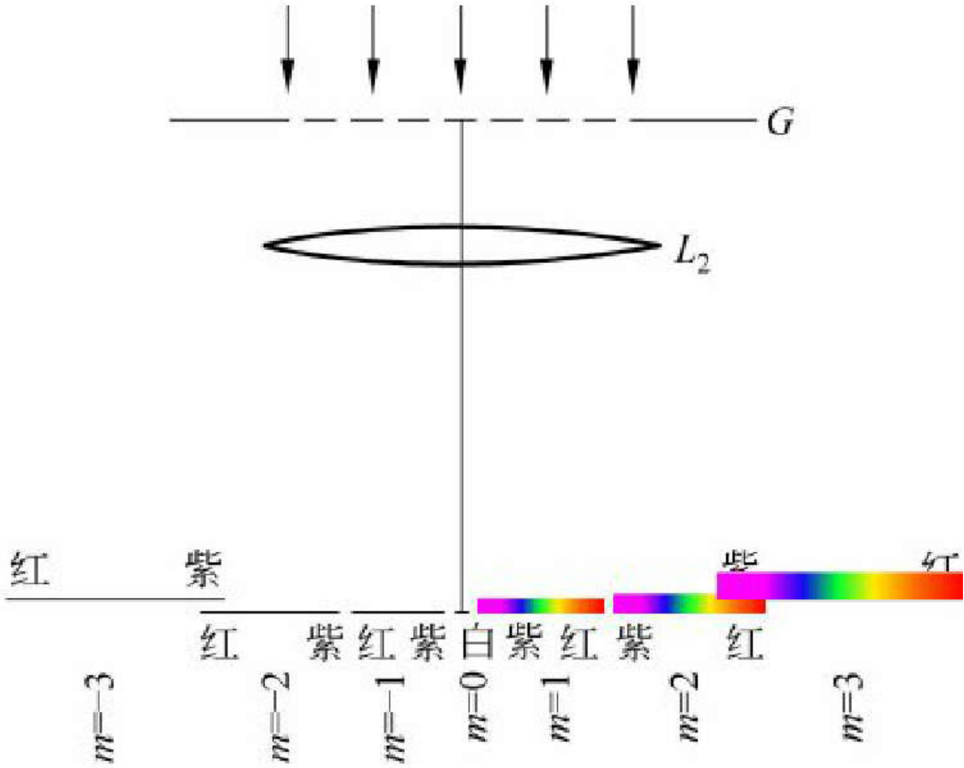
$$d\sin\theta=\left(m+\frac{1}{N}\right)\lambda=m(\lambda+\delta\lambda) \Longrightarrow \delta\lambda=\frac{\lambda}{mN}$$

$$\Longrightarrow A=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=mN$$

(C) 自由光谱范围

概念：

相邻级次的光谱不发生重叠的波长范围。



公式：

$$m(\lambda+\Delta\lambda) = (m+1)\lambda$$

$$\Delta\lambda = \lambda/m \qquad \text{(6-57)}$$

3. 与 F-P 腔比较

	F--P	光栅
色散	$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{\text{ctg}\,\theta}{\lambda}$	$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$
自由光谱范围	$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$	$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$
分辨本领	$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$	$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$

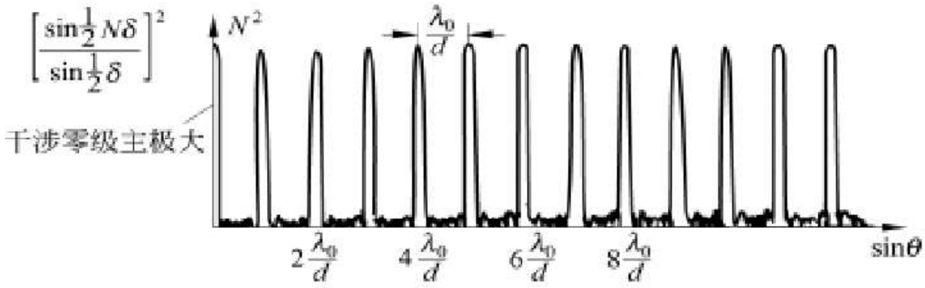
6.6.2 闪耀光栅 —Blazed gratings

1.普通平面光栅的矛盾

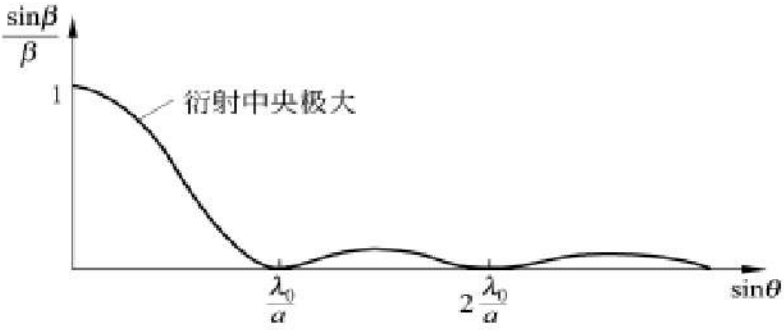
(A). 衍射零级和干涉零级的空间位置重合

—— 零级集中了绝大部分入射光能，但无色散能力，色散能力较强的高级次条纹强度极弱。

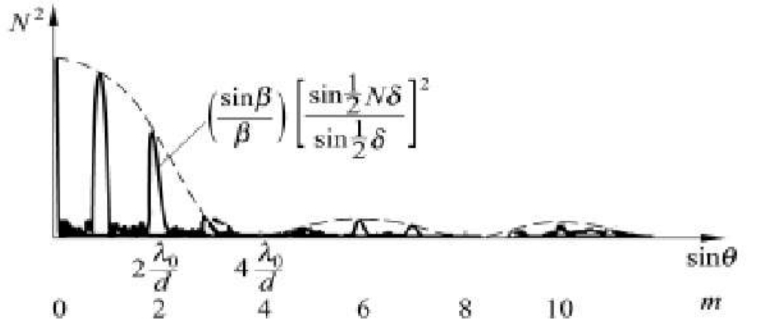
(B). $d \gg a$ ，可能存在多级干涉主极大，分散光能。



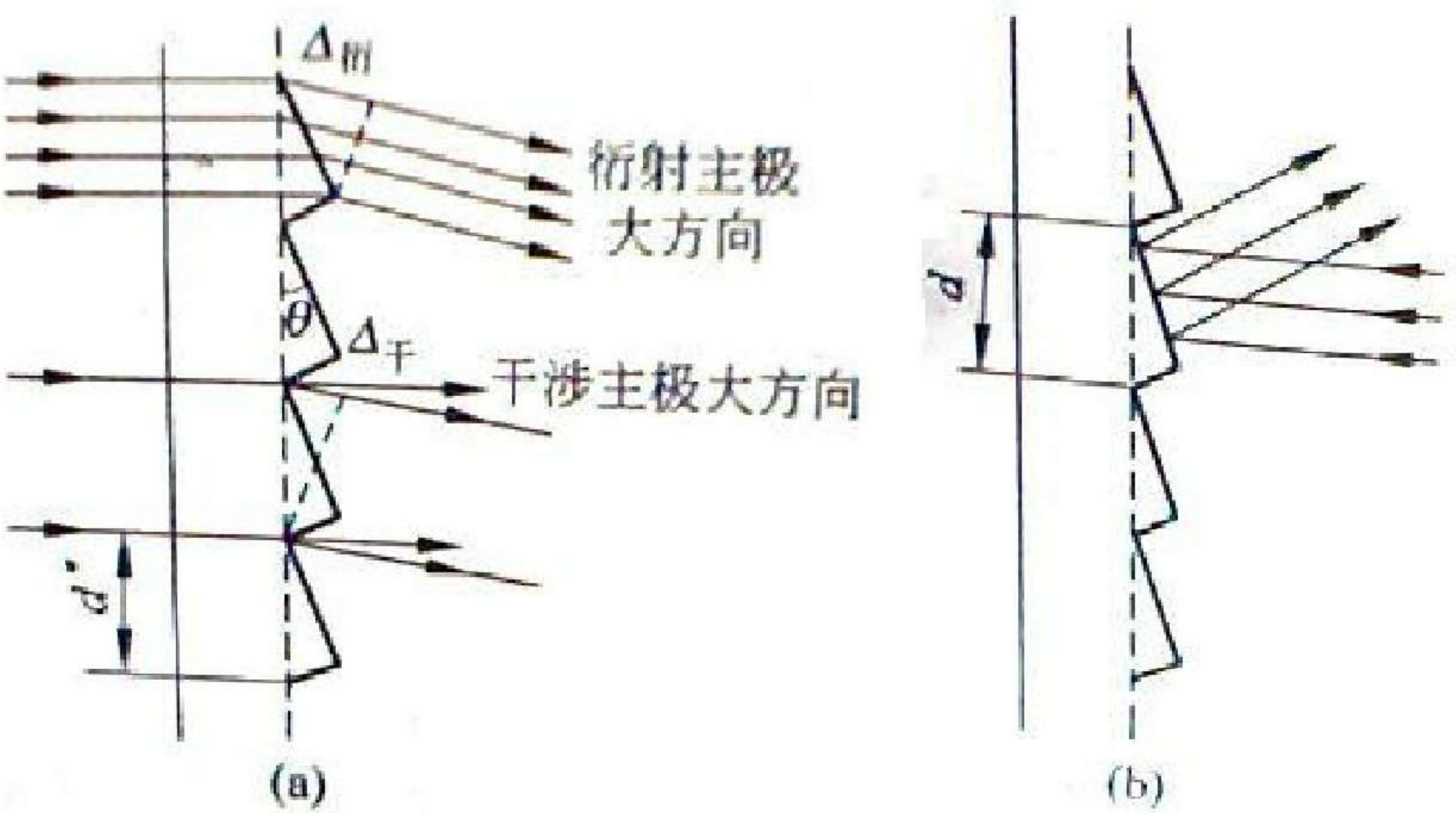
(a) 6缝的干涉因子



(b) 单缝的衍射因子

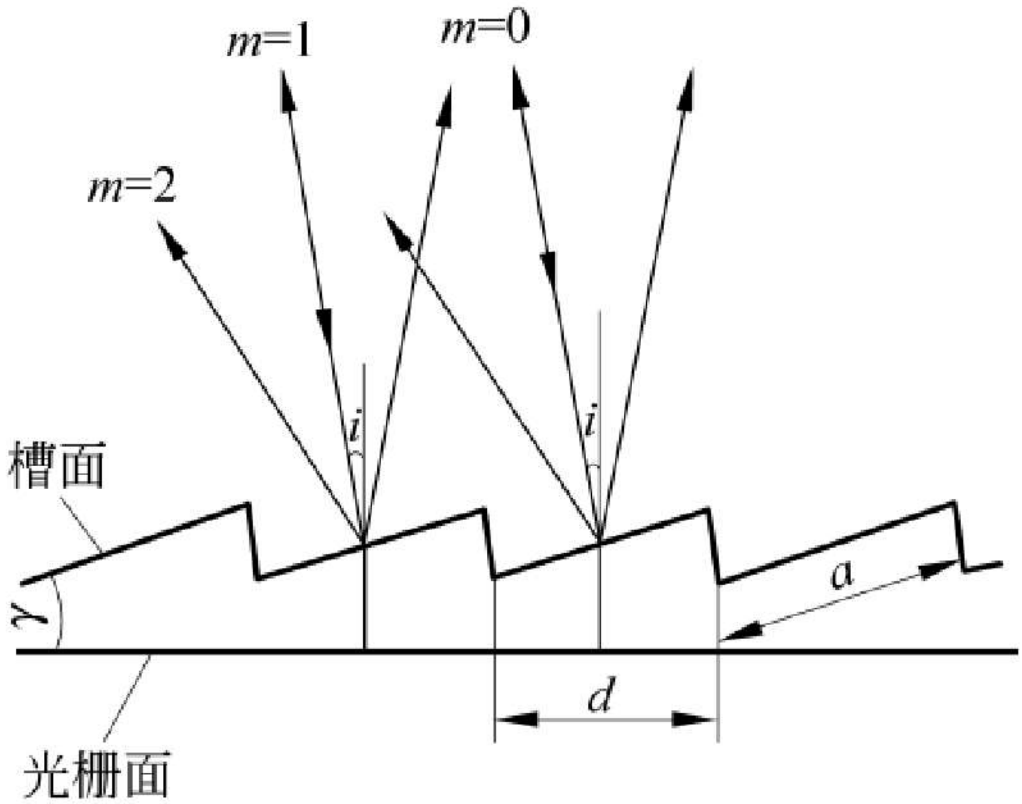


2. 闪耀光栅结构

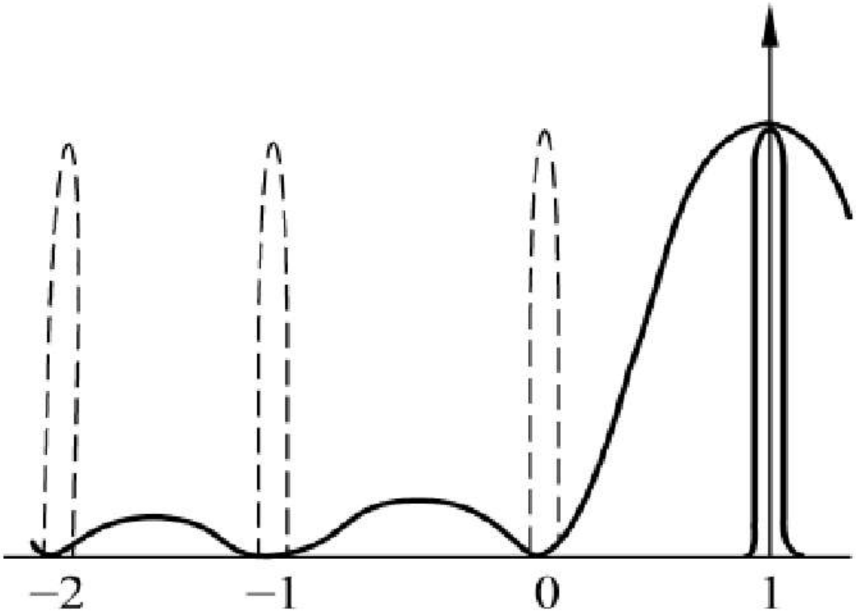


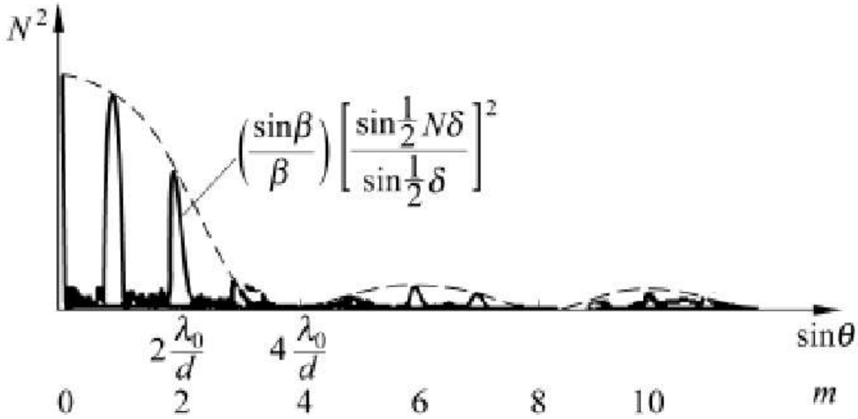
(*A*). 闪耀角γ

干涉零级主极大与衍射零级空间位置分开



(B) $a \sim d$，一衍射级内只有约一级干涉主极大，其它级次光谱都几乎和单个刻槽面衍射的极小位置重合，光谱强度很小，故入射光能主要都集中在落于衍射主极大内的这级干涉主极大内.





3. 主闪耀条件

* 闪耀极大条件 $2d\sin\gamma\cos\alpha = m\lambda$ α 为入射光与光栅面法线夹角

* 垂直槽面入射

$$2d\sin\gamma = m\lambda_m \tag{6-59}$$

λ_m ------闪耀波长

* 主闪耀条件(*m*=1)

$$\lambda_b = 2d\sin\gamma \tag{6-60}$$

m=1 时的闪耀波长称为主闪耀波长。

* 一般光栅给出的闪耀波长 λ_b 都是指一级（主）闪耀波长；但对 $\lambda_b/2$、$\lambda_b/3\cdots$ 也呈现“闪耀”

6.7 菲涅耳衍射

Fresnel diffraction

* 条件　　在菲涅耳近似成立的距离范围内的衍射

* 处理方法　比较简单,物理概念很清晰的近似方法

---菲涅耳波带法(代数加法)或振幅矢量加法 (图解法)。

夫琅和费近似

$$r = z_1\left\{1+\left[(x-x_1)/z_1\right]^2+\left[(y-x_1)/z_1\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$z \gg (x_1^2+y_1^2)/\lambda$$

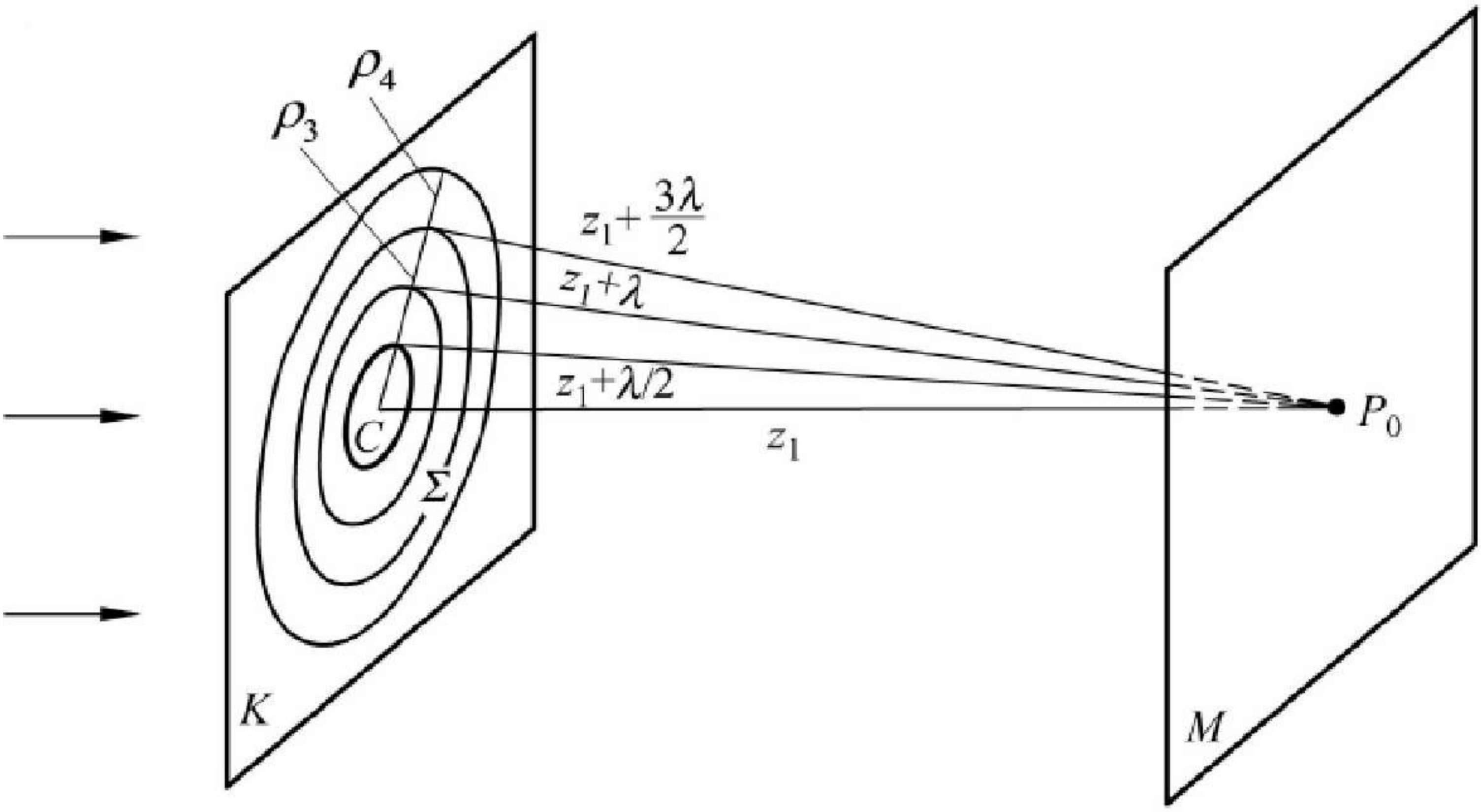
$$\approx z_1\{1+\frac{1}{2}[\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{z_1^2}]\}$$

菲涅耳近似

$$= z_1+\frac{x^2+y^2}{2z_1}-\frac{xx_1+yy_1}{z_1}+\frac{x_1^2+y_1^2}{2z_1}$$

6.7.1.菲涅耳波带法及圆孔、圆屏衍射

1. 菲涅耳波带法



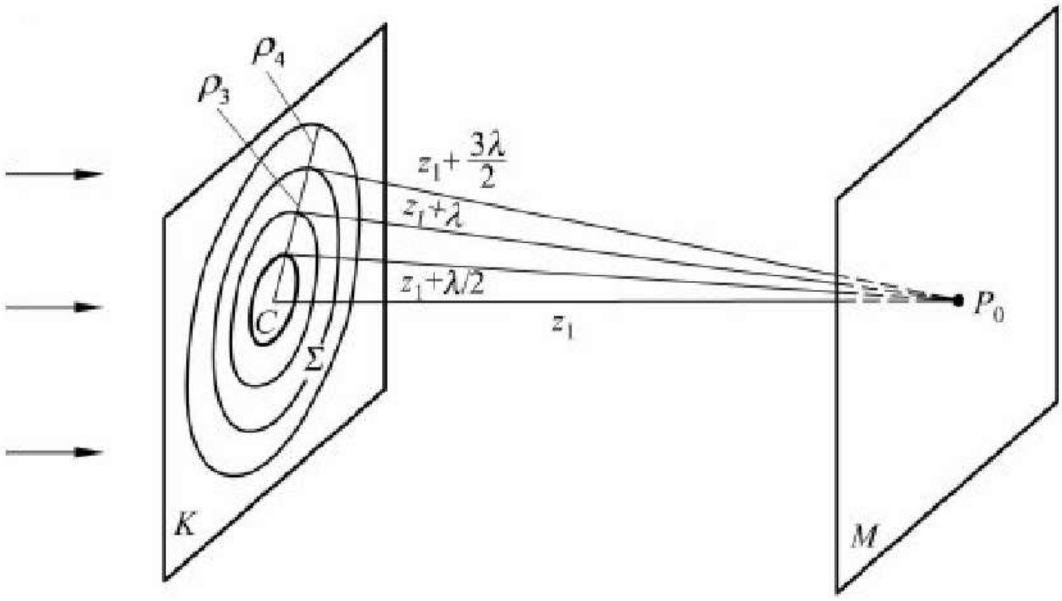
(A) 菲涅耳半波带

$$r_1 = z_1 + \lambda/2$$

$$r_2 = z_1 + 2\lambda/2$$

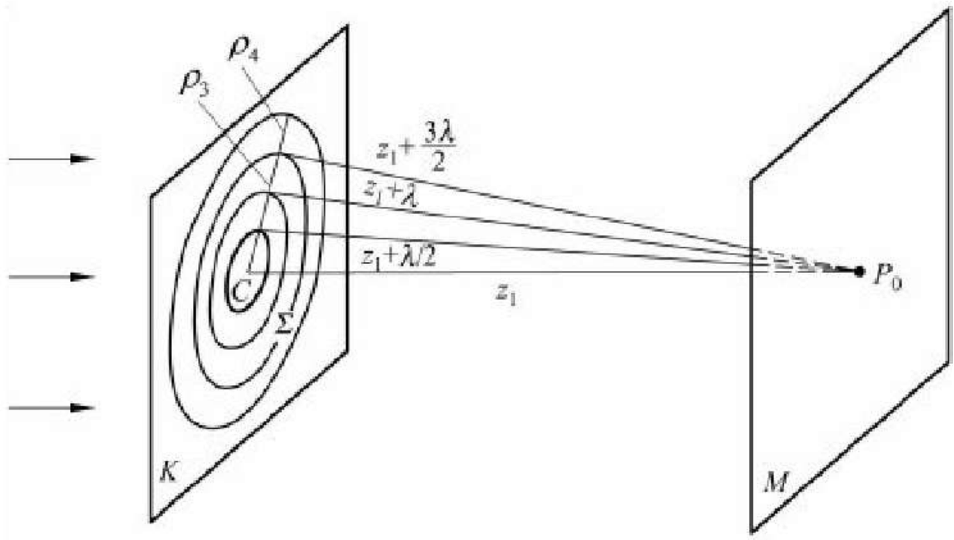
……

$$r_N = z_1 + N\lambda/2$$



以P_0为中心，以r_1、$r_2, \cdots, r_N$为半径，在波面 Σ 上作圆，把波面 Σ 分成 N 个环带，相邻两个环带上相应点到P_0的光程差为半个波长，这样的环带就称为菲涅耳半波带。

第 j 个波带在 P_0 点产生的振幅



$|\tilde{I}$

(6-60)

C 是比例常数， r_j 是第 j 带到P_0点距离，

A_j 是第 j 波带的面积 ，即波面上半径分别为 ρ_j 和 $\rho_{j\text{-}1}$ 的两个圆的面积之差

(1) 半波带面积

$$\rho_j = \left[\left(z_1 + j\frac{\lambda}{2}\right)^2 - z_1^2\right]^{1/2} = \sqrt{jz_1\lambda}\left[1 + \frac{j\lambda}{4z_1}\right]^{1/2} \quad (6\text{-}65)$$

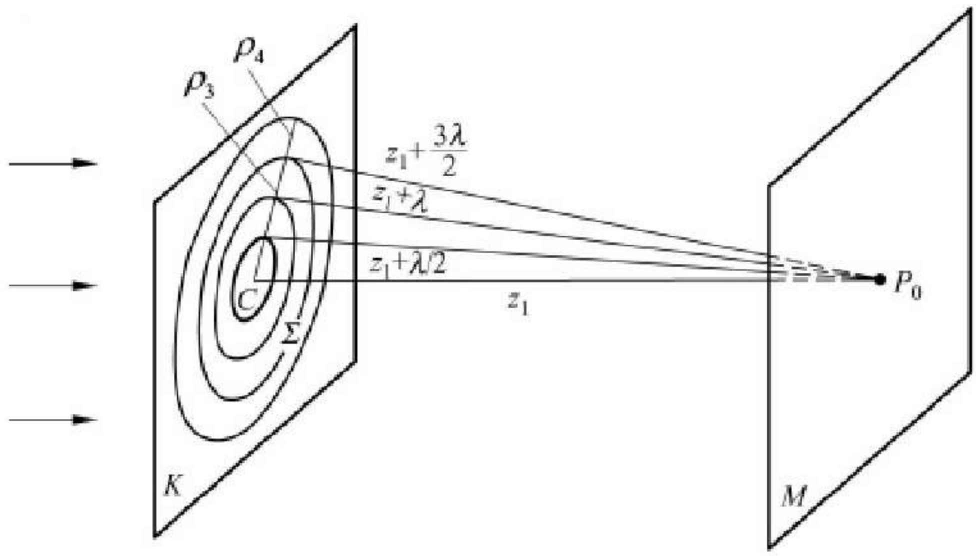
$z_1 >> \lambda$ 时，

$\rho_j \approx \sqrt{jz_1\lambda} \Rightarrow$

$A_j = \pi\rho_j^2 - \pi\rho_{j-1}^2$

$\approx \pi z_1 \lambda$ （6-67）

各波带面积近似相等



(2) 倾斜因子

$$K_j(\theta)=\frac{1+\cos\theta_j}{2}$$

$j\nearrow, K_j(\theta)$单调减小， 但变化缓慢

设 $z_1=1\ m$ 、$j=4000$ 时.

$K_j(\theta)$也只降2%， 即$K_{4000}(\theta)=0.98K_1(\theta)\cdots$

(3) $(1/r_j)$因子与倾斜因子有类似的变化性质

$\nearrow$ 时 和 单调减小，但变化缓慢

各波带在 P_0 产生的振幅将随 j 增大而单调减小，但变化缓慢, 即

$$|\tilde{E}_1| > |\tilde{E}_2| > |\tilde{E}_3| > \cdots$$

相邻波带的振幅仅相差万分之一左右

$$|\tilde{E}_2| = \frac{|\tilde{E}_1|}{2} + \frac{|\tilde{E}_3|}{2}, \quad |\tilde{E}_4| = \frac{|\tilde{E}_3|}{2} + \frac{|\tilde{E}_5|}{2}, \quad \cdots$$

相

$\tilde{E}$

=

$$\tilde{E} = \begin{cases} \dfrac{|\tilde{E}_1|}{2} + \dfrac{|\tilde{E}_n|}{2} & n\text{ 为奇数} \\ \dfrac{|\tilde{E}_1|}{2} - \dfrac{|\tilde{E}_n|}{2} & n\text{为偶数} \end{cases} \qquad (6\text{-}69)$$

讨论

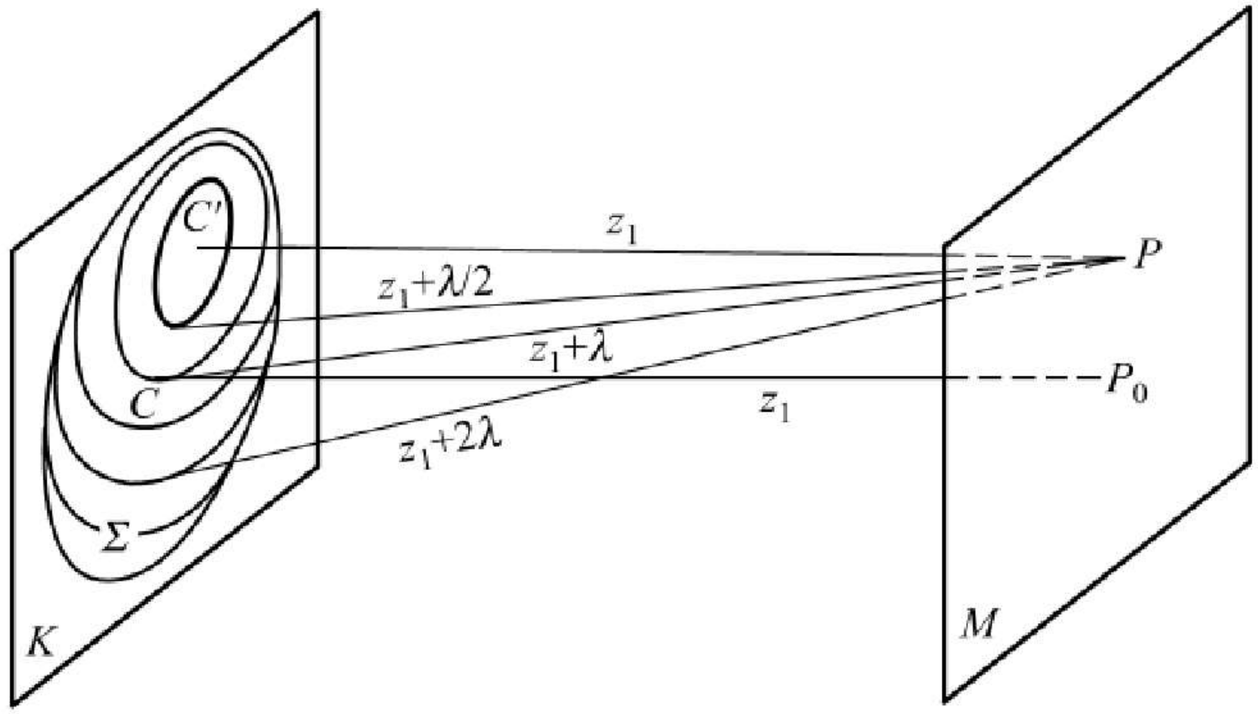
$$\tilde{E}=\begin{cases}\dfrac{|\tilde{E}_1|}{2}+\dfrac{|\tilde{E}_n|}{2} & n\text{ 为奇数}\\[2ex] \dfrac{|\tilde{E}_1|}{2}-\dfrac{|\tilde{E}_n|}{2} & n\text{为偶数}\end{cases}\qquad(6\text{-}69)$$

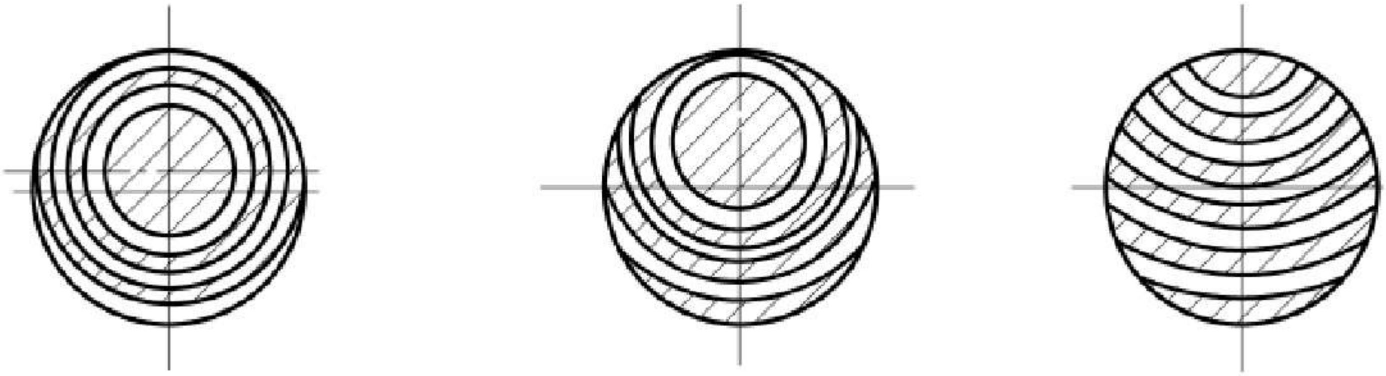
* 若逐渐开大或缩小圆孔，在 P_0点将明暗交替变化

* 观察屏沿光轴 CP_0平移，在 P_0点将明暗交替变化

* $n\rightarrow\infty$时， $E_n\rightarrow 0$ 、 $E=E_1/2$

2. 圆孔衍射图样



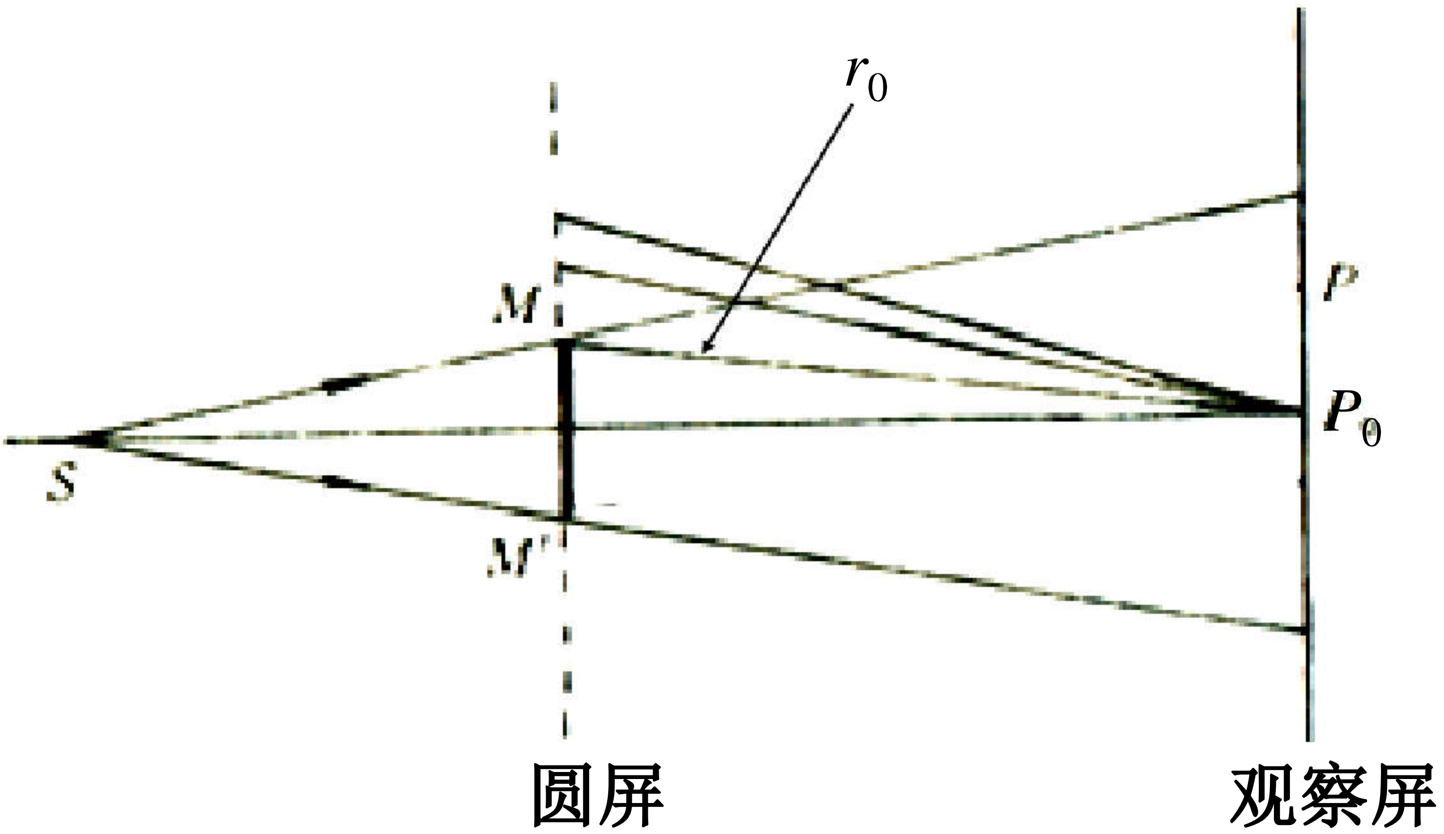


(a) 含 4 个完整半波带　　(b) 含 2 个完整半波带　　(c) 无完整半波带

- *P*点光强不仅取决于波带的数目，也取决于每个波带露出部分的面积

- 衍射图样是一组亮暗交替的同心圆环，中心可能亮也可能暗

3. 圆屏的菲涅耳衍射



衍射图样

P_0点总“亮”不“暗” ----波动理论的强力证据

也采用波带法,但要注意 $\tilde{E}_{n\to\infty}\to 0$

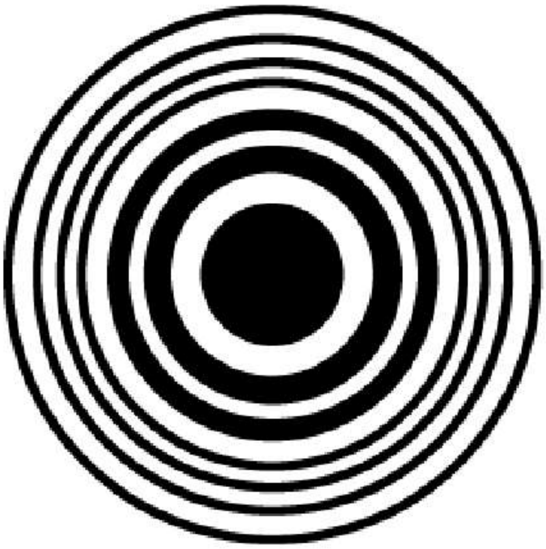
* P_0总“亮”不“暗”,复振幅应为第1波带复振幅的一半，强度为第1波带强度的 1/4。

----波动理论的强力证据

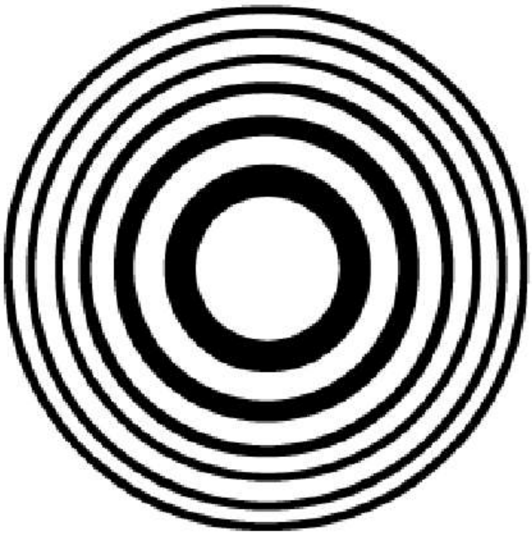
* 中心为亮点，周围有一些亮暗相间的圆环条纹

* 当圆屏较大时，第1波带对P_0点的作用甚微，P_0强度接近于零

6.7.2 菲涅耳波带片

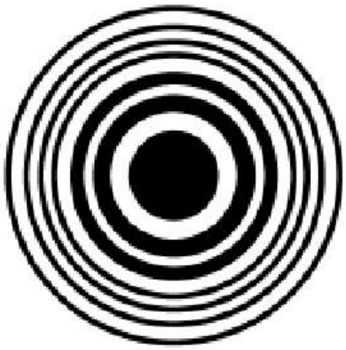


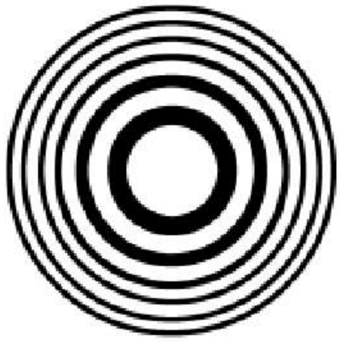
(a) 挡住奇数波带



(b) 挡住偶数波带

1. 原理、结构


(a) 挡住奇数波带


(b) 挡住偶数波带

* 相邻波带相位相反，作用相消

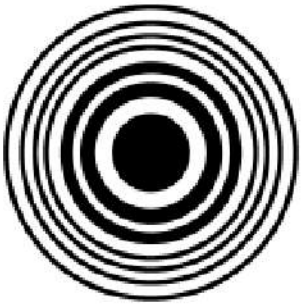
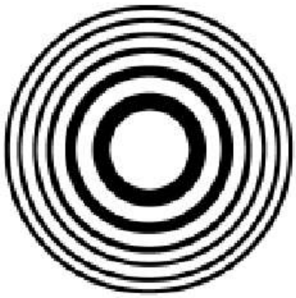
* 使偶(奇)数波带全被阻，奇(偶)数波带全畅通，各通光波带复振幅将同相位叠加，呈现纯相长干涉,P_0的振幅和光强会大大增加

* 设$|\tilde{E}_\infty|$为无光阑时P_0的振幅，10个偶/奇数波带通光

$$|\tilde{E}| = |\tilde{E}_1| + |\tilde{E}_3| + \cdots + |\tilde{E}_{19}| \approx 10|\tilde{E}_1| = 20|\tilde{E}_\infty|$$

$$I \approx (20|\tilde{E}_\infty|)^2 = 400 I_\infty$$ 光强大幅度提高

2. 焦距

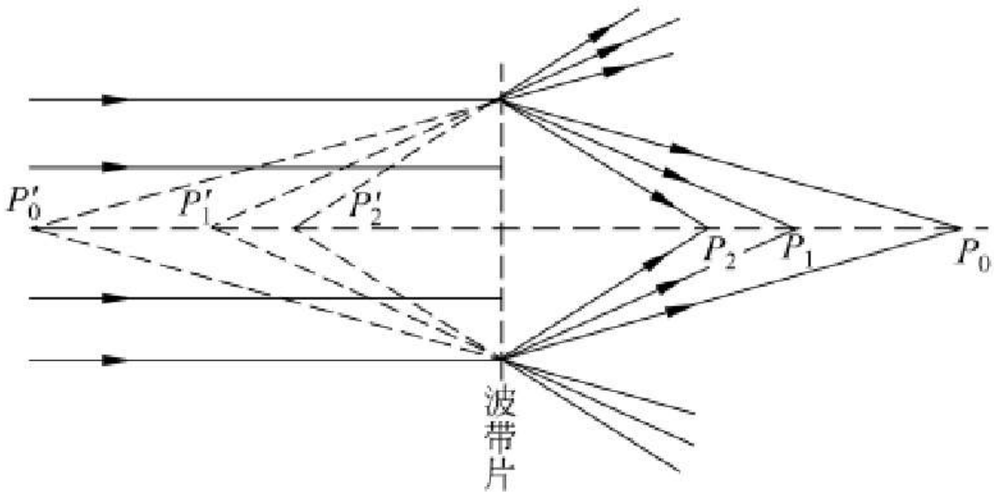



假设波带片是对应距离 z_1 点 P_0 而设计, 当用单色平面波垂直照明波带片时，P_0 将呈现一亮点，与透镜的类似，这亮点称为焦点，而距离 z_1 就是焦距

j 波带的外圆半径 $\rho_j = \sqrt{j z_1 \lambda}$

因此，焦距 $$f = z_1 = \frac{\rho_j^2}{j\lambda} \tag{6-71}$$

3. 特点



(A)存在“焦点” -----与透镜类似

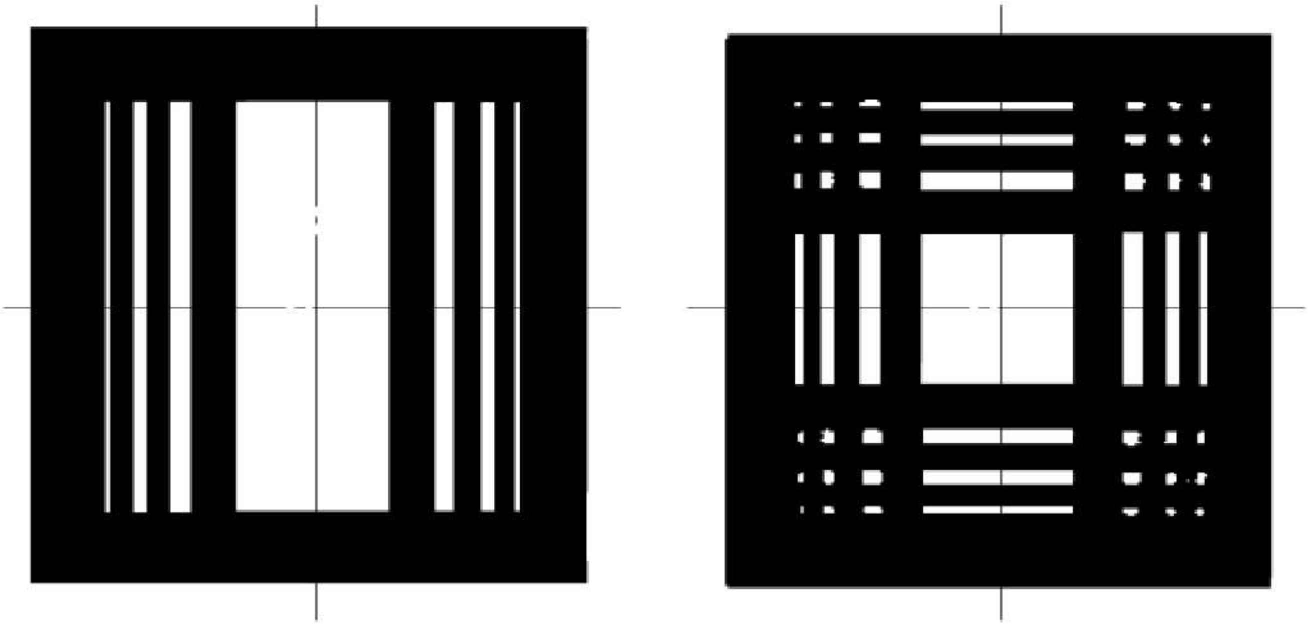
(B)与一般透镜有差别

“焦点”不唯一;“焦距”与波长有关

(C)色差大

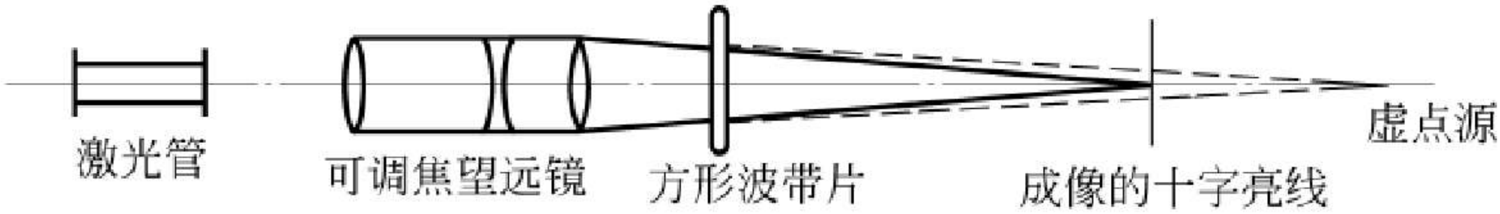
(D) 适应波段范围宽

4. 条/方形波带片



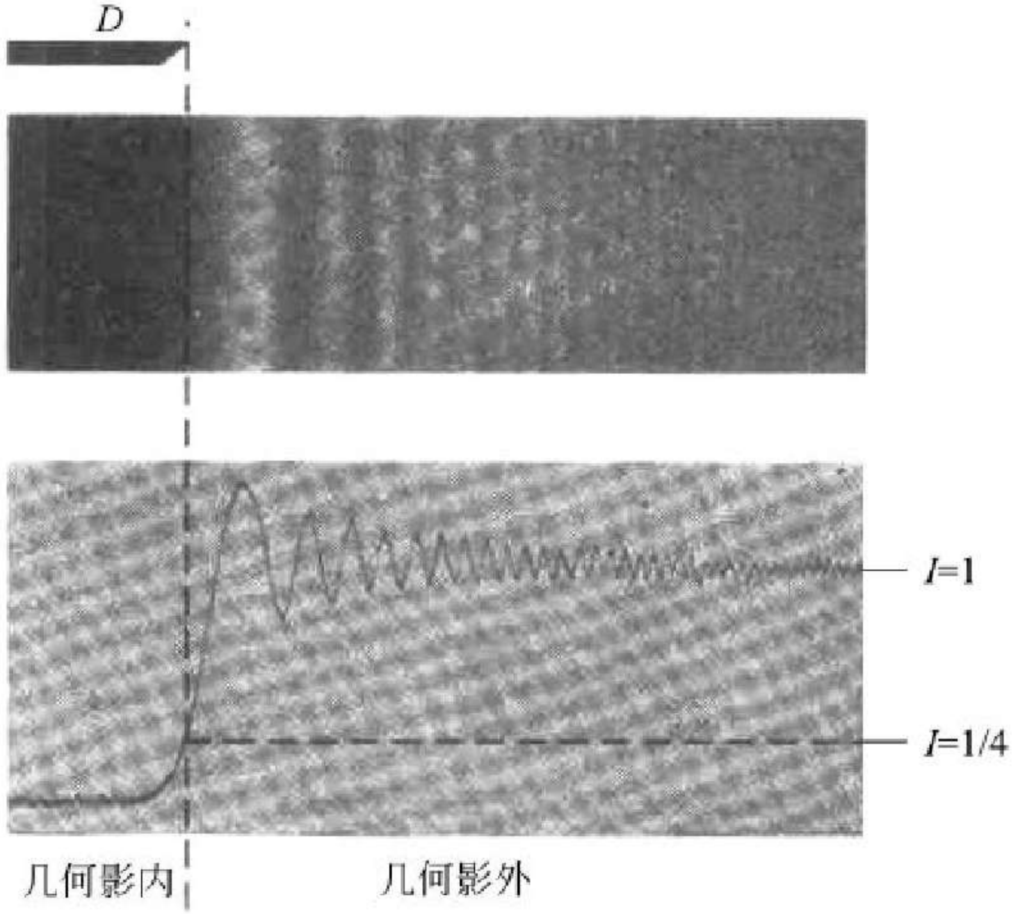
(a) 长条形波带片 (b) 方形波带片

应用

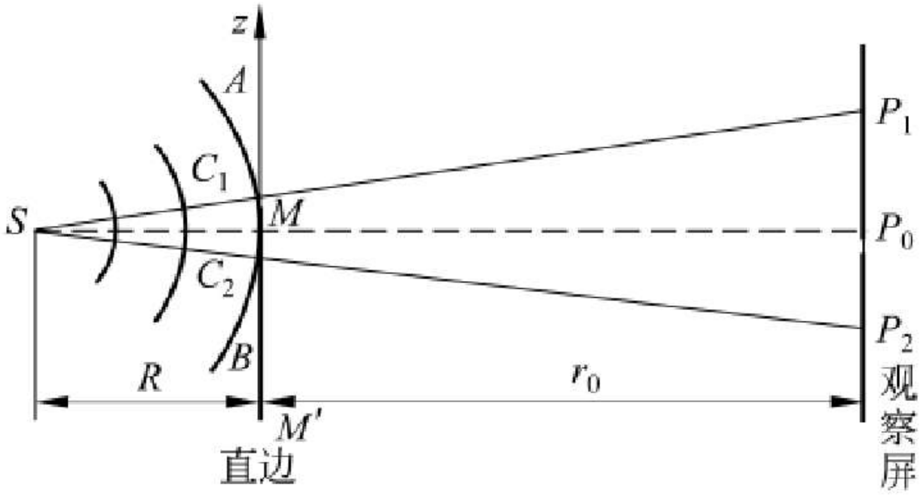


6.7.3 菲涅耳直边衍射

平面或柱面光波通过与其传播方向垂直的不透明直边

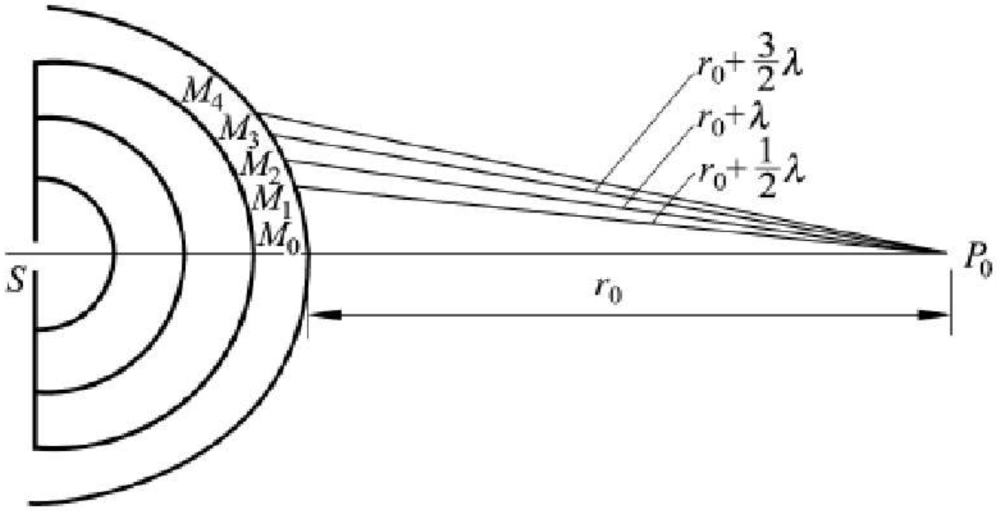


1. 振幅矢量加法

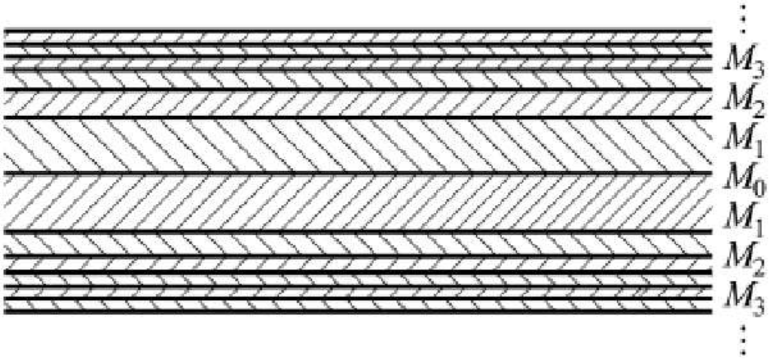


菲涅耳直边衍射

半波带



(a) 波面分解成半波带



(b) 半波带形状

以SM_0P_0为中线，将柱面波的波面分成许多直条状半波带

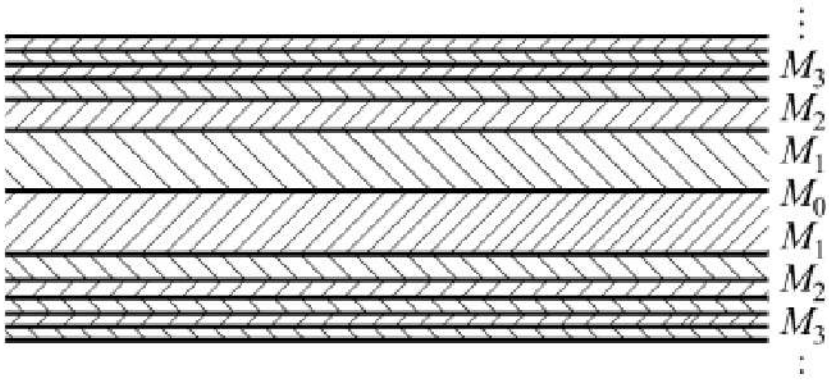
$$P_0M_0 = r_0$$

$$P_0M_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}$$

$$P_0M_2 = r_0 + \frac{2\lambda}{2}$$

$$\vdots$$

波带振幅

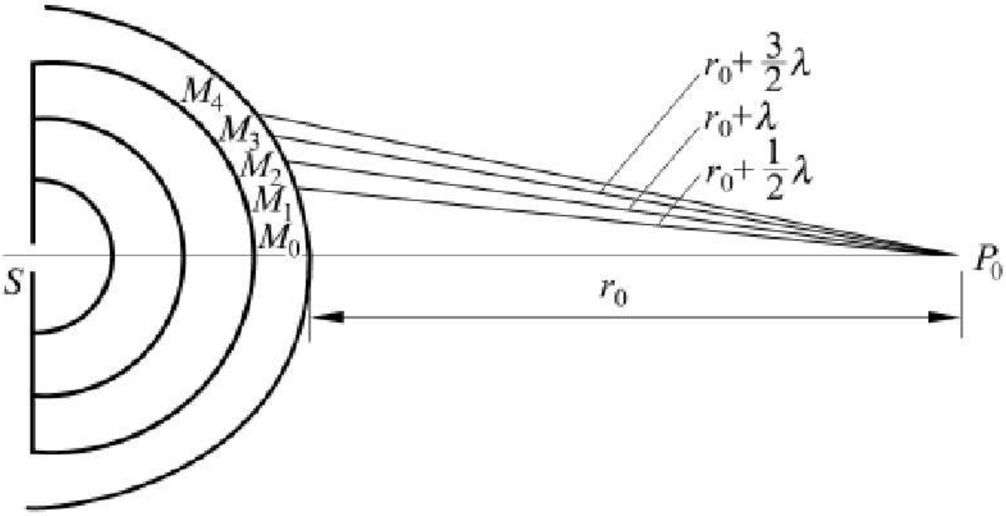


随波带序数增大

面积减小

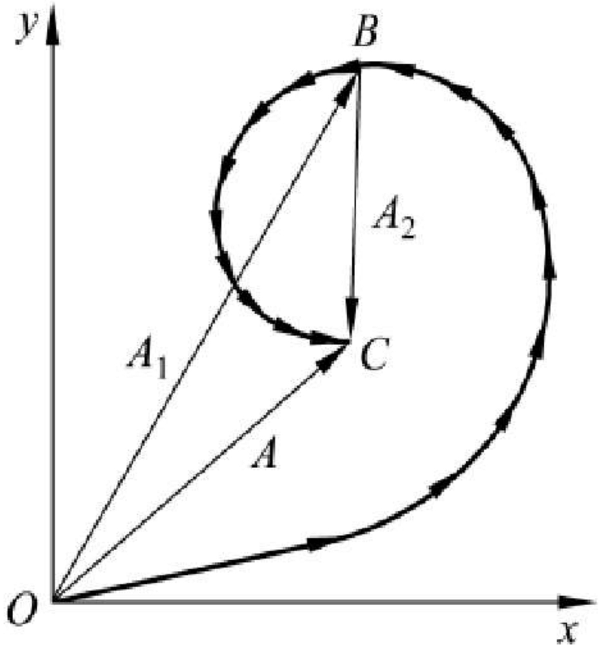
距离增大

倾角加大



振幅迅速下降

波带再分, 矢量叠加



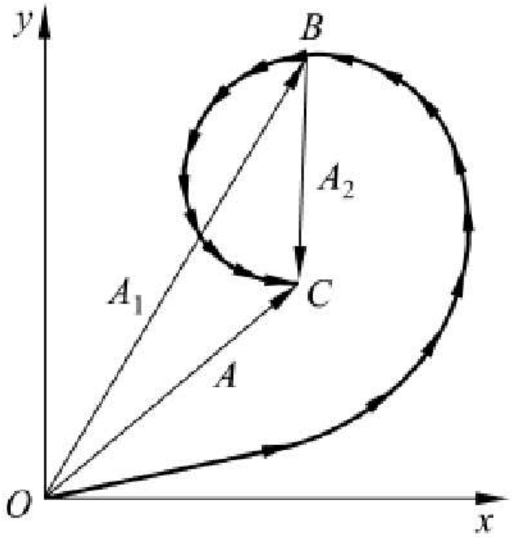
(a) 第一二个半波带的合振幅

按相邻带间相位差相等原则，将第一半波带分成 9 条波带元，将各波带元在 P_0 的场矢量 $\triangle a_1, \triangle a_2, \ldots \triangle a_9$ 矢量叠加法，即得第一半波带在 P_0 的振幅矢量 A_1

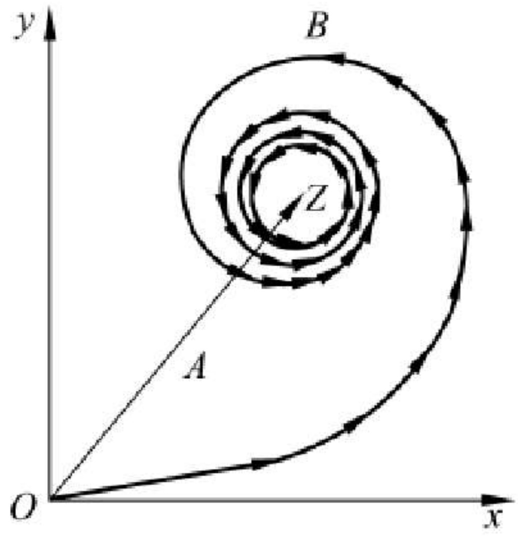
同样可得第二, 三, 四 等半波带在 P_0 的光场矢量

A_2 , A_3 , A_4 .....

无限细分,光滑曲线



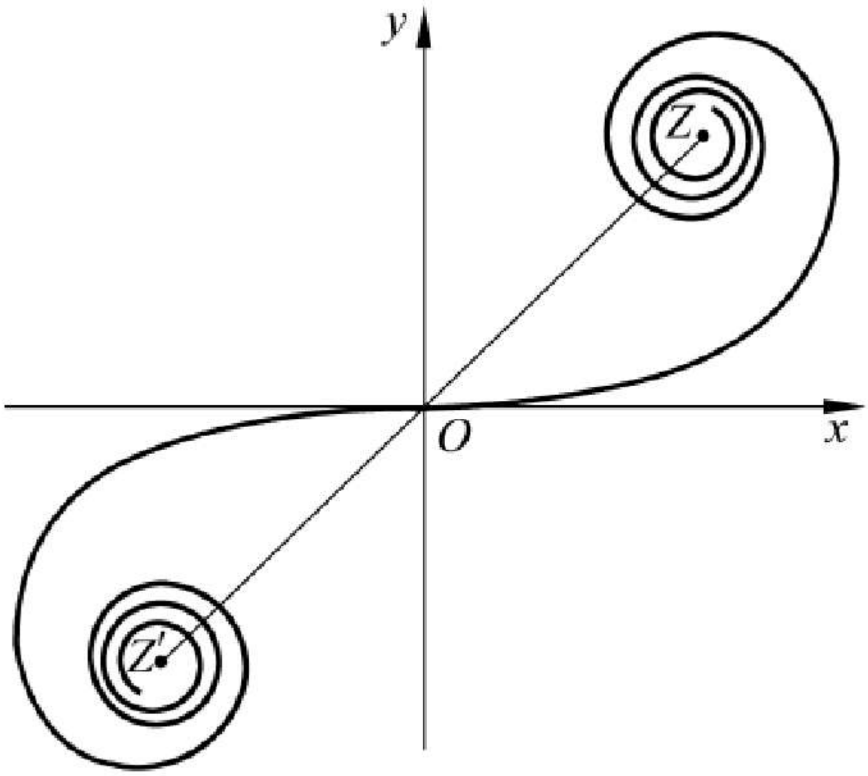
(a) 第一二个半波带的合振幅



(b) 上半个波面对P_0点产生的合振幅

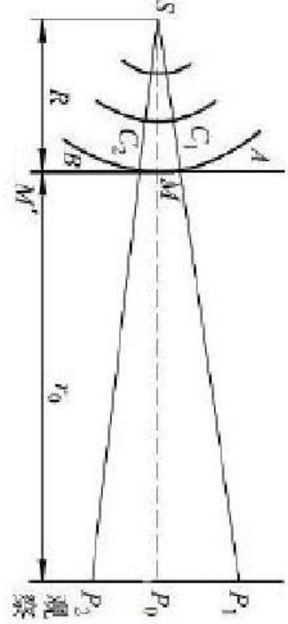
把各波带无限细分，并作矢量叠加，就得到趋于 Z 的光滑曲线，矢量 A=OZ 表示上半个波面的光场振幅。

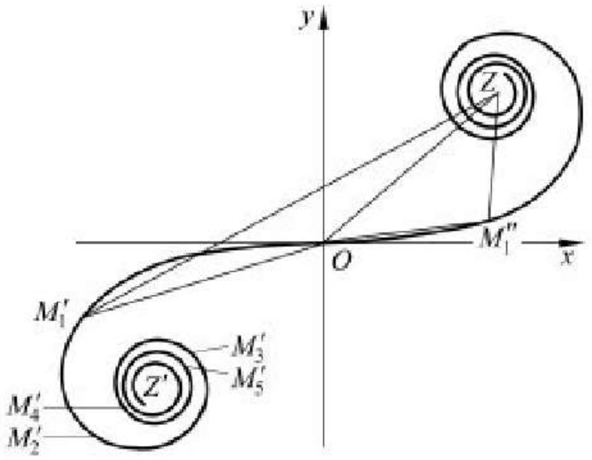
上下对称，科纽(Cornu)螺线



下半个波面，可在第三象限画出一条对应的曲线，上下两部分合成科纽螺线,连线 $Z'Z$ 表示整个波面在 P_0 的光振幅。

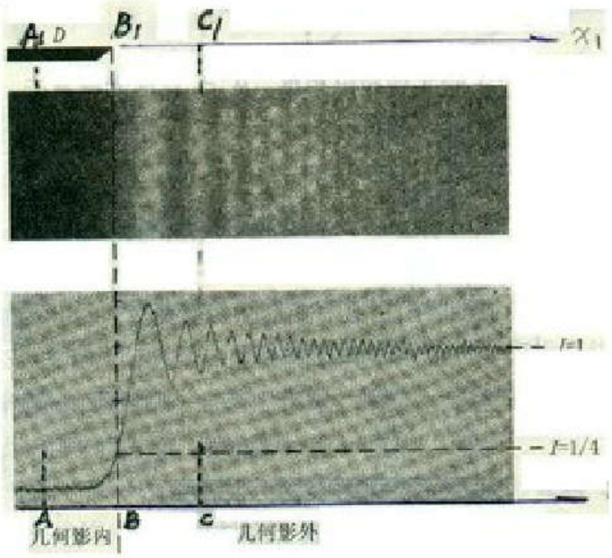
2. 菲涅耳直边衍射





(A)光源与直边边缘连线上的点 P_0

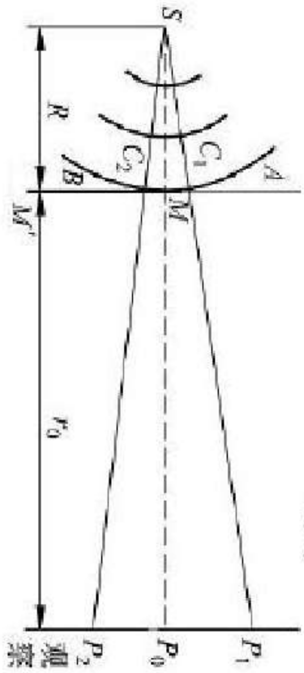
下半波面全遮住，上半波面对P_0产生作用，所以，光振幅 OZ为无任何遮挡时 $Z'Z$ 的一半，而光强为其1/4。

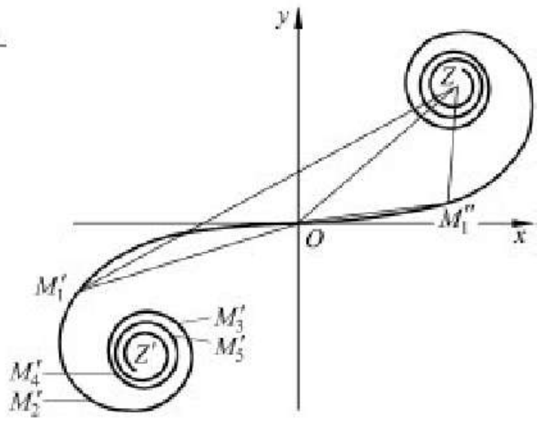


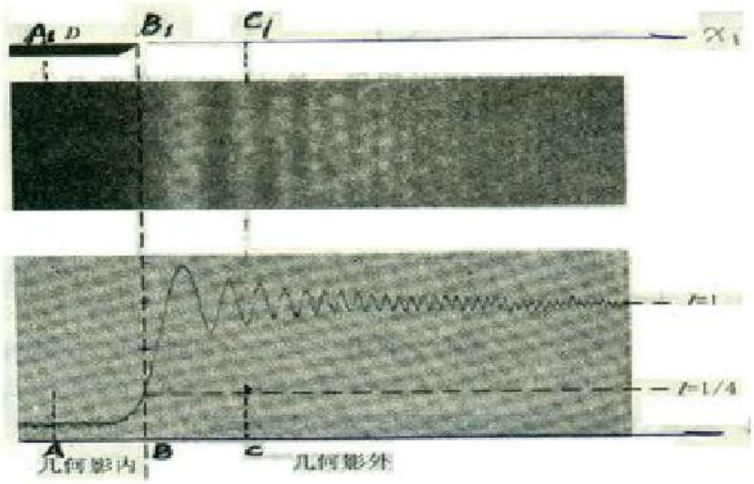
(B)几何阴影界外P_1

- 由C_1开始分半波带;
- C_1以外半个波面，全不受遮，光场为 $\overline{OZ}$ ；
- C_1以内的半个波面，部分被遮，光场为$\overline{M_1'O}$;
- P_1 总的光场为$\overline{M_1'Z}$;
- P_1离P_0越远，M_1'点越接近 Z' 。
- 光强波动:

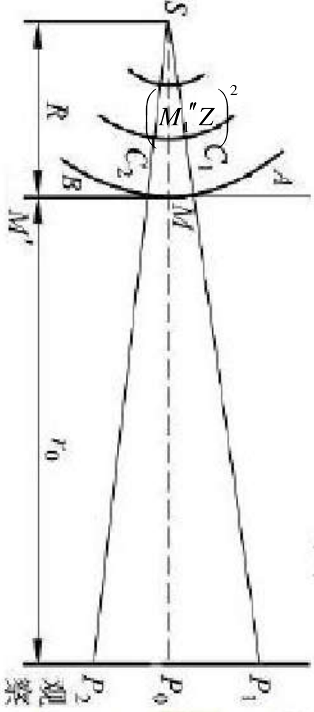
  几何阴影界外靠P_0处呈亮暗相间的衍射条纹，离P_0足够远的地方，光强基本均匀分布。

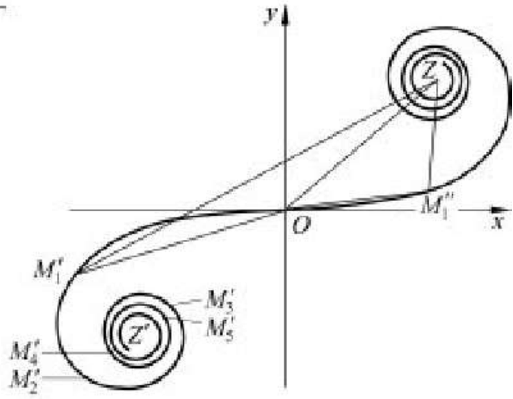




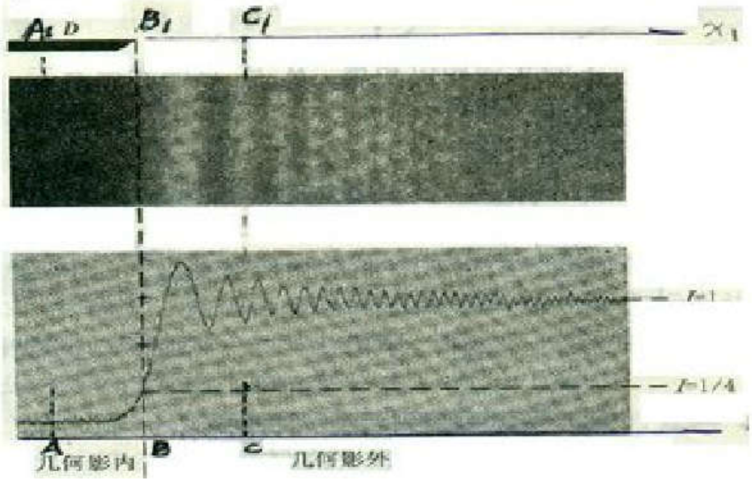


(C)几何阴影界内P_2

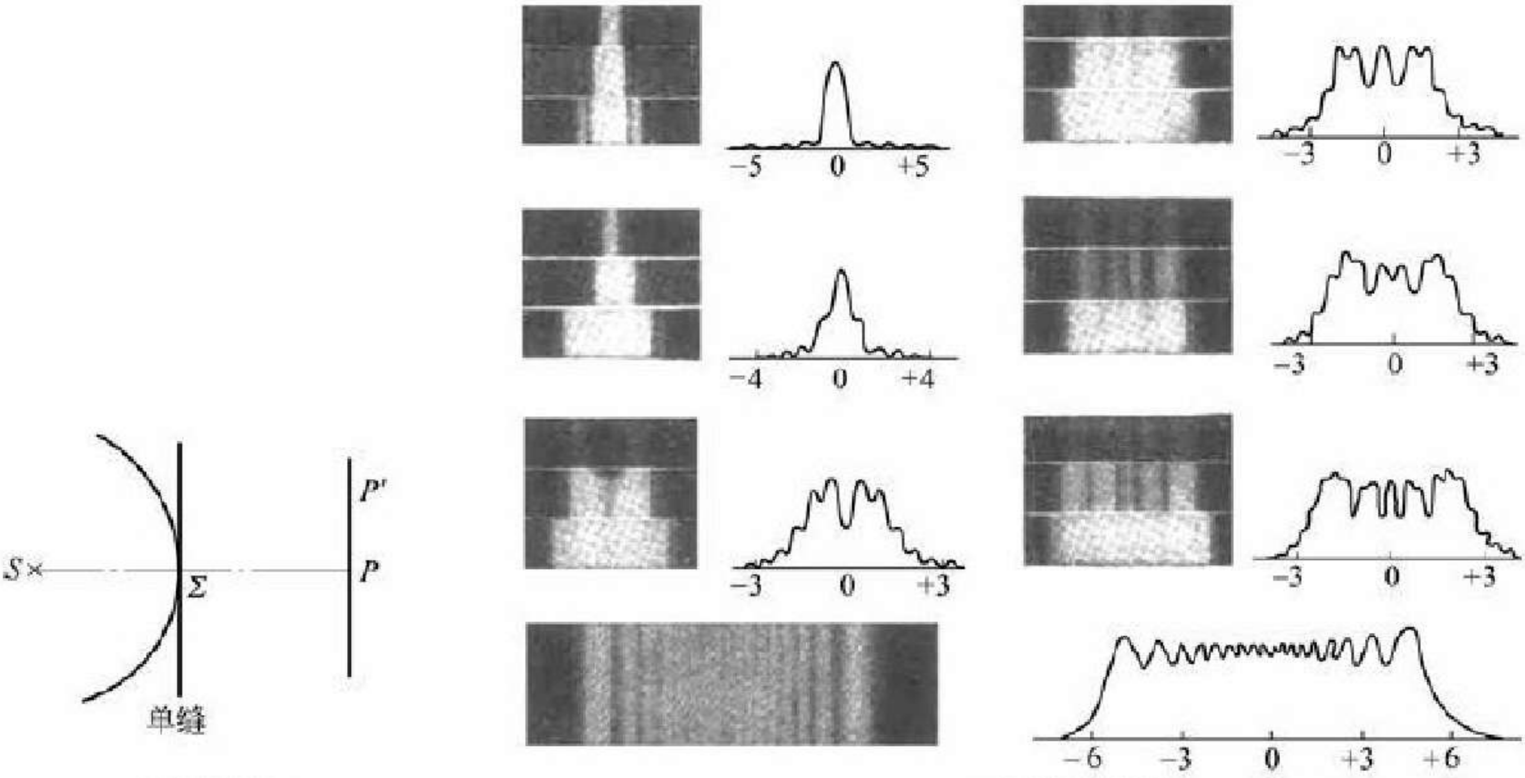




* C_2以左半个波面全被遮，以右半个波面也部分被遮。合光场矢量为$\overline{M_1''Z}$；
* P_2离P_0越远，M_1''越近Z，光强单调减小；
* 当P_2离P_0足够远时，光强度趋近于零。



3. 菲涅耳单缝衍射



(a) 原理图　　(b) 衍射图样

单缝每一边如一直边，露出部分波面的光场由通过科纽线得到，条纹强度分布与缝的宽度有关。

6.8 全息术 — holography

* D. Gabor 1948年提出；

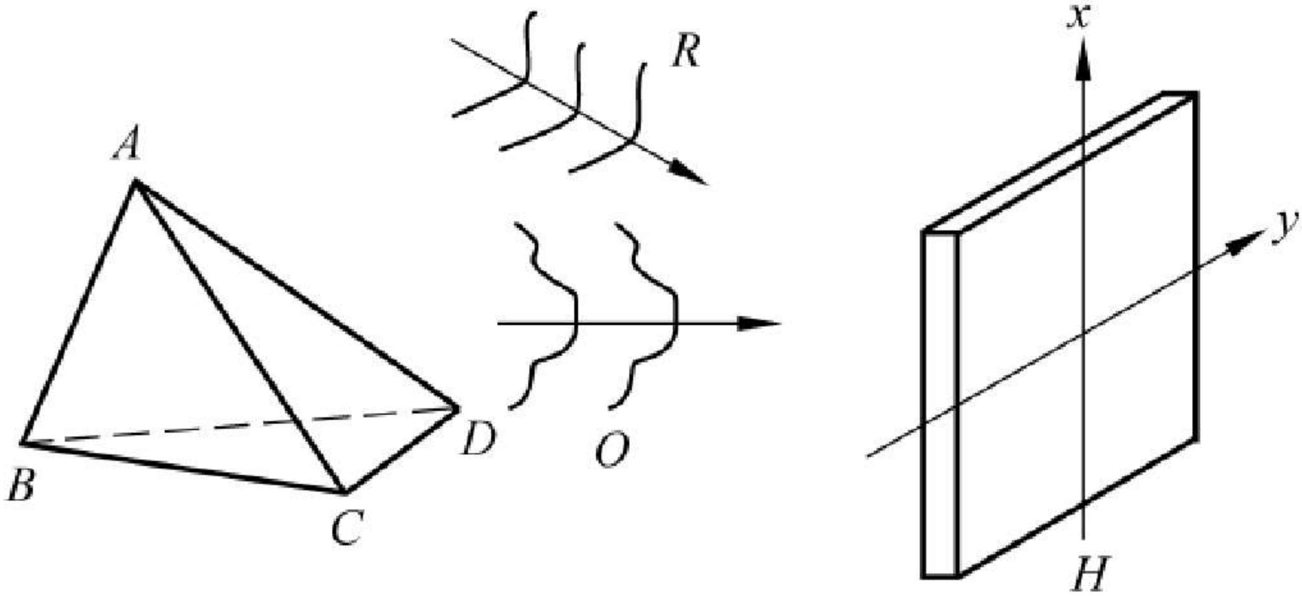
  1960年代激光出现，有了强相干性与高强度光源

  全息术得到迅速发展和成功应用

* 利用干涉原理，将物体发出的特定光波以干涉条纹的形式记录下来，使物光波前的振幅和位相信息都贮存在记录介质中，所记录的干涉条纹图样被称为“全息图”。

6.8.1 全息术的原理

1. 物光波面的记录（干涉记录）



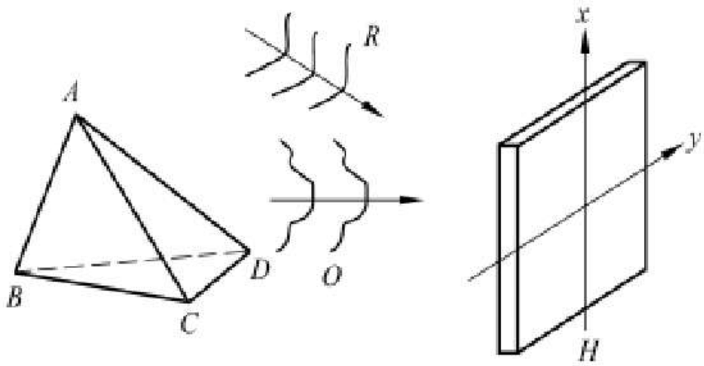
强度公式

$$\tilde{E}_o(x,y)=a_o(x,y)\exp\left[i\varphi_o(x,y)\right]$$

$$\tilde{E}_r(x,y)=a_r(x,y)\exp\left[i\varphi_r(x,y)\right]$$

$a_o(x,y)$、$a_r(x,y)$，$\varphi_o(x,y)$、$\varphi_r(x,y)$

分别表示各波面的振幅和相位



$$I(x,y)=|\tilde{E}_o(x,y)+\tilde{E}_r(x,y)|^2$$

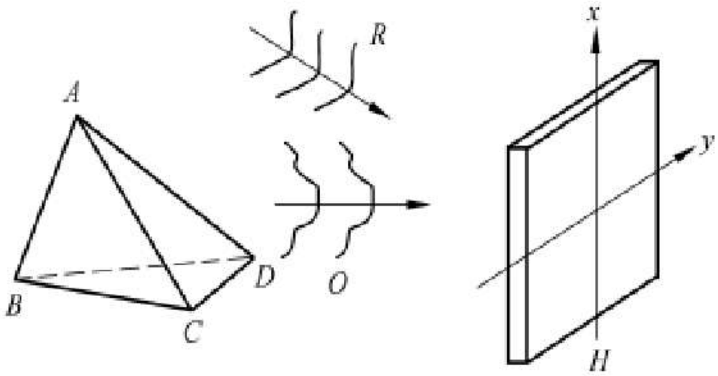
$$=|\tilde{E}_r(x,y)|^2+|\tilde{E}_o(x,y)|^2+\tilde{E}_r(x,y)\tilde{E}_o^*(x,y)+\tilde{E}_r^*(x,y)\tilde{E}_o(x,y)$$

$$=a_r^2+a_o^2+2a_ra_o\cos(\varphi_r-\varphi_o) \qquad (6\text{-}78)$$

公式意义

$$I(x,y)=a_r^2+a_o^2+2a_ra_o\cos(\varphi_r-\varphi_o)$$

* 第一、二项的和表平均强度;
* 第三项含物/参光波振幅和相位信息，表示条纹强度变化的幅度为$2a_ra_o$，相位为φ_r-φ_o;



* 条纹可见度的变化含物光波振幅信息，条纹的形状、间距含相位的信息。
* 干涉条纹反映了物光振幅和相位的全部信息。

全息图记录

$$\boxed{I(x,y)=a_r^2+a_o^2+2a_r a_o\cos(\varphi_r-\varphi_o)}$$

全息图的振幅透射系数 $t(x,y)=k_0+k_1 I(x,y)$

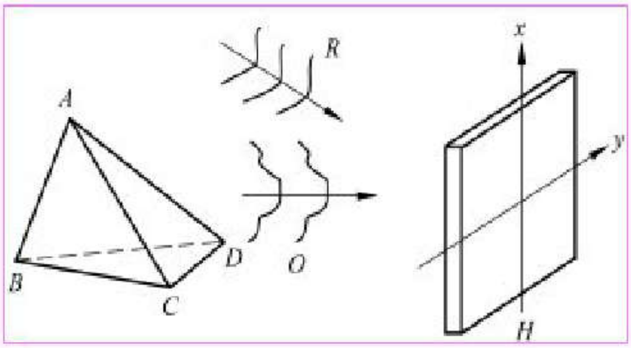
k_0，k_1 是常数，$k_1<0$是负片，$k_1>0$ 是正片

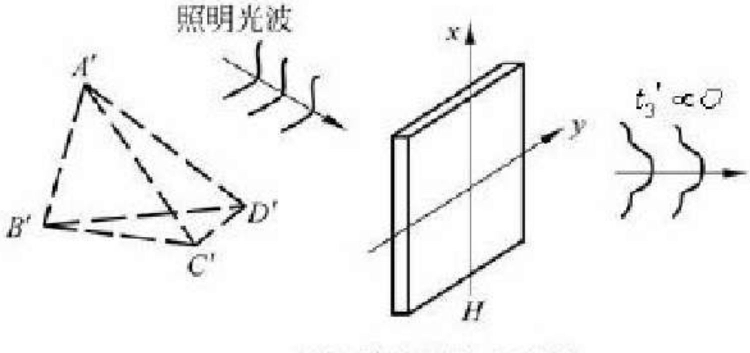
$I\,(x,y)$代入上式中,则有

$$t=(k_0+k_1|\tilde{E}_r|^2)+k_1|\tilde{E}_0|^2+k_1\tilde{E}_r^*\tilde{E}_0+k_1\tilde{E}_r\tilde{E}_0^*$$

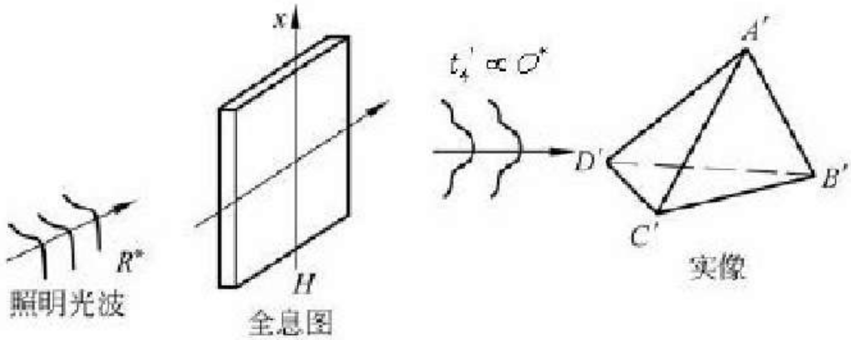
$$=t_1+t_2+t_3+t_4 \qquad (6\text{-}80)$$

2. 物光波面的重现（衍射再现)



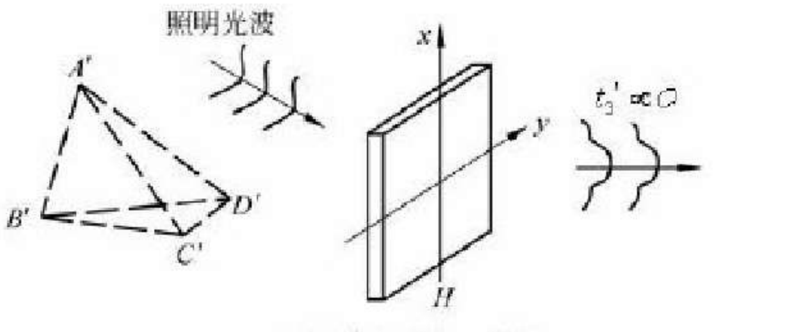


(a) 用参考光波 E_r重现

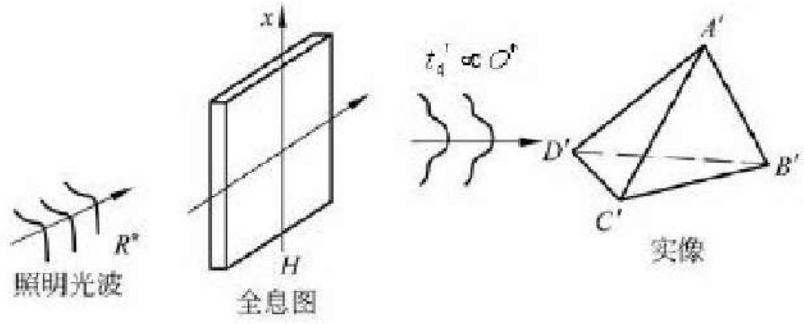


(b) 用与参考光共轭光波 E_r^* 重现

利用衍射原理由全息图重现物光波



(a) 用参考光波 E_r 重现



(b) 用与参考光共轭光波 E_r^* 重现

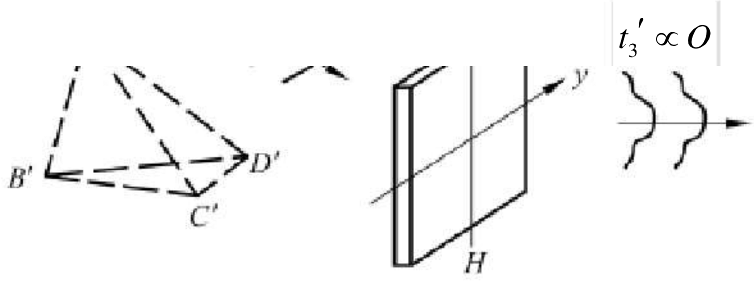
$$E'(x,y)=\tilde{E}_r t$$

$$=\{k_0+k_1|\tilde{E}_r|^2\}\tilde{E}_r+k_1|\tilde{E}_0|^2\,\tilde{E}_r+k_1|\tilde{E}_r|^2\,\tilde{E}_0+k_1\tilde{E}_r^2\tilde{E}_0^*$$

$$=t'_1+t'_2+t'_3+t'_4 \qquad (6\text{-}82)$$

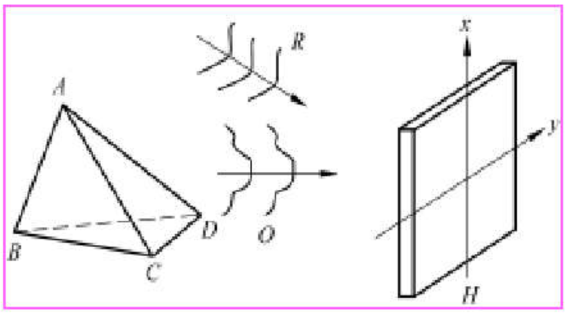
$\tilde{E}_r$ 全息再现

物光波的共轭波，所成共轭像是与直接像不同方向失真的实像，称为**赝实像**



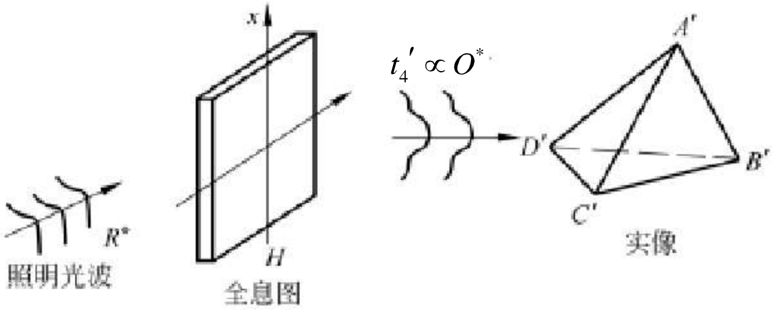
(a) 用参考光波 E_r 重现

E^* 全息再现



代表不失真实像共轭像

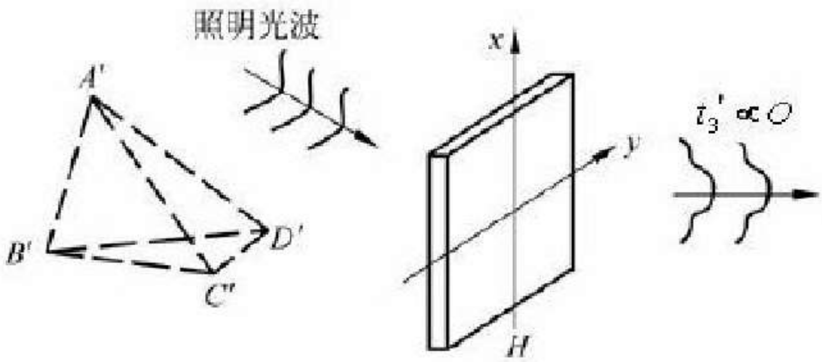
t_3' 代表失真的虚像



(b) 用与参考光共轭光波 E_r^* 重现

$$\tilde{E}_c = \tilde{E}_r$$

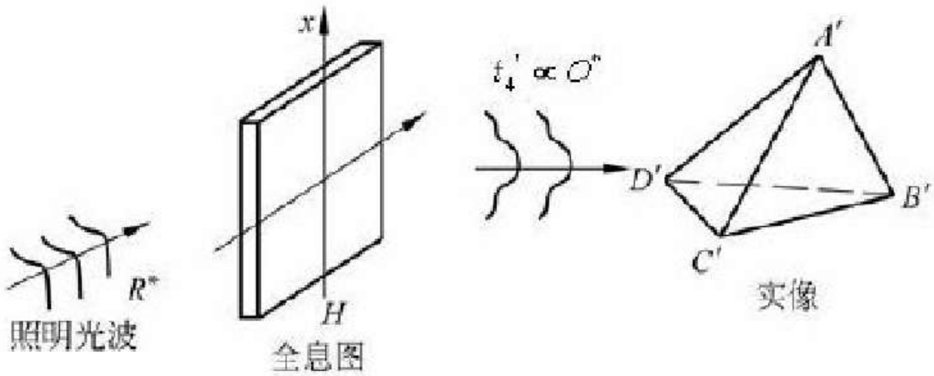
再现不失真**虚**像



(a) 用参考光波 E_r 重现

$$\tilde{E}_c = \tilde{E}_r^*$$

再现不失真**实**像



(b) 用与参考光共轭光波 E_r^* 重现

6.7.2 全息术的特点

1. 全息术能够记录物体光波振幅和相位的全部信息

2. 全息术实质上是一种干涉和衍射现象

3. 全息图的任何局部都能再现原物的基本形状

4. 无论底板正负，观察者看到的总是正像

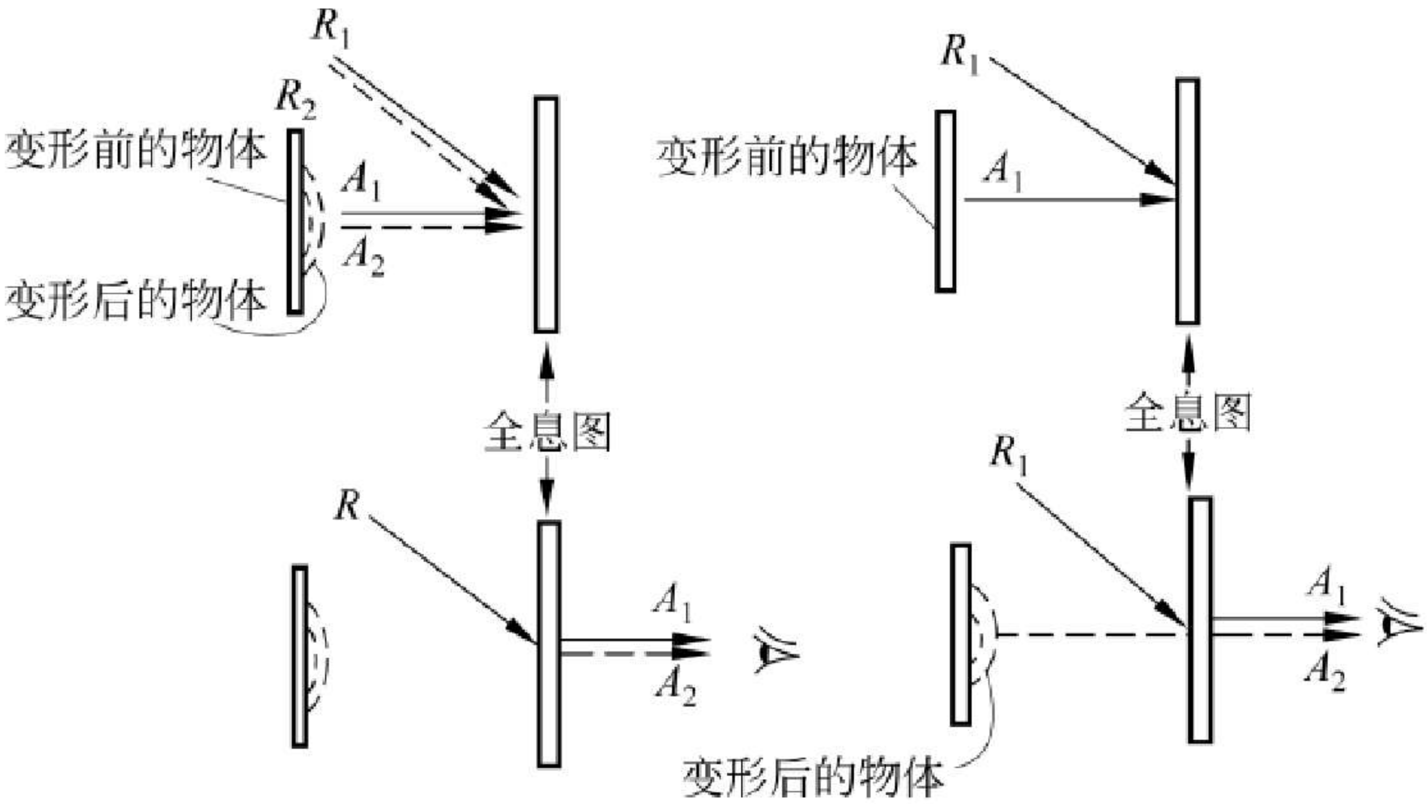
6.8.3 全息术的应用

1. **全息光学元件**

2. **全息显示**

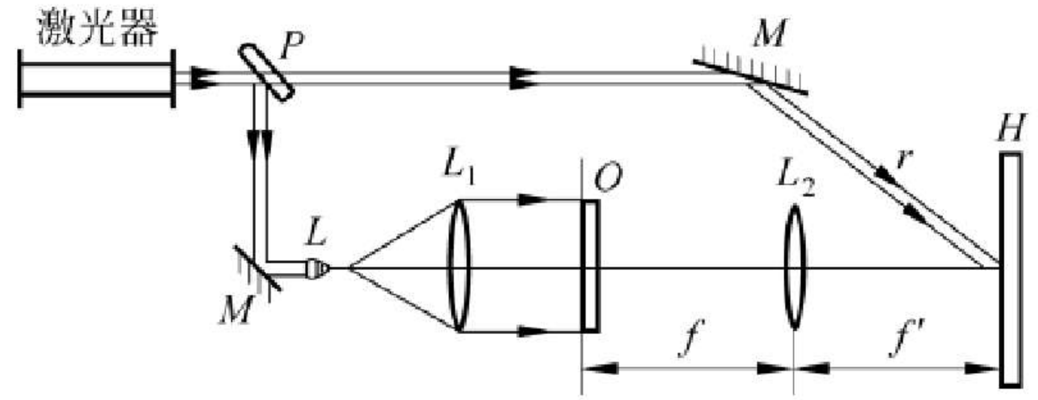
3. **全息干涉计量** 应力应变的不接触测量…

4. **全息存储**

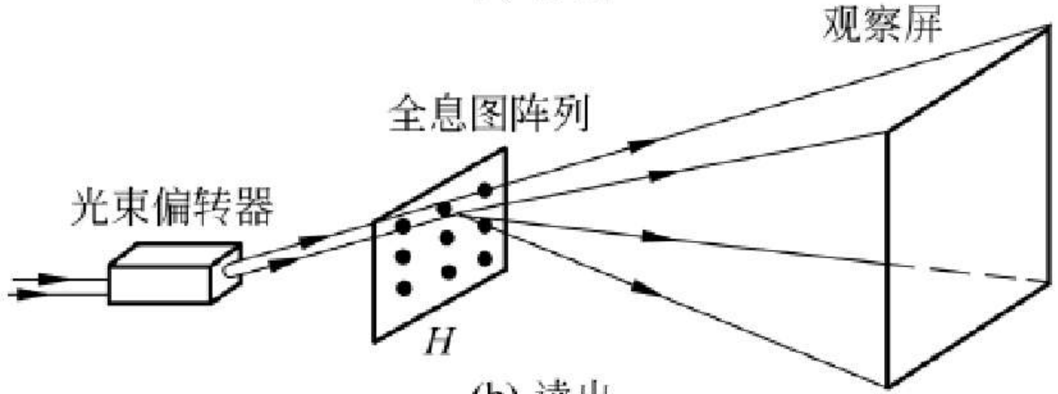


R_1
R_2
变形前的物体
A_1
A_2
变形后的物体
全息图
R
A_1
A_2
R_1
变形前的物体
A_1
全息图
R_1
A_1
A_2
变形后的物体

(a) 二次曝光法　　(b) 实时法



(a) 存储



(b) 读出

习题：2、6、8、10、11、13、15、17、19、24、28、35