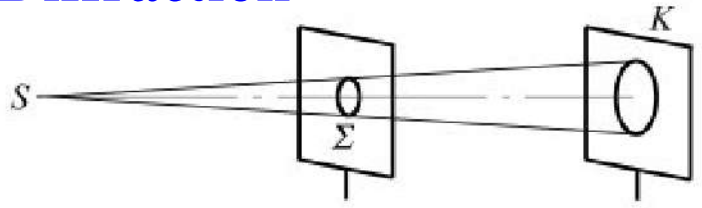


第6章 光的衍射

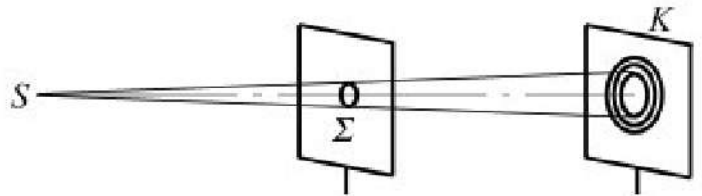
Diffraction



(a) 圆孔的几何投影

6.1 光的衍射现象

Sommerfeld
(索末菲)定义:



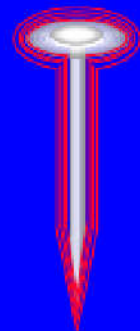
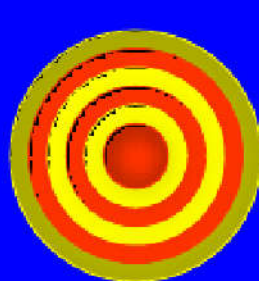
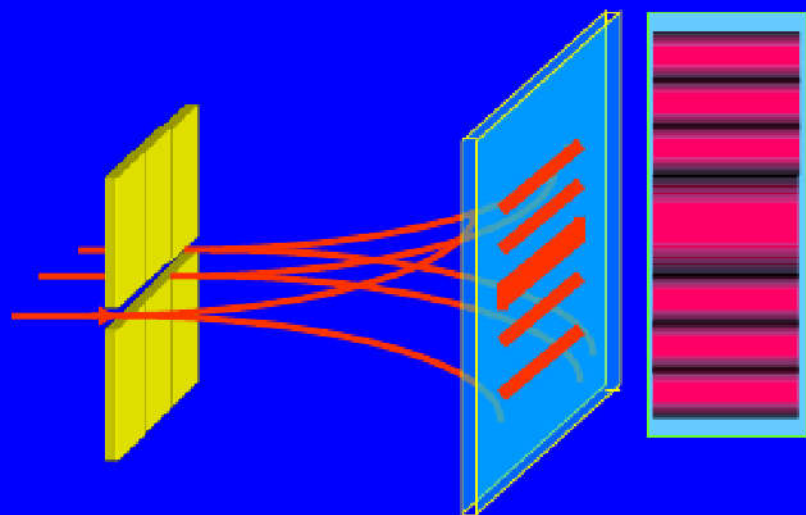
(b) 圆孔的衍射

不能用**反射**或**折射**来解释的光线对直线光路的任何偏离。

(应加上**散射** Scattering)

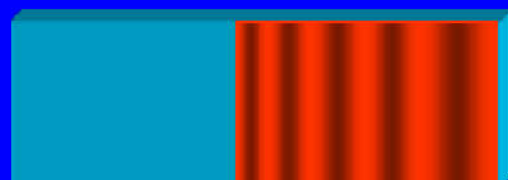
光的衍射现象

当光遇到障碍物时，光偏离直线传播的现象。



圆孔衍射 钉子衍射

直棱边衍射

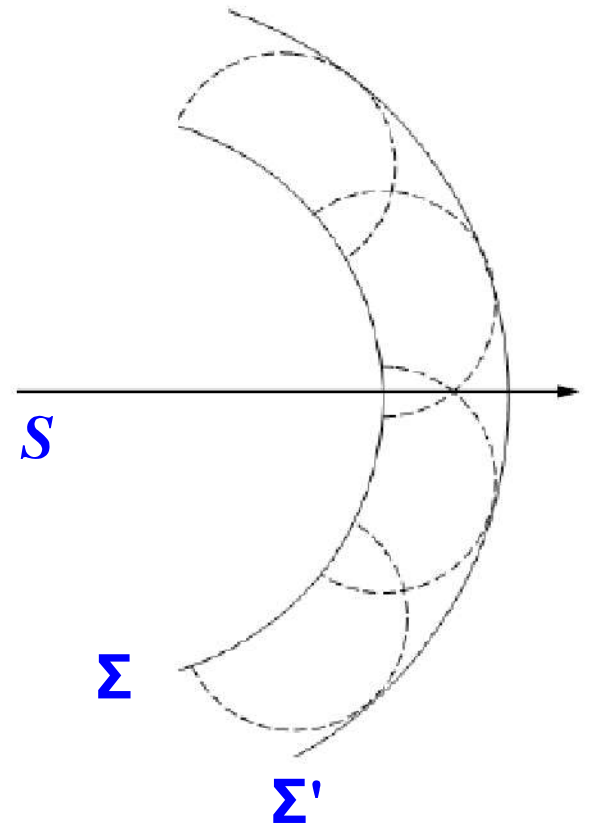


6.2 衍射的基本理论 — The theory of diffraction

6.2.1 惠更斯-菲涅耳原理 Huygens-Fresnel theory

1. 惠更斯原理

波源 S 在某时刻所产生的波阵面为 Σ , 则 Σ 面上的每一点都可以看作是一个次波源, 它们发出球面次波, 其后某一时刻的波阵面 Σ' 即是该时刻这些球面次波的包络面, 波阵面的法线方向就是该光波的传播方向。



惠更斯-菲涅耳原理

波阵面 Σ' 上任一点的光振动应该是在光源和该点之间任一波面（例如 Σ 面）上所有子波叠加的结果。

干涉和衍射的本质

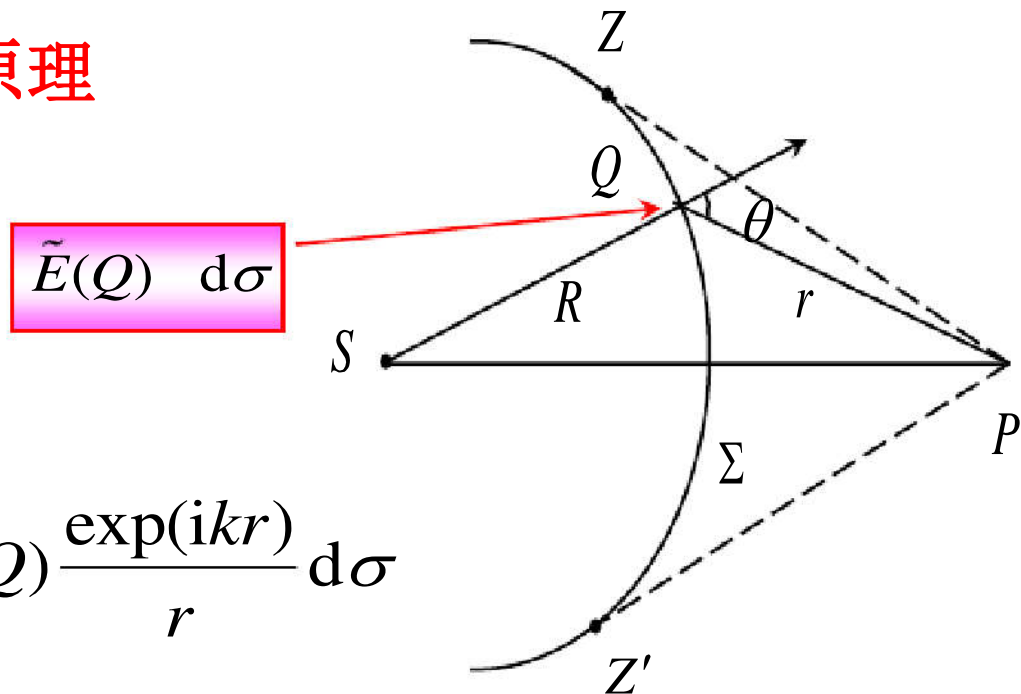
—— 相干光波叠加引起光强的重新分布

区别：

干涉 —— 有限个相干光波的叠加

衍射 —— 无限多个相干光波的叠加

惠更斯-菲涅耳原理



$$d\tilde{E}(P) = CK(\theta)\tilde{E}(Q)\frac{\exp(ikr)}{r}d\sigma$$

C : 比例系数

$K(\theta)$: 倾斜因子

$$\tilde{E}(P) = C \iint_{\Sigma} \tilde{E}(Q) \frac{\exp(ikr)}{r} K(\theta) d\sigma$$

惠更斯-菲涅耳公式

$$\tilde{E}(P) = C \iint_{\Sigma} \tilde{E}(Q) \frac{\exp(ikr)}{r} K(\theta) d\sigma$$

S: 点光源

$$\tilde{E}(Q) = \frac{A}{R} \exp(ikR)$$

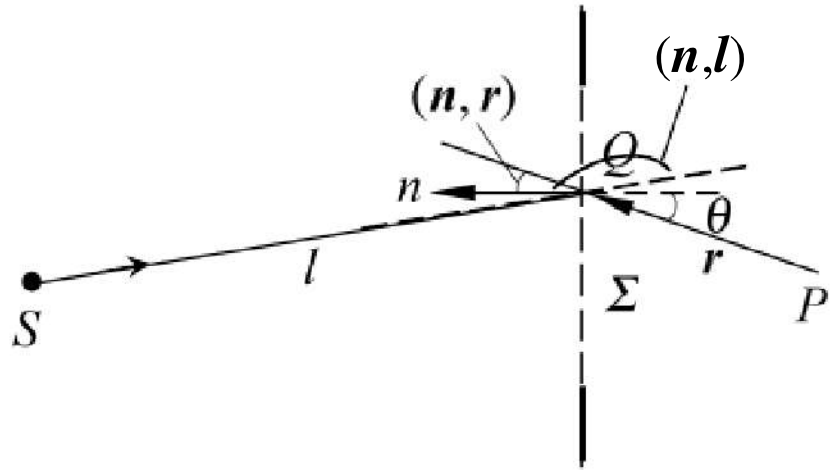
存在的两个问题:

1. 计算所得的相位比实际相位落后 $\frac{\pi}{2}$
2. 为了解释没有倒退波存在, 假设 $\theta = 0$ 时, $K(\theta) = 1$
而 $\theta \geq \frac{\pi}{2}$, $K(\theta) = 0$

6.2.2 基尔霍夫公式

Kirchhoff's diffraction formula

1. 衍射公式



$$\tilde{E}(P) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(ikl)}{l} \frac{\exp(ikr)}{r} \left[\frac{\cos(n, r) - \cos(n, l)}{2} \right] d\sigma$$

(6-2)

$$\tilde{E}(P) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(ikl)}{l} \frac{\exp(ikr)}{r} \left[\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})}{2} \right] d\sigma$$

子波元, 相干迭加

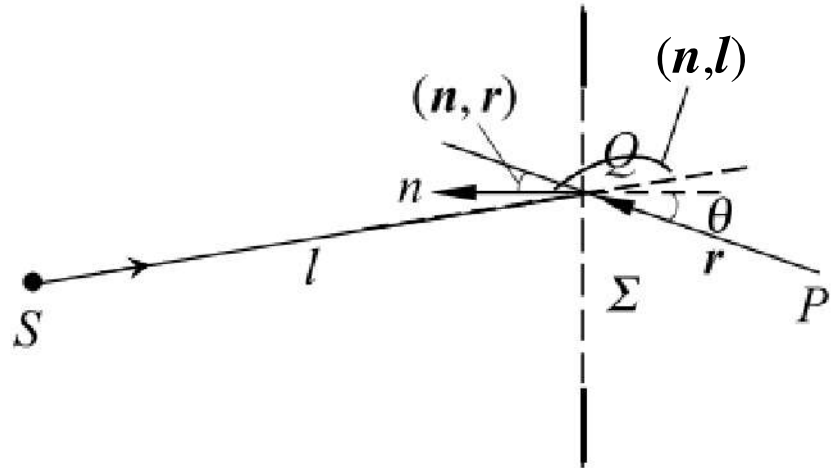
式中

A 离点光源 S 单位
距离处的振幅,

l S 到 Q 的矢径,

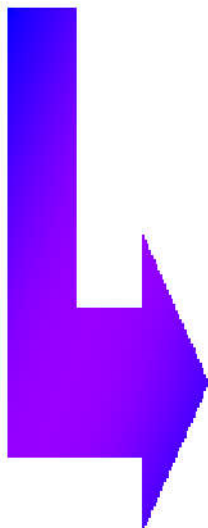
r 是 P 到 Q 的矢径,

\mathbf{n} 是子波元的外法线方向单位矢量



$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{E}(P) &= \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(ikl)}{l} \frac{\exp(ikr)}{r} \left[\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})}{2} \right] d\sigma \end{aligned} \right.$$

$$\tilde{E}(P) = C \iint_{\Sigma} \tilde{E}(Q) \frac{\exp(ikr)}{r} K(\theta) d\sigma$$


$$C = \frac{1}{i\lambda} = \frac{-i}{\lambda}$$

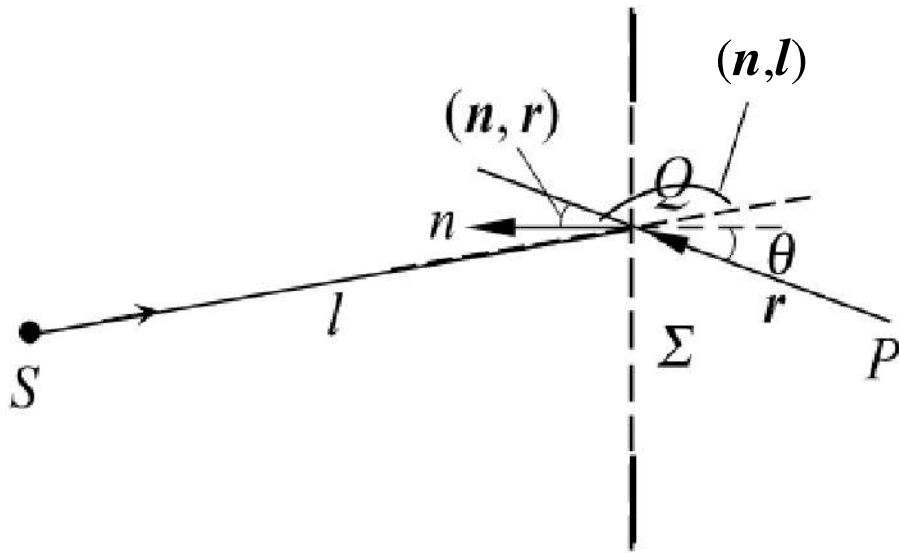
$$\tilde{E}(Q) = \frac{\exp(ikl)}{l}$$

$$K(\theta) = \frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})}{2}$$

1、 P 点的光场是 Σ 上无穷多次波源产生的，次波源的复振幅与入射波在该点的复振幅 $\tilde{E}(Q)$ 成正比，与波长 λ 成反比。

2、因子 $(-i)$ 表明，次波源的振动相位超前于入射波 $\pi/2$ 。

3、倾斜因子 $K(\theta)$ 表示了次波的振幅在各个方向上是不同的，其值在0与1之间。



平行光垂直入射到 Σ 上：

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) = -1 \\ \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = \theta \end{array} \right\} \longrightarrow K(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

2. 公式的近似

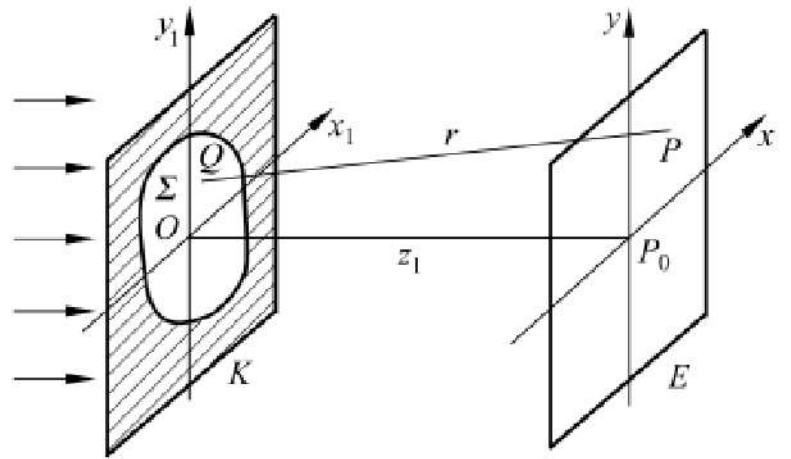
(A) 傍轴近似

$$r = z_1 \quad (\text{距离})$$

$$\frac{A \exp(ikl)}{l} \rightarrow E(x_1, y_1),$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{l}) = -1 \quad \cos(\vec{n}, \vec{r}) = 1,$$

$$E(x, y) = \frac{-iA}{\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[ik(r+l)]}{r \cdot l} \cdot \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{l})}{2} \right] d\sigma$$



$$E(x, y) = \frac{-iA}{\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[ik(r+l)]}{r \cdot l} \cdot \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{l})}{2} \right] d\sigma$$

近似为:

$$E(x, y) = \frac{-i}{\lambda z_1} \iint_{\Sigma} E(x_1, y_1) \exp(ikr) d\sigma$$

注意:

相位因子中有巨大的倍乘因子 k ,
不能取近似 $r \approx z_1$

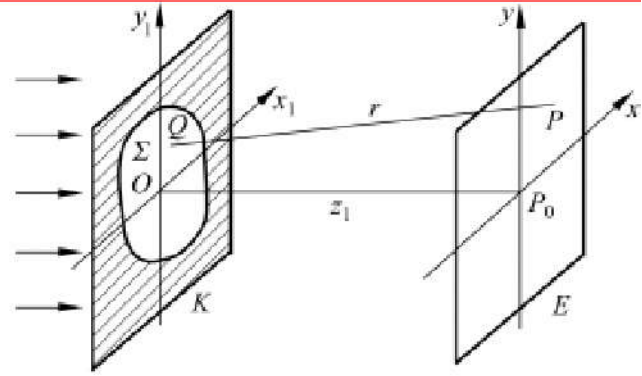
(B) 菲涅耳近似

$$r = \sqrt{z_1^2 + (x - x_1)^2}$$

$$= z_1 + \frac{1}{2z_1} [(x - x_1)^2]$$

$$+ k \frac{[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]}{8z_1^3}$$

$$= z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_1} - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_1}$$



$$E(x, y) = \frac{-i}{\lambda z_1} \iint_{\Sigma} E(x_1, y_1) \exp(ikr) d\sigma$$

$$r = z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_1} - \frac{xx_1 + yy_1}{z_1} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2z_1}$$

$$E(x, y) = \frac{-i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2)\right] \\ \times \iint_{\Sigma} E(x_1, y_1) \exp\left[\frac{ik}{2z} (x_1^2 + y_1^2)\right] \cdot \exp\left[-ik\left(\frac{xx_1}{z} + \frac{yy_1}{z}\right)\right] dx_1 dy_1$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \text{并设} \quad \frac{x}{\lambda z} = f_x, \quad \frac{y}{\lambda z} = f_y$$

则有

$$\begin{aligned}
 E(x, y) &= \frac{-i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \\
 &\quad \times \iint_{\Sigma} E(x_1, y_1) \cdot \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right] \cdot \exp[-i2\pi(x_1 f_x + y_1 f_y)] dx_1 dy_1 \\
 &= \frac{-i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \\
 &\quad \times \mathcal{F} \left\{ E(x_1, y_1) \cdot \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right] \right\} \left| \begin{array}{l} f_x = x/\lambda z \\ f_y = y/\lambda z \end{array} \right. \quad (6-7)
 \end{aligned}$$

意义:

在菲涅耳近似下, 衍射光场就是入射光

场乘上相位因子 $\exp[\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)]$, 进行

付氏变换, 再代入 $f_x = x/\lambda z, f_y = y/\lambda z$

积分前的相位因子在求强度时无影响, 可略去, 于是

$$E(x, y) = \mathcal{F} \left\{ E(x_1, y_1) \cdot \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right] \right\} \left| \begin{array}{l} f_x = x/\lambda z \\ f_y = y/\lambda z \end{array} \right.$$

(6-7a)

(C) 夫琅和费近似



$\cdot \mathcal{F}$

如 l

即 $\frac{2}{\lambda}$

$\gg \dots$

$$x_1 = 0.1 \quad y =$$

$$\lambda = \mu\text{m}$$

$$\Rightarrow z \gg 364 \text{ m}$$

$$\exp\left[\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right] \approx 1$$

(6-7) 可近似为

$$E(x, y) = \frac{-i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \mathcal{F}\{E(x_1, y_1)\} \left| \begin{array}{l} f_x = x/\lambda z \\ f_y = y/\lambda z \end{array} \right.$$

(6-11)

• 在夫琅和费近似下，衍射光场就是入射场的付

氏变换，代以 $f_x = x/\lambda z$, $f_y = y/\lambda z$

矩形函数

$$rect(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \quad \begin{aligned} \mathcal{F}\{rect(x)\} &= \text{sinc}f_x \\ &= \sin(\pi f_x) / (\pi f_x) \end{aligned}$$

梳状函数

$$comb(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n), \quad \begin{aligned} \mathcal{F}\{comb(x)\} & \\ &= comb(f_x) \end{aligned}$$

圆域函数

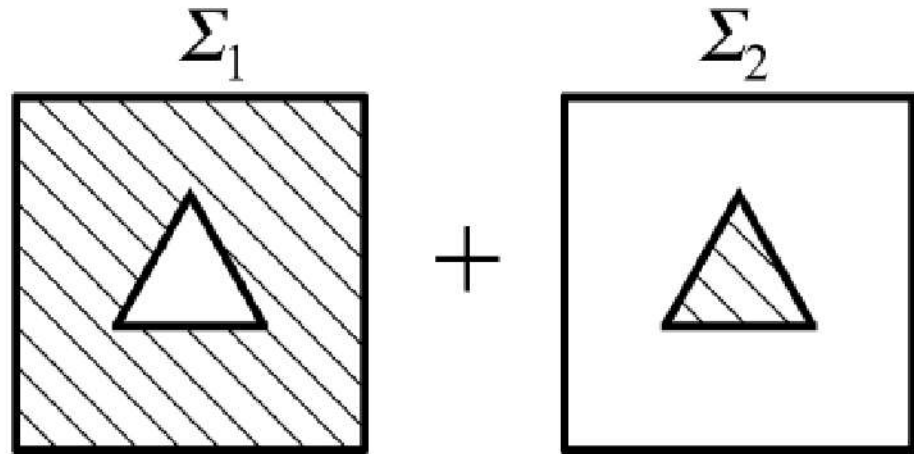
$$circ(r) = \begin{cases} 1 & r \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \quad \mathcal{B}\{circ(r)\} = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$$

**Fourier—Bessel
transform**

6.2.3 Babinet原理

1. 互补屏

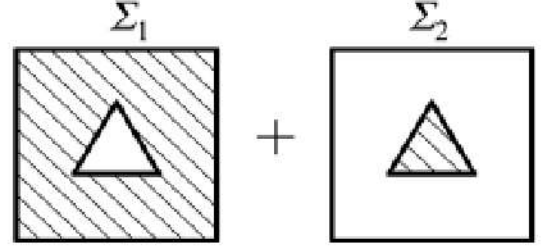
若 Σ_1 透光部分正好是 Σ_2 遮光部分, Σ_1 遮光部分正好是 Σ_2 透光部分, 则 Σ_1 、 Σ_2 为互补屏。



2. 巴俾涅原理

记 Σ_1 、 Σ_2 的衍射场分别为 $E_1(p)$ 、 $E_2(p)$, 无衍射屏时光场为 $E_0(p)$. 则 $E_0(p) = E_1(p) + E_2(p)$ (6-12)

3. 证明



$$\begin{aligned} E_0(P) &= \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \frac{\exp(ikl)}{l} \frac{\exp(ikr)}{r} \left[\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})}{2} \right] d\sigma \\ &= \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma_1} \frac{\exp(ikl)}{l} \frac{\exp(ikr)}{r} \left[\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})}{2} \right] d\sigma \\ &\quad + \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma_2} \frac{\exp(ikl)}{l} \frac{\exp(ikr)}{r} \left[\frac{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})}{2} \right] d\sigma \\ &= E_1(p) + E_2(p) \end{aligned}$$

4. 推论

(A) 若 $E_1(p) = 0$, 则 $E_2(p) = E_0(p)$

在 Σ_1 衍射场为零的点, Σ_2 的衍射场与没屏时一样。

(B) 若 $E_0(p) = 0$, 则 $E_1(p) = -E_2(p)$

在 $E_0(p) = 0$ 的点, $E_1(p)$ 和 $E_2(p)$

相位差为 π , 强度相等。

应用:

圆孔衍射 \rightarrow 圆屏衍射

单缝衍射 \rightarrow 窄带/细线衍射

\Rightarrow 漆包线直径的在线检测

6.3 夫琅和费衍射

Fraunhofer diffraction

相关公式

(1) 线性定理

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}\{g(x)\} &= G(f_x) \\ \mathcal{F}\{h(x)\} &= H(f_x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\mathcal{F}\{\alpha g(x) + \beta h(x)\} = \alpha G(f_x) + \beta H(f_x)$$

(2) 相似定理

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G[f_x, f_y]$$

$$\rightarrow \mathcal{F}\left\{g\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)\right\} = |ab| G[af_x, bf_y]$$

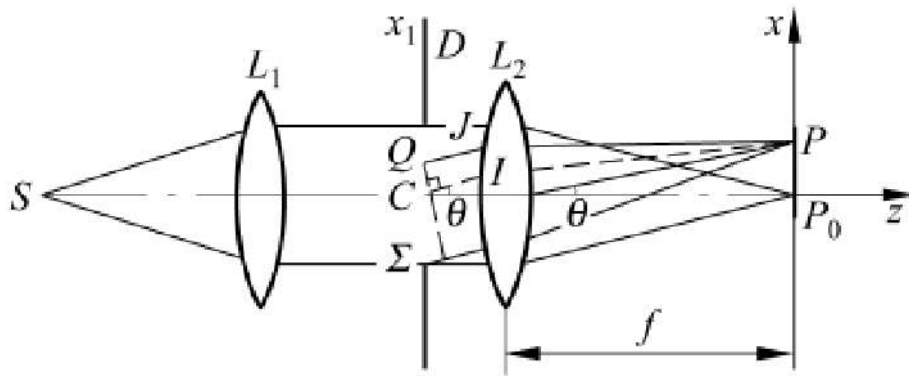
(3) 圆对称函数相似定理

$$\mathcal{B}\{g(r)\} = G(\rho)$$

$$\rightarrow \mathcal{B}\left\{g\left(\frac{r}{a}\right)\right\} = a^2 G(a\rho)$$

6.3.1 衍射装置

Experiment arrangement



$$\gg \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{\lambda}$$

1mm

1mm

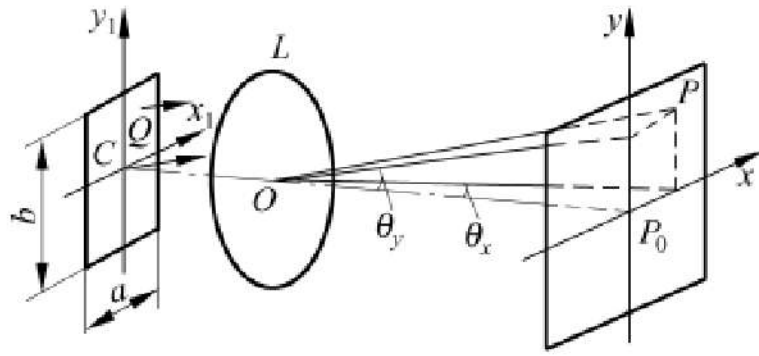
$5 \mu m$

$\gg 364m$

- (1) S 置于 L_1 的前焦面，等价于无穷远光源
在 L_2 的后焦面观察衍射图样，等价于在无穷远处观察
- (2) Σ 在垂直或平行于光轴方向平移 (但不能转动)，
衍射图样不变

6.3.2 矩孔衍射 Diffraction at a rectangular aperture

1. 强度公式



$$E(x_1, y_1) = \text{rect}\left(\frac{x_1}{a}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y_1}{b}\right)$$

$$E(x, y) = \mathcal{F}\{E(x_1, y_1)\} \left| \begin{array}{l} f_{x = x/\lambda z} \\ f_{y = y/\lambda z} \end{array} \right.$$

$$= \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x_1}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y_1}{b}\right)\right\} \left| \begin{array}{l} f_{x = x/\lambda z} \\ f_{y = y/\lambda z} \end{array} \right.$$

$$= |ab| \sin c(a f_x) \sin c(b f_y) \left| \begin{array}{l} f_x = x/\lambda z \\ f_y = y/\lambda z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} E(x, y) = \mathcal{F}\{rect(\frac{x}{a})rect(\frac{y}{b})\} \\ \mathcal{F}\{rect(x)\} = \sin c f_x \end{array} \left| \begin{array}{l} f_x = x/\lambda z \\ f_y = y/\lambda z \end{array} \right.$$

$$= |ab| \frac{\sin(\pi a x / \lambda z)}{\pi a x / \lambda z} \cdot \frac{\sin(\pi b y / \lambda z)}{\pi b y / \lambda z} = \frac{\sin(\pi f_x)}{\pi f_x}$$

$$\stackrel{\substack{\pi/\lambda = k/2 \\ x/z = \sin \theta_x, y/z = \sin \theta_y}}{=} |ab| \frac{\sin(\frac{1}{2} k a \sin \theta_x)}{\frac{1}{2} k a \sin \theta_x} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2} k b \sin \theta_y)}{\frac{1}{2} k b \sin \theta_y}$$

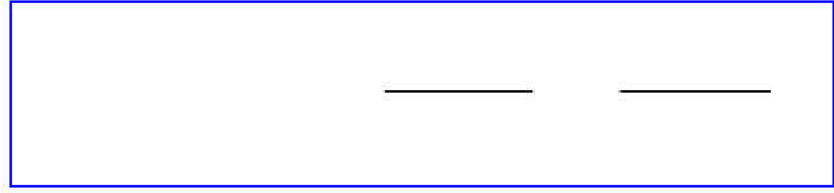
$$\frac{\frac{\pi}{\lambda} = k/2}{x/z = \sin \theta_x, y/z = \sin \theta_y} \left| ab \right| \frac{\sin\left(\frac{1}{2} ka \sin \theta_x\right)}{\frac{1}{2} ka \sin \theta_x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2} kb \sin \theta_y\right)}{\frac{1}{2} kb \sin \theta_y}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} ka \sin \theta_x \\ \beta &= \frac{1}{2} kb \sin \theta_y \\ \hline & \left| ab \right| \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \end{aligned}$$

全部常量归于 I_0 , 得到 $I(x, y) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2$ (6-18)

$$\alpha = \frac{1}{2} ka \sin \theta_x, \beta = \frac{1}{2} kb \sin \theta_y$$

2. 衍射图样讨论



$$I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (6-17)$$

(1) 强度分布

$$I(x, y) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

考虑 $\frac{dI}{d\alpha} = 2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha^2} = 0$

* $\sin \alpha = 0, \Rightarrow \alpha = m\pi$ $\begin{cases} m = 0 \text{ 主极大 对应 } P_0 \text{ 点} \\ m = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ 极小 . 零} \end{cases}$

$$\alpha = \frac{1}{2} ka \sin \theta_x$$

与极小值相对应的暗点位置为

$$a \sin \theta_x = m\lambda \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6-21)$$

* $\alpha \cos \alpha - \sin \alpha = 0$ 即 $\alpha = \tan \alpha$, 次极大

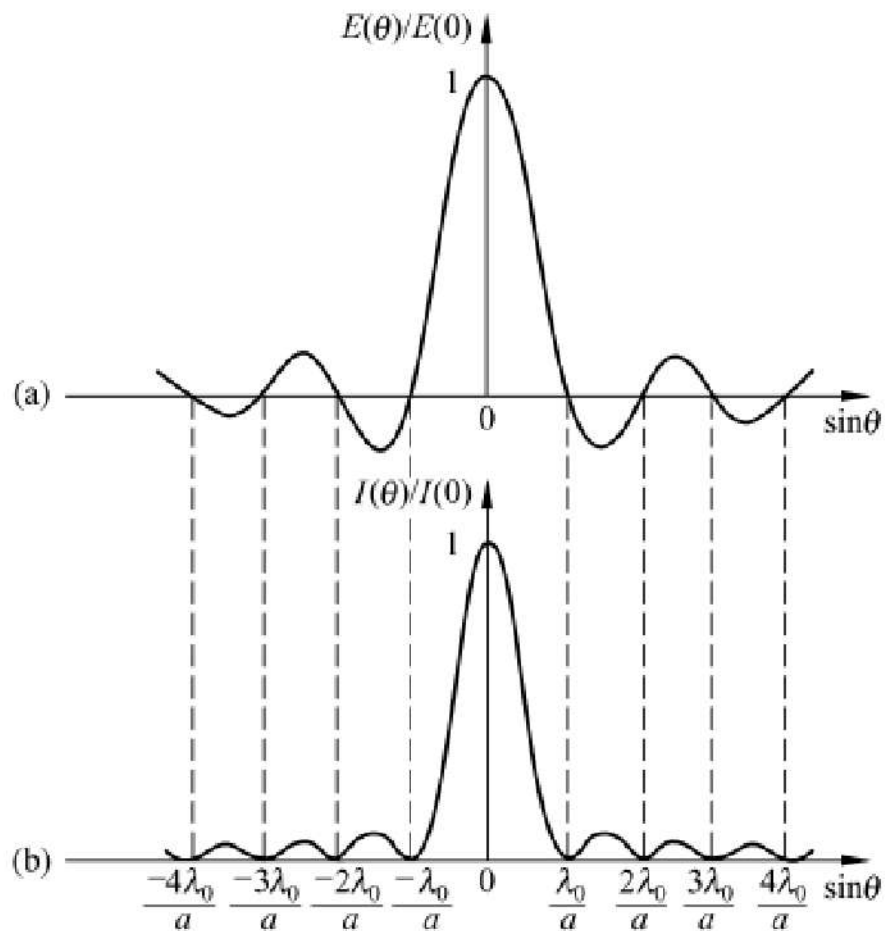
$$* \sin \alpha = 0, \Rightarrow$$

$$\alpha = m\pi \begin{cases} m = 0 \text{ 主极大 } P_0 \\ m = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ 零} \end{cases}$$

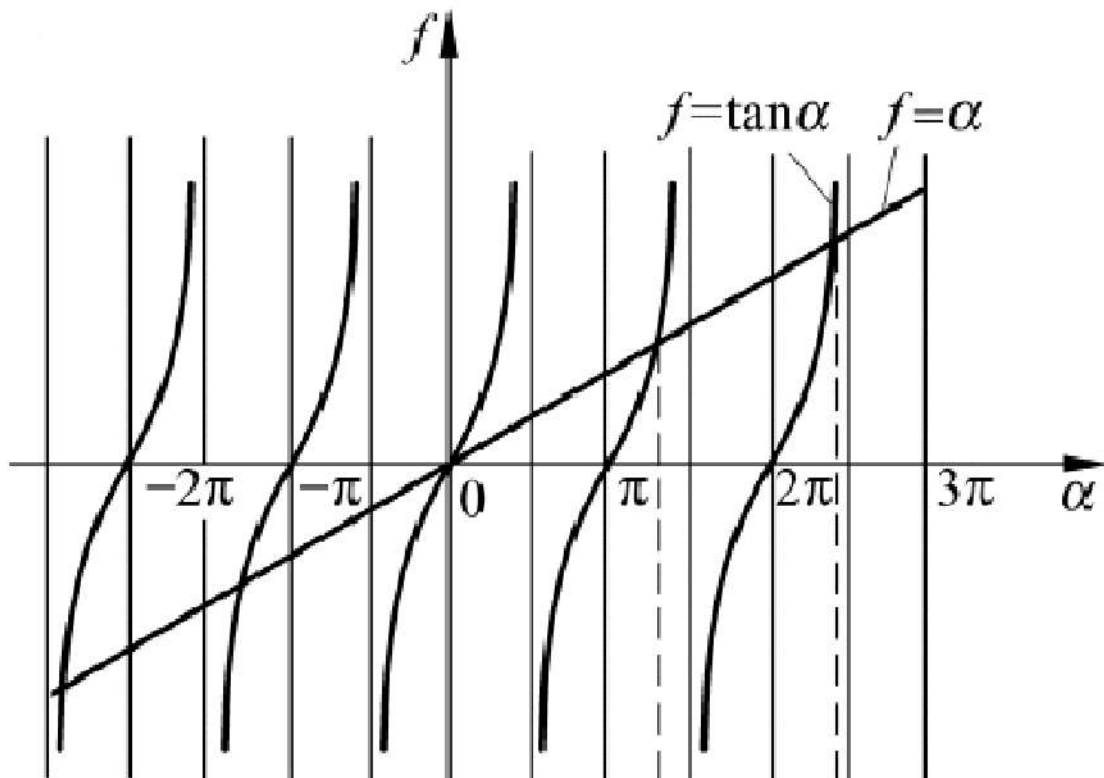
暗点的位置为

$$a \sin \theta_x = m\lambda$$

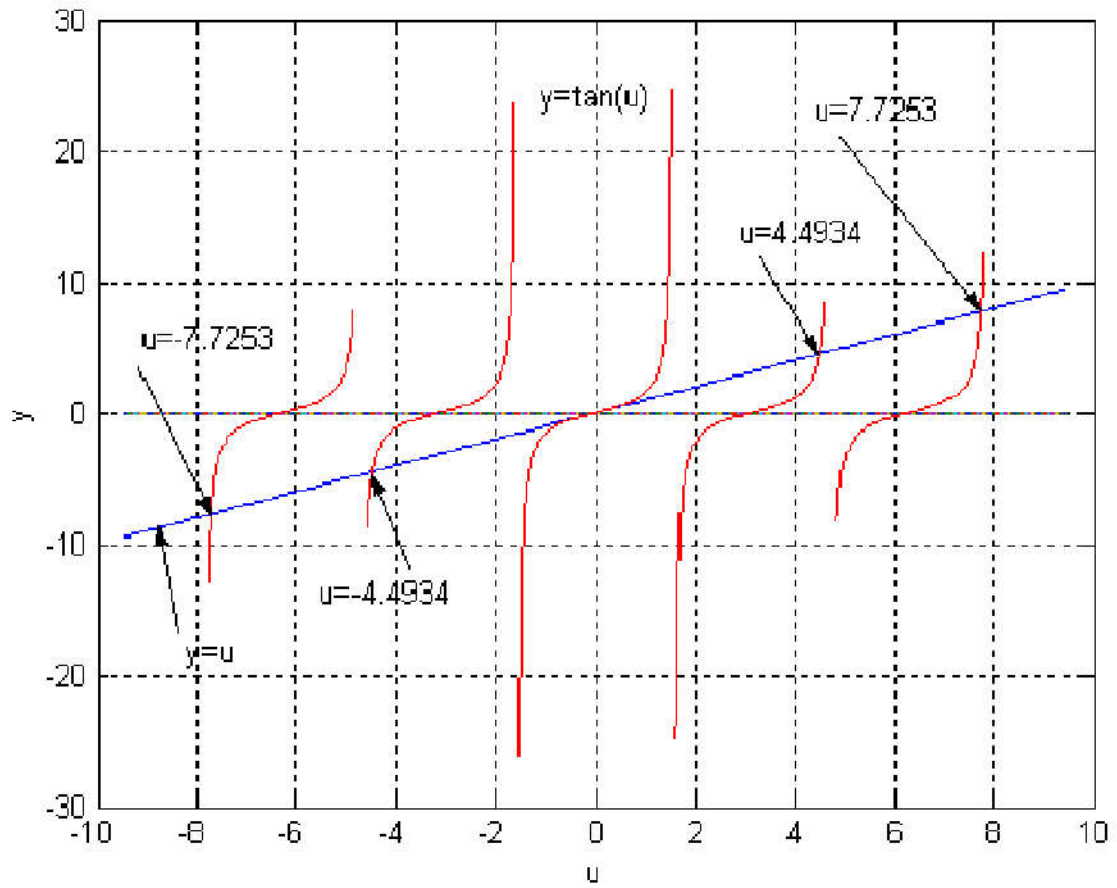
$$m = \pm 1, \pm 2, \dots$$



$\alpha \cos \alpha - \sin \alpha = 0$ 即 $\alpha = \tan \alpha$, 次极大



作图求解



```

clear
u=-3*pi:0.001*pi:3*pi;
y1=u;
plot(u,y1,'b')
hold on
y0=0;
plot(u,y0)
hold on
u=-pi/2.05:0.001*pi:pi/2.05;
y2=tan(u);
plot(u,y2,'r')
hold on
u=-3*pi/2.05:0.001*pi:-pi/1.95;
y2=tan(u);
plot(u,y2,'r')
hold on
u=-5*pi/2.02:0.001*pi:-3*pi/1.95;
y2=tan(u);
plot(u,y2,'r')
hold on
u=pi/1.95:0.001*pi:3*pi/2.05;
y2=tan(u);
plot(u,y2,'r')
hold on
u=3*pi/1.95:0.001*pi:5*pi/2.02;
y2=tan(u);
plot(u,y2,'r')
xlabel('u')
ylabel('y')
yy=inline('tan(u)-u','u');
[u,foval,exitflag,output]=fzero(yy,-5*pi/2)
%[u,foval,exitflag,output]=fzero(yy,-pi/2)
grid on

```

α	$(\sin \alpha / \alpha)^2$	
0	1	主极大
π	0	极小
1.430 $\pi=4.493$	0.04718	次极大
2π	0	极小
2.459 $\pi=7.725$	0.01694	次极大
3π	0	极小
3.470 $\pi=10.90$	0.00834	次极大
4π	0	极小
4.479 $\pi=14.07$	0.00503	次极大
5π	0	极小

(2) 条纹宽度

$$\left. \begin{array}{l} \text{由零点条件 } a \sin \theta_m = m\lambda \\ a \sin \theta_{m+1} = (m+1)\lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} \theta_m = m\lambda / a \\ \theta_{m+1} = (m+1)\lambda / a \end{array}$$

* \Rightarrow 条纹角宽度 $\Delta\theta = \theta_{m+1} - \theta_m = \lambda / a$

相邻两暗点之间的间隔为 $\Delta x = \lambda f / a$ (6-22)

* 对主极大 $\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} - \left(-\frac{\lambda}{a}\right) = \frac{2\lambda}{a}$ $\Delta x = 2\lambda f / a$

(3) 条纹颜色

暗点条件

$$a \sin \theta_x = m\lambda$$

$$\theta_x \simeq \sin \theta_x = m\lambda / a$$

暗点位置

$$x_m = f \cdot m\lambda / a$$

不同波长的光有不同的暗/亮点位置

自然光入射,彩色条纹, $x_m \nearrow$, 条纹 紫 \rightarrow 红

(B) Y 轴图样 ($x=0$)

$$I(x, y) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

$$\beta = \frac{1}{2} kb \sin \theta_y \quad I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (6-24)$$

夫琅和费衍射在Y轴上的光强分布特性与X轴类似。

$$\beta = m\pi \begin{cases} m = 0 \text{ 主极大} & \text{对应 } P_0 \text{ 点} \\ m = \pm 1, \pm 2, \dots & \text{暗点位置} \end{cases} \quad \sin \theta_y = m\lambda / b$$

角宽度 $\Delta\theta_y = \lambda / b$

距离宽度 $\Delta y = f\lambda / b$

(C) 衍射图样

$$I(x, y) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

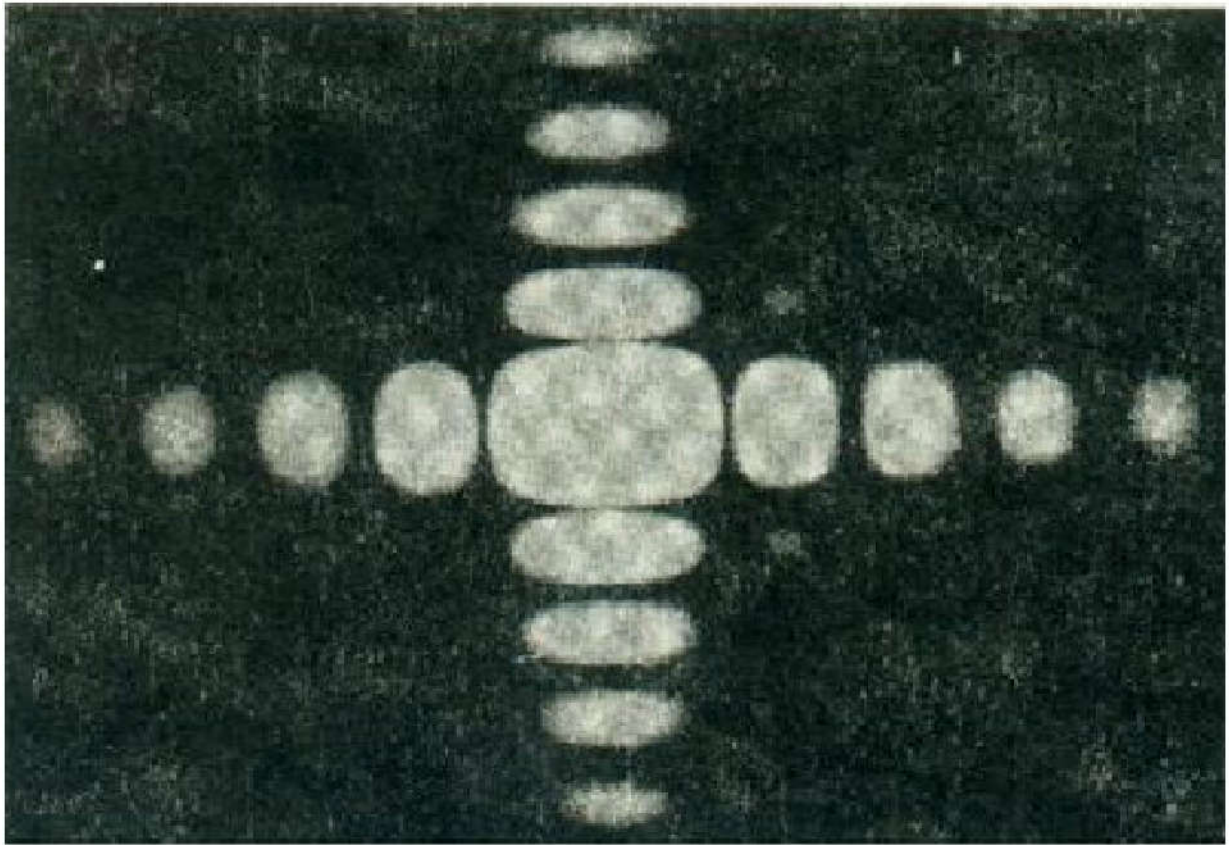
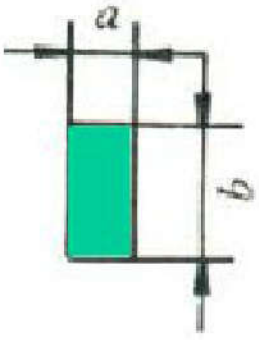
- * 在x、y轴以外各点的光强度，可按上式进行计算；
- * 绝大部分光能集中在中央亮斑，中央亮斑的X/Y轴边缘分别由以下条件决定：

$$a \sin \theta_x = \pm \lambda \quad b \sin \theta_y = \pm \lambda$$

- * 中央亮斑半角宽度 $\Delta \theta_x = \lambda / a$ $\Delta \theta_y = \lambda / b$ (6-25)

- * 相应的距离半宽度 $\Delta x = f \lambda / a$ $\Delta y = f \lambda / b$ (6-26)

- * (6-25) 和 (6-26) 式也是次极大的角宽度和宽度的表达式。



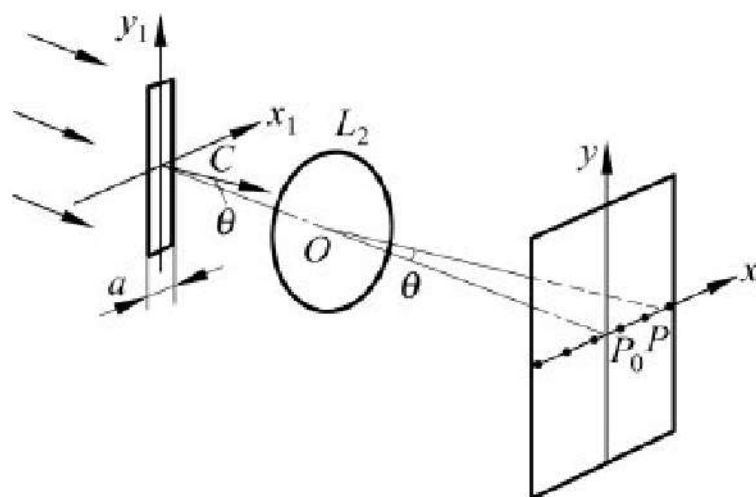
* $b > a$,
 b 方衍射条纹窄

* 最后结果是 X 方向与 Y 方向衍射条纹的乘积，只有 X, Y 方向都是亮级的地方才显亮斑

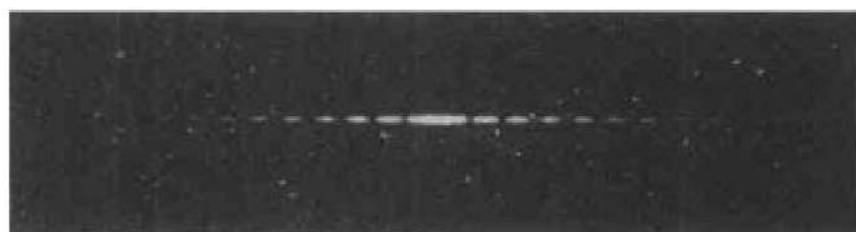
6.3.3 单缝衍射

1. 单缝衍射装置

矩孔 $b \gg a$,
即成狭缝(单缝);



(a) 原理图



(b) 衍射图样

图6-12 单缝的夫琅和费衍射

2. 图样讨论

$$I(x, y) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

* 矩孔变成狭缝(单缝), 有 $b \gg a$;

* $\sin \theta_y = m\lambda / b$, 相应于前几级零点的 $\sin \theta_y$ 极小,

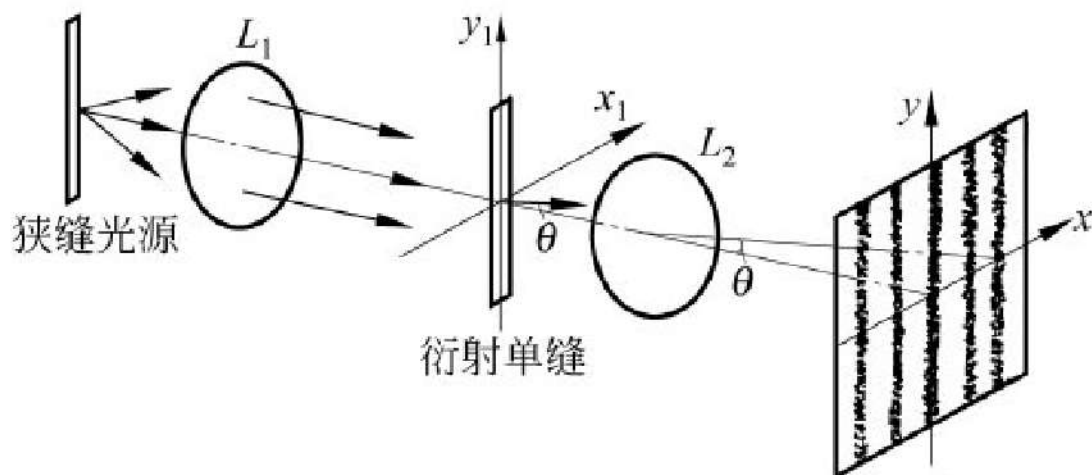
在 Y 方向的衍射效应可以忽略, 衍射图样只分布在 X 轴上;

* 衍射强度分布公式 $I = I_0 (\sin \alpha / \alpha)^2$

式中 $\alpha = \pi a \sin \theta / \lambda$ θ 是衍射角 (6-27)

* 中央亮纹的半角宽度为 $\Delta \theta = \lambda / a$ (6-28)

3. 衍射图样



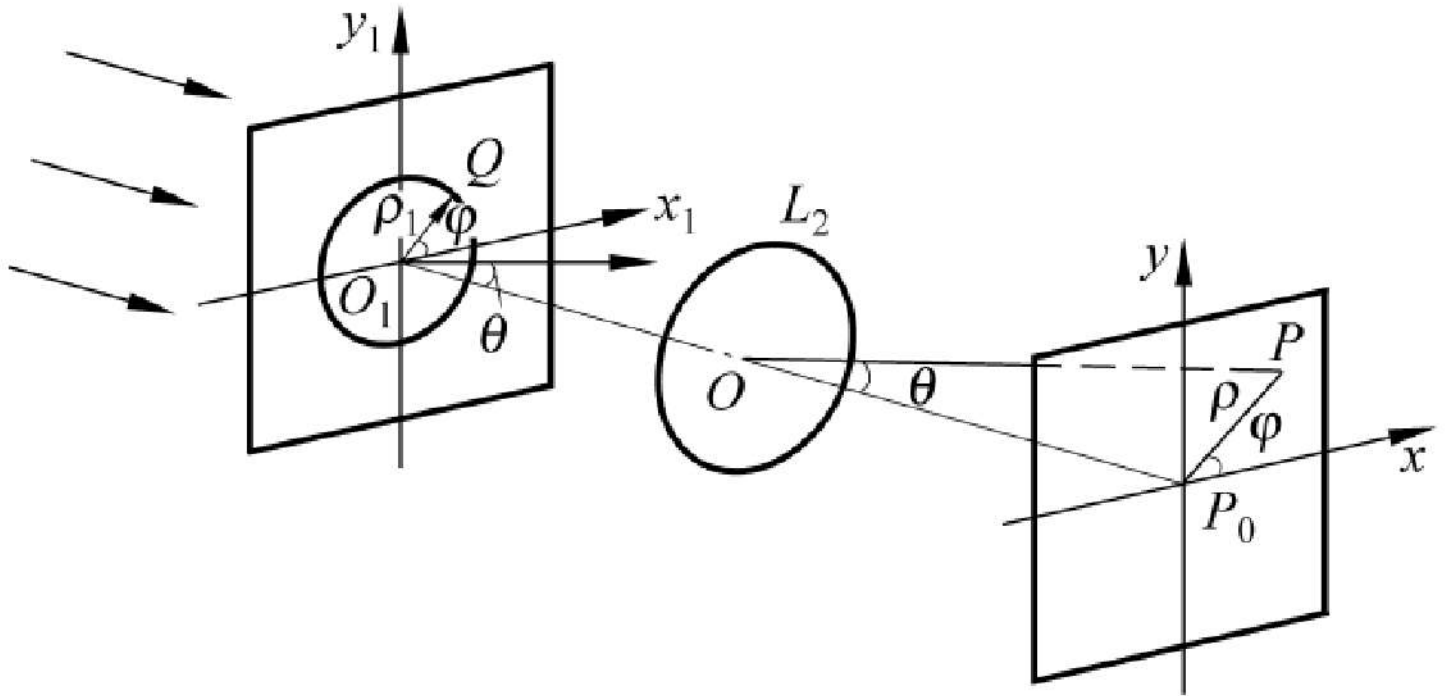
(a) 原理图



(b) 衍射图样

6.3.4 圆孔衍射

Fraunhofer diffraction at a circular aperture



1. 强度公式

The diagram illustrates the Fraunhofer diffraction setup. A slit of width a is shown on the left. A screen is placed at a distance z from the slit. A detector is placed at a distance λz from the screen. The diffraction pattern is shown as a series of horizontal lines of varying lengths, representing the intensity distribution. The central maximum is the longest, and the intensity decreases as the angle increases. The label $(6-30)$ is placed to the right of the diagram.

$$(6-30)$$

$$E(x, y) \xrightarrow[\frac{r}{z} = \theta]{\frac{2\pi}{\lambda} = k} 2\pi a^2 \frac{J_1(ka\theta)}{ka\theta}$$

常数吸收进入 I_0 , 得

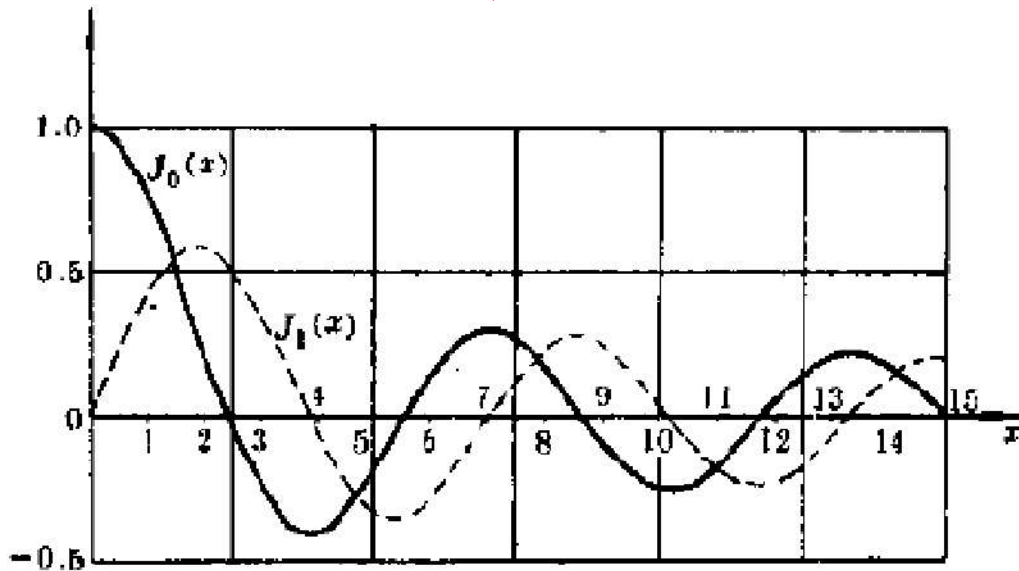
$$I = E \cdot E^* = I_0 \left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right]^2, \quad Z = ka\theta \quad (6-31)$$

2. 强度分布讨论

$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right]^2$$

$$\text{由 } \frac{dI}{dZ} = I_0 \cdot 2 \left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right] \cdot 2 \frac{d}{dZ} \left[\frac{J_1(Z)}{Z} \right] = 0$$

$$J_1(Z) = 0 \begin{cases} Z = 0, \text{ 主极大} & I_0 \\ Z \neq 0, \text{ 极小} & 0 \end{cases} \quad (6-35)$$



* 主极大 $Z = 0$

* 暗环

$J_1(Z)$ 零点 ($Z \neq 0$)

3.832 (1.22 π),

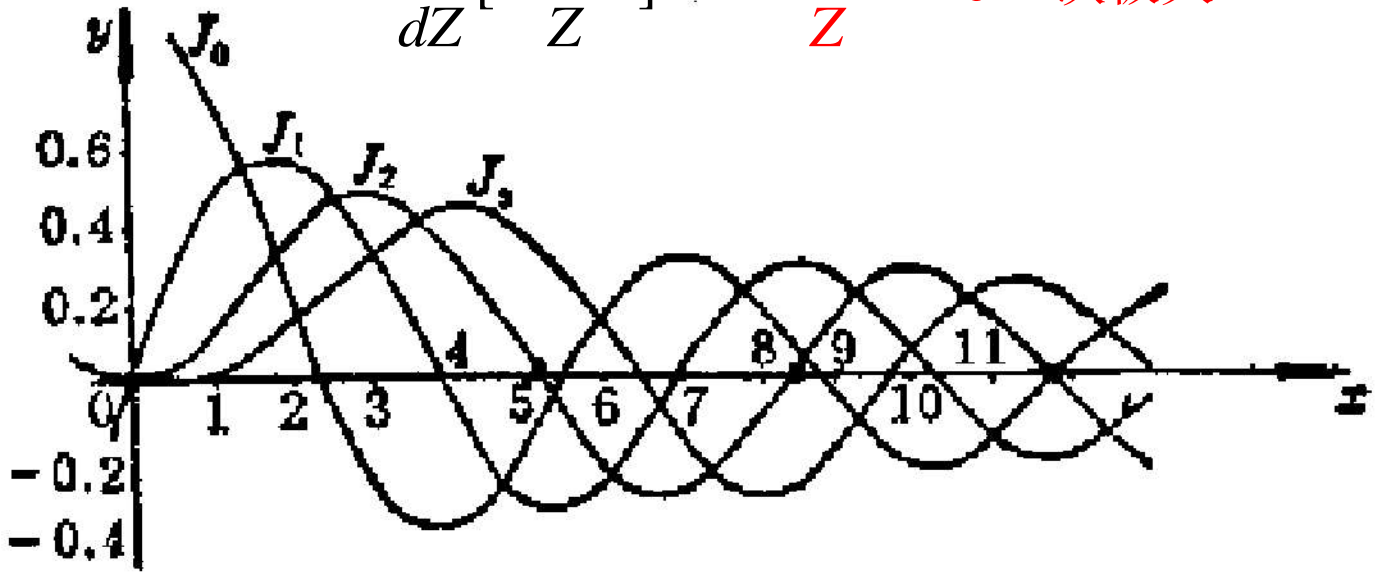
7.016,

10.174 ...

$$\frac{dI}{dZ} = I_0 \cdot 2 \left[\frac{2J_1(Z)}{Z} \right] \cdot 2 \frac{d}{dZ} \left[\frac{J_1(Z)}{Z} \right] = 0$$

$J_2(Z)$ 点在 $J_1(Z)$ 零点之间 } $J_2(Z)$ 零点取 I 的次极大
 $J_1(Z)$ 零点的 I 值已证明为零

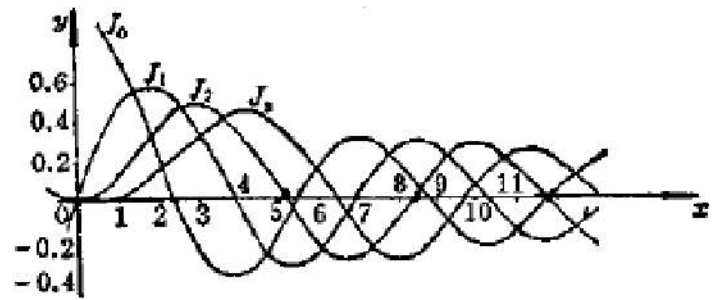
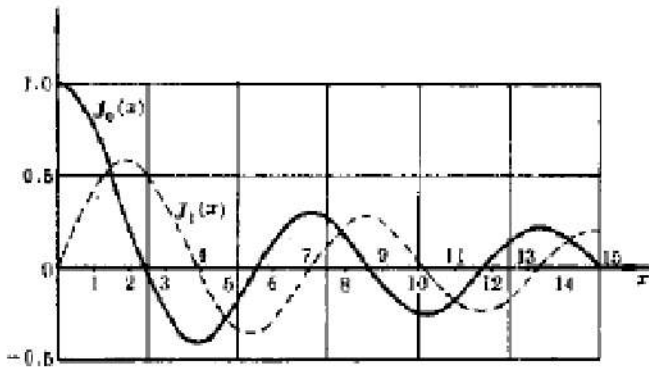
$$\frac{d}{dZ} \left[\frac{J_1(Z)}{Z} \right] = -\frac{J_2(Z)}{Z} = 0 \quad \text{次极大}$$

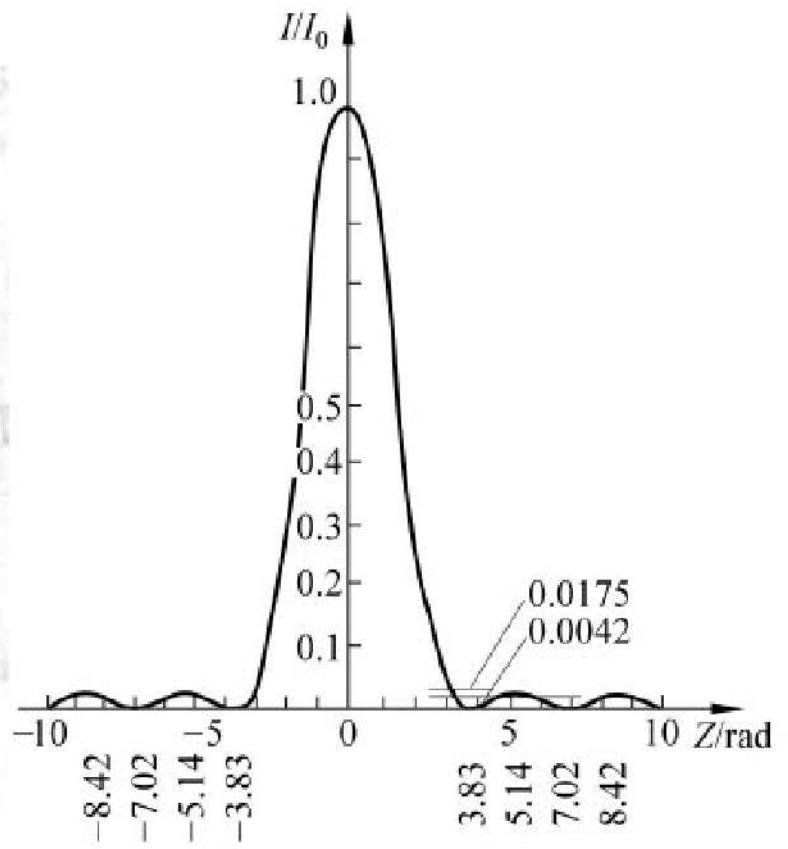
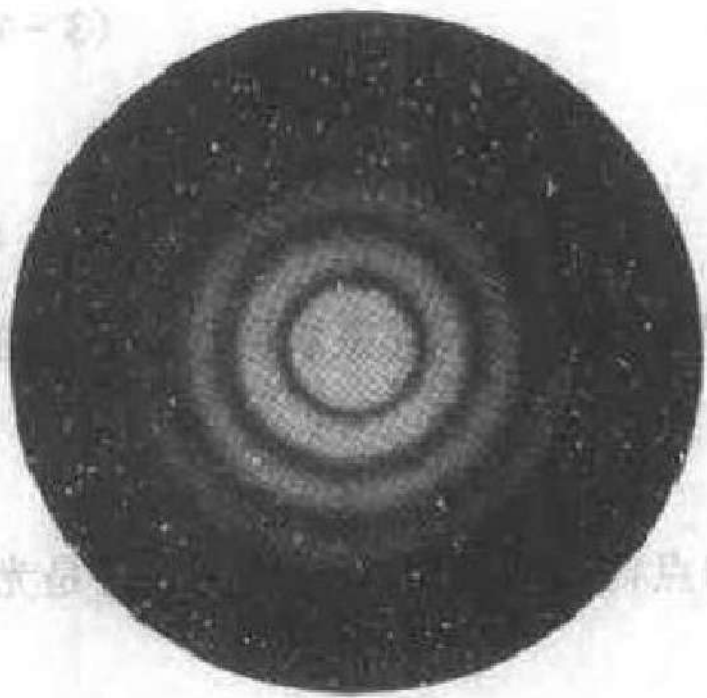


极大和极小	Z	$I/I_0 = [2J_1(Z)/Z]^2$
中央极大	0	1
极小	$1.220\pi = 3.833$	0
次极大	$1.635\pi = 5.136$	0.0175
极小	$2.233\pi = 7.016$	0
次极大	$2.679\pi = 8.417$	0.0042
极小	$3.238\pi = 10.174$	0
次极大	$3.699\pi = 11.620$	0.0016

* 暗环 $J_1(x)$ 零点 $3.833, 7.016, 10.174 \dots$

* 亮环 $J_2(x)$ 零点, 0 (主极大), $5.136, 8.417, 11.620 \dots$





*中央亮纹集中绝大部分光能，83.78%

• 单缝 $[\sin\alpha/\alpha]^2 I_0$,

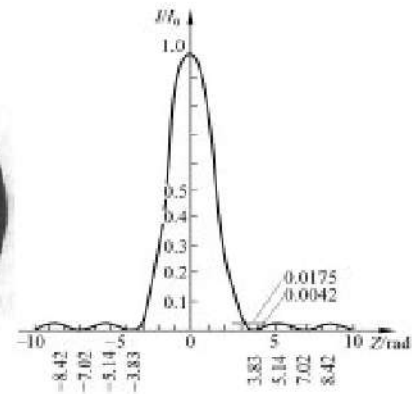
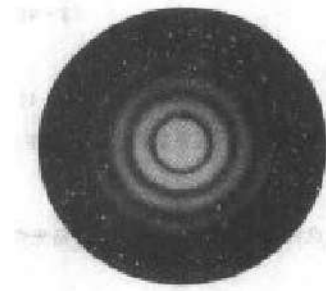
• 圆孔 $[J_1(Z)/Z]^2 I_0$

• $\sin\alpha$ 是**等幅、等周期**振荡

• $J_1(Z)$ 是**降幅、减周期**振荡，因而必然有更多的光能集中在中心亮环。

• 主极大强度:第一次极大强度分别为

单缝 1:0.047 ; 圆孔 1:0.0175



3. 艾里(Airy)斑

夫琅和费圆孔衍射的中央亮斑称为爱里斑。它集中了入射光能的83.78%，其半径 r_0 由第一光强极小处 Z 值(即 $J_1(Z)$ 第一零点的 Z 值 1.22π)相应的 θ 决定，

$$\begin{aligned} \text{即 } \left. \begin{array}{l} ka\theta = 1.22\pi \\ \theta = r_0 / f \end{array} \right\} &\rightarrow ka \frac{r_0}{f} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ar_0}{f} = 1.22\pi \\ &r_0 = 1.22f \frac{\lambda}{D} = 0.61f \frac{\lambda}{a} \end{aligned} \quad (6-36)$$

式中 $D = 2a$ 是衍射孔直径

6.4 光学成像系统的分辨本领

6.4.1 在像面观察的夫琅和费衍射

无穷远点物在成像系统焦面上所成的像是夫琅和费衍射像

近处点物在成像系统像面上所成的像是夫琅和费衍射像

* 点物在成像系统像面上所成的像是孔径光阑的夫琅和费衍射图样

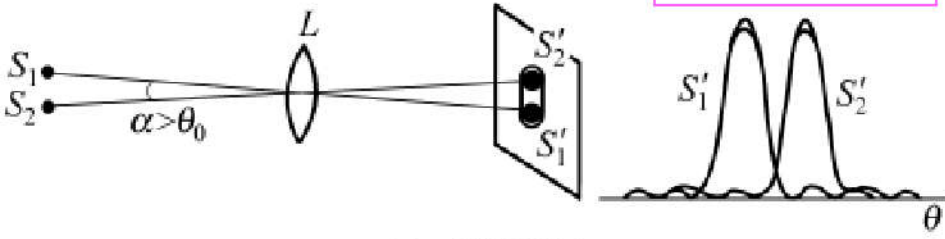
6.4.2 光学成像系统的分辨本领

分辨本领

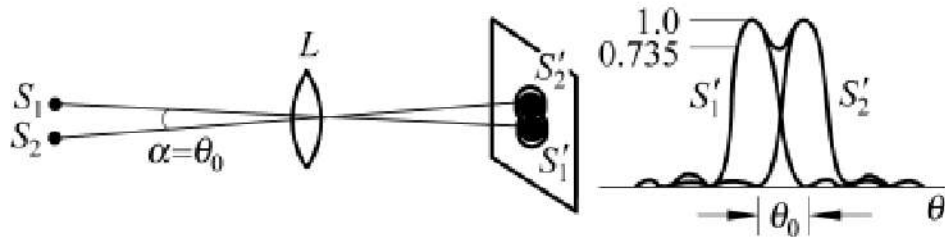
光学成像系统能分辨开两个靠近的点物或物体细节的能力，它是光学成像系统的重要指标。

- * 由于衍射效应，光学系统的分辨极限决定于系统对点物成像的艾里斑。

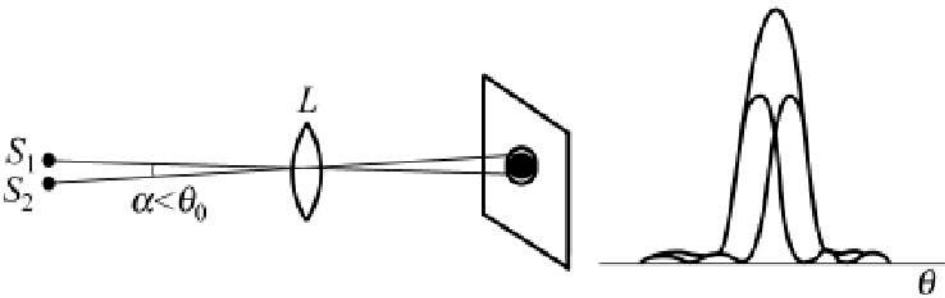
瑞利判据



(a) 分辨良好



(b) 恰能分辨



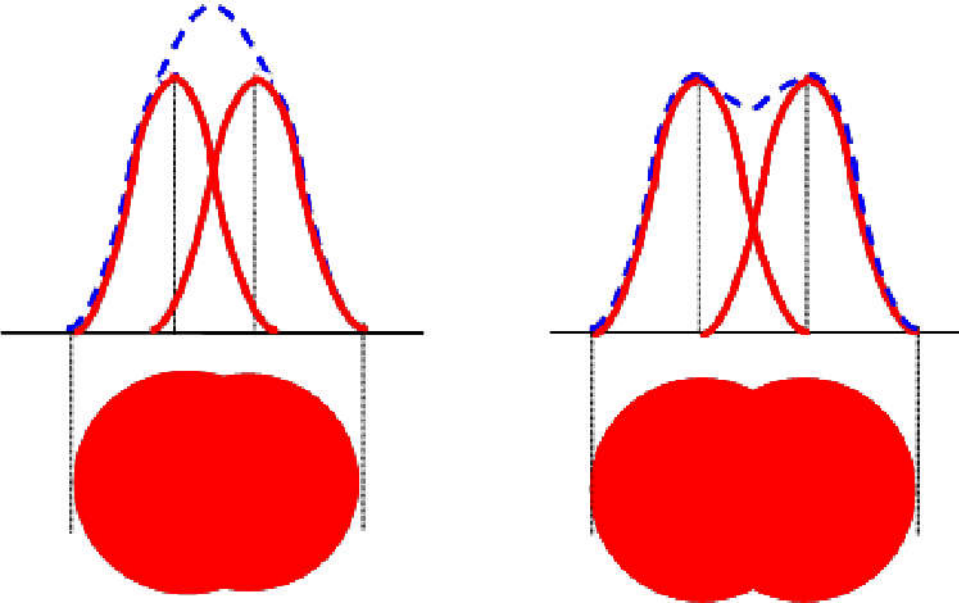
(c) 不能分辨

一个点物衍射图样的中央极大与近旁另一个点物衍射图样的第一极小重合，作为光学成像系统的恰能分辨两个点物的极限。

能分辨的两点物间的最小夹角就**等于艾里斑对衍射孔的张角**。

瑞利判据

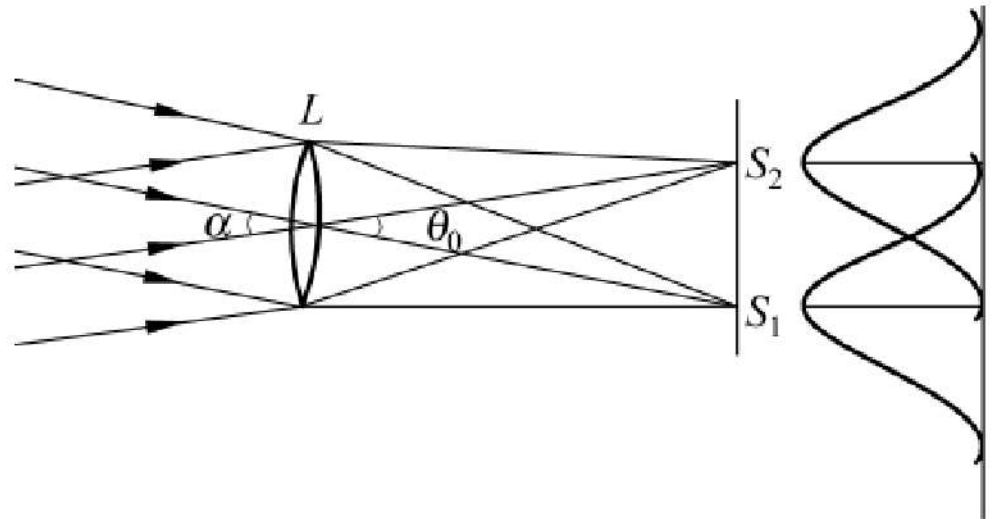
一个点物衍射图样的中央极大与近旁另一个点物衍射图样的第一极小重合，作为光学成像系统的恰能分辨两个点物的极限。



能分辨的两点物间的最小夹角就等于艾里斑对衍射孔的张角。

1. 望远镜的分辨本领

望远镜的
最小分辨
角 α ，即
是爱里斑
的角半径。



$$\alpha = \theta_0 = 1.22\lambda/D \quad (6-41)$$

D — 物镜直径

D 越大，分辨本领越高

ASTRONOMY MIRRORS

Subaru 8.3-m mirror blank hits the road

(1994) 33-ton 8.31-m-diameter



West Texas

McDonald Observatory

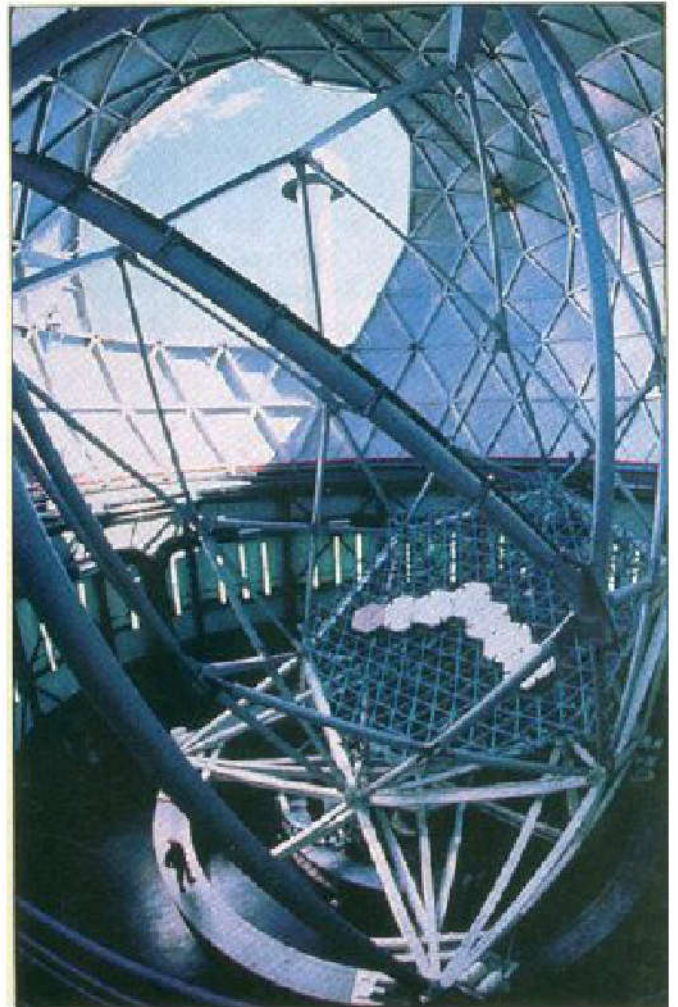
Hobby — Eberly Telescop(HET)

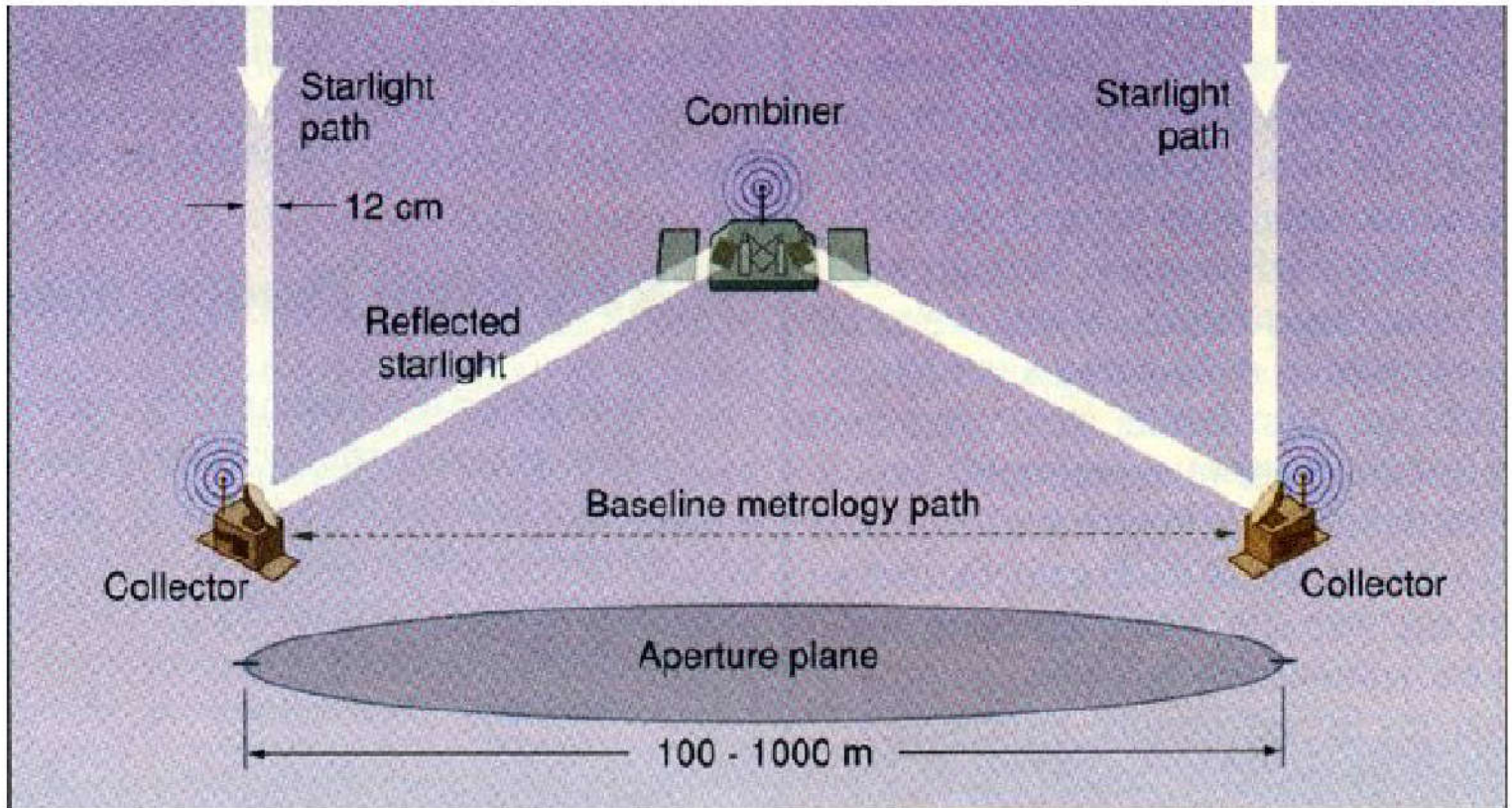
96年 9.2m

1997年

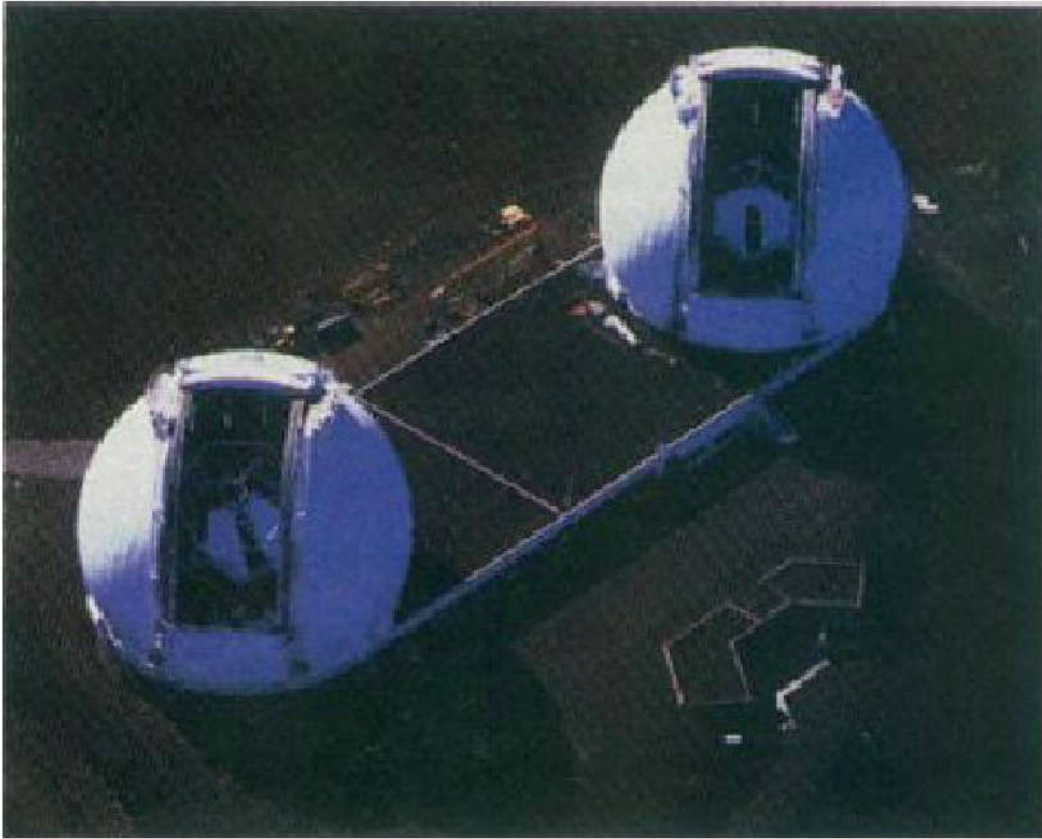
Hobby-Eberly Telescope

91 individual mirrors
11-m-diameter



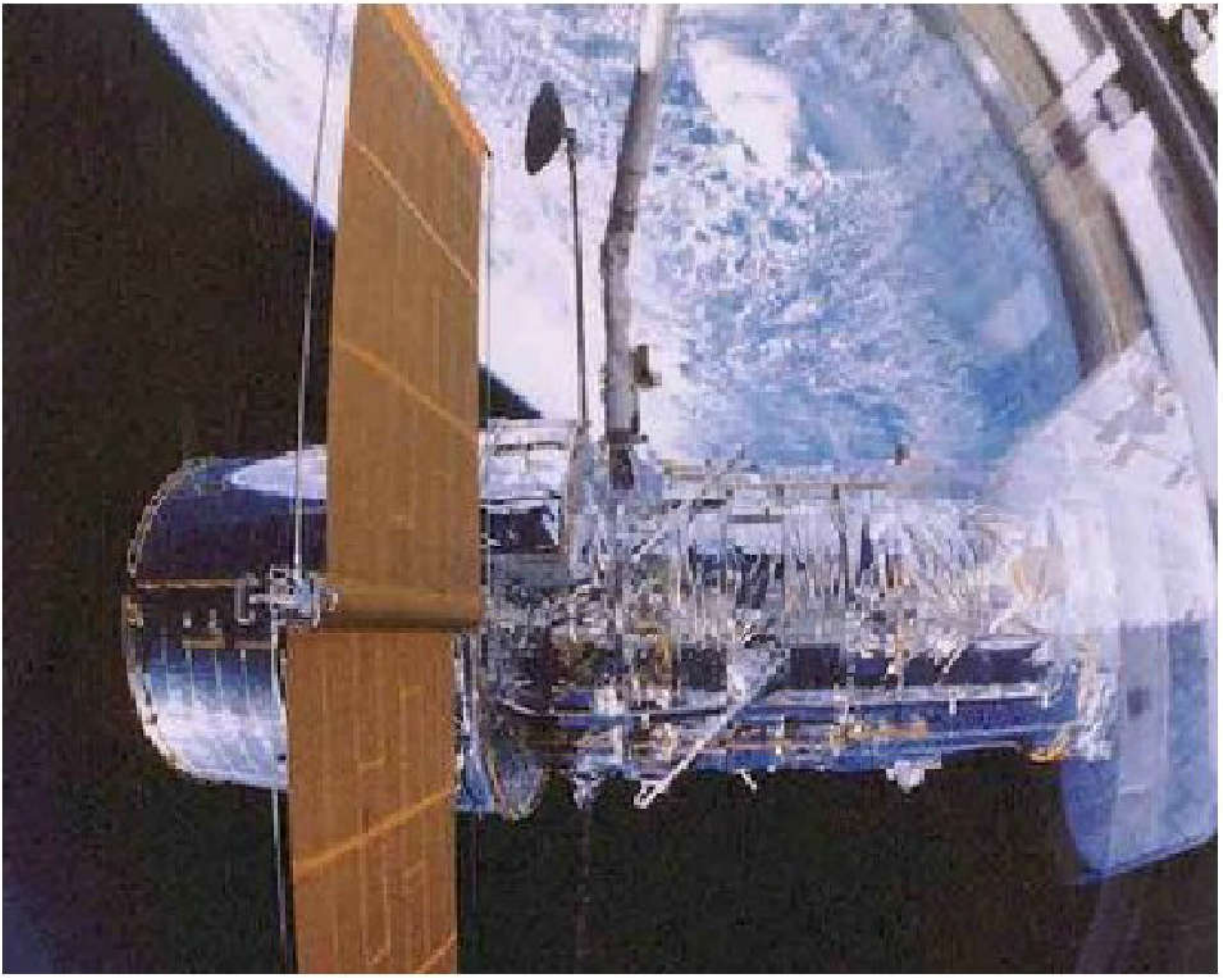


Angular resolution of less than 1 milliarcsecond

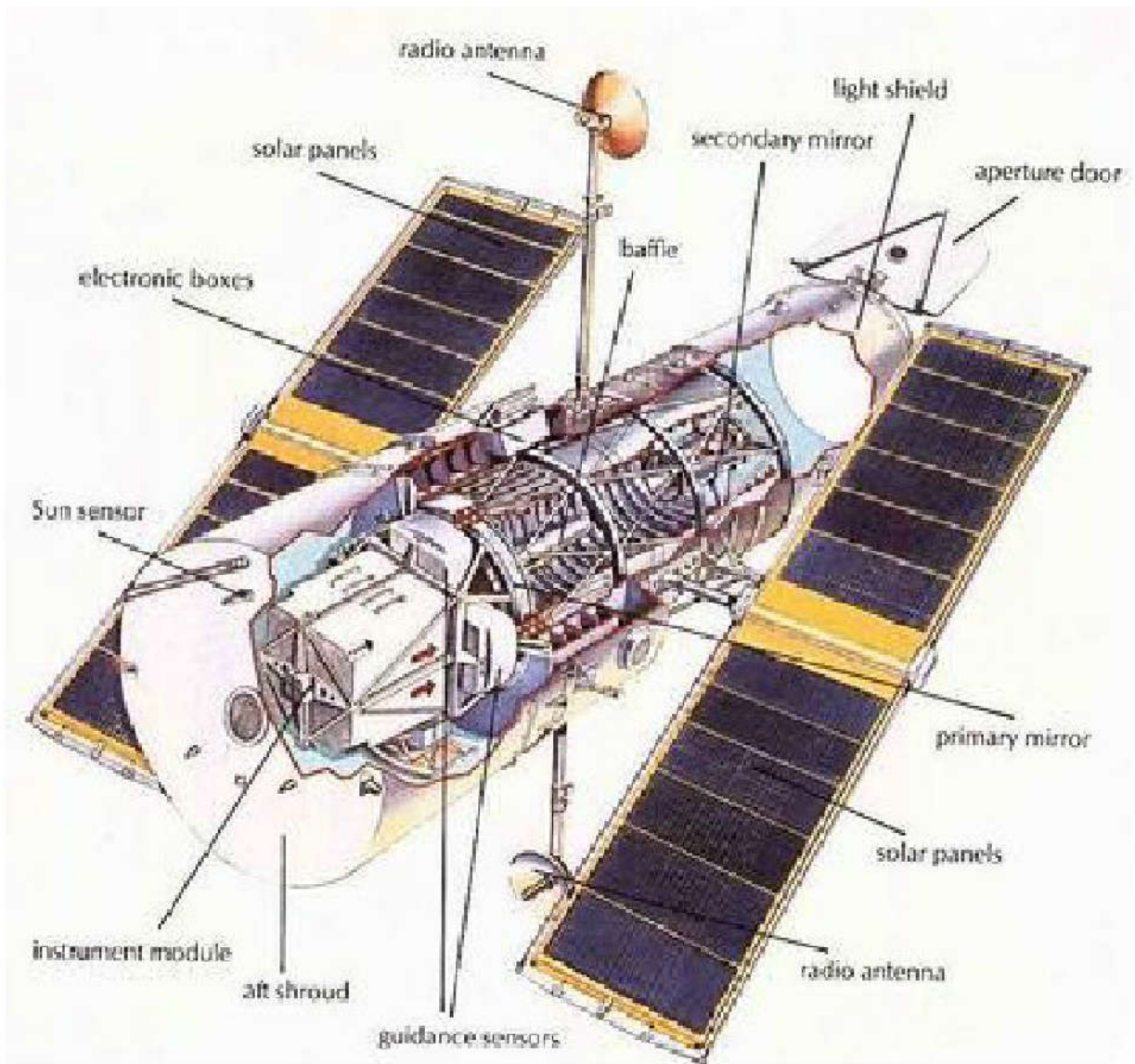


2001年 85-m-wide telescope (NASA)

National Aeronautica and Space Administration









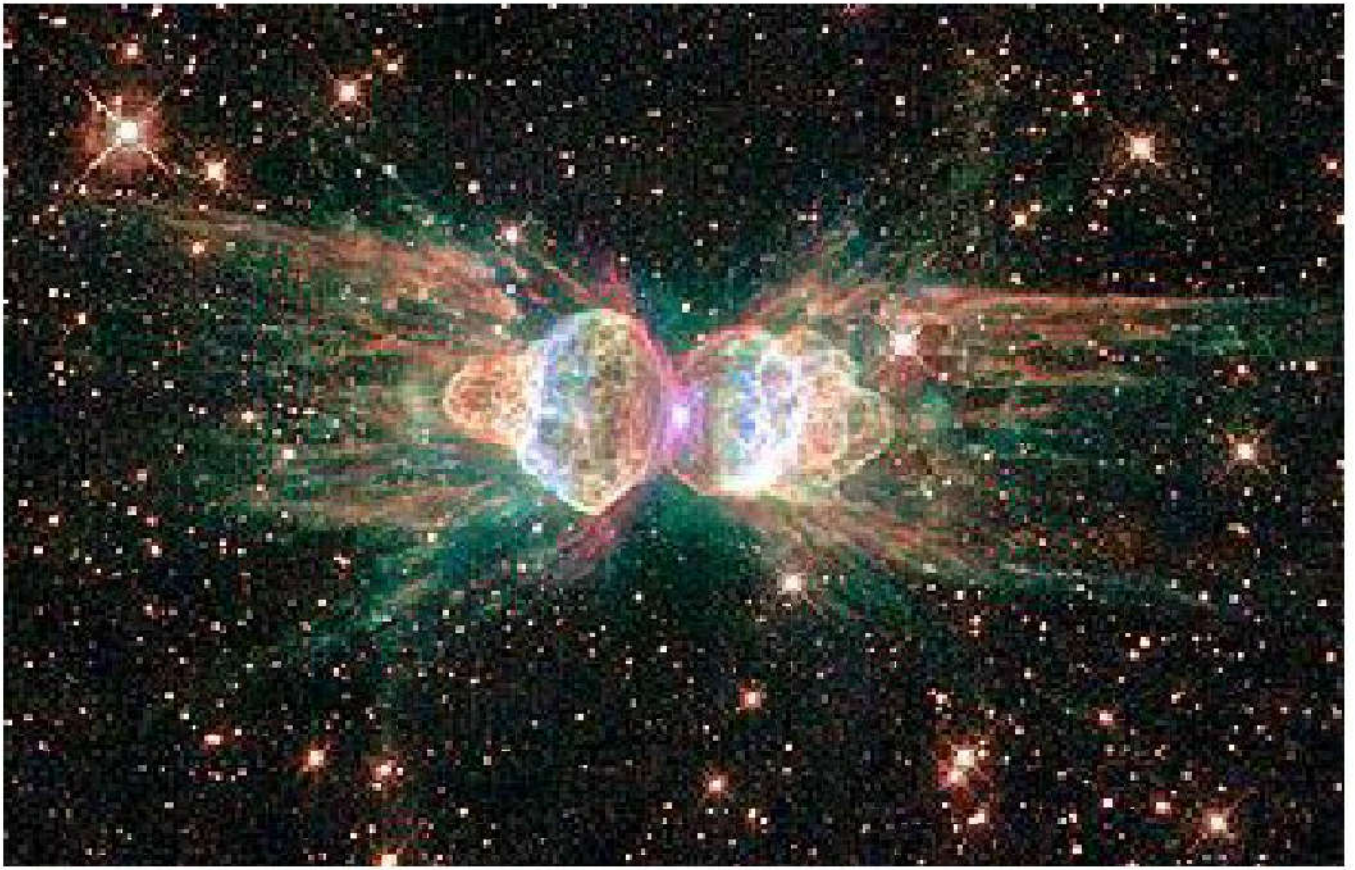
S82E5937 1997:02:19 07:06:57



哈勃望远镜拍到公元前8000多年死亡的恒星残骸



距地球两千八百万光年的宽边帽星系



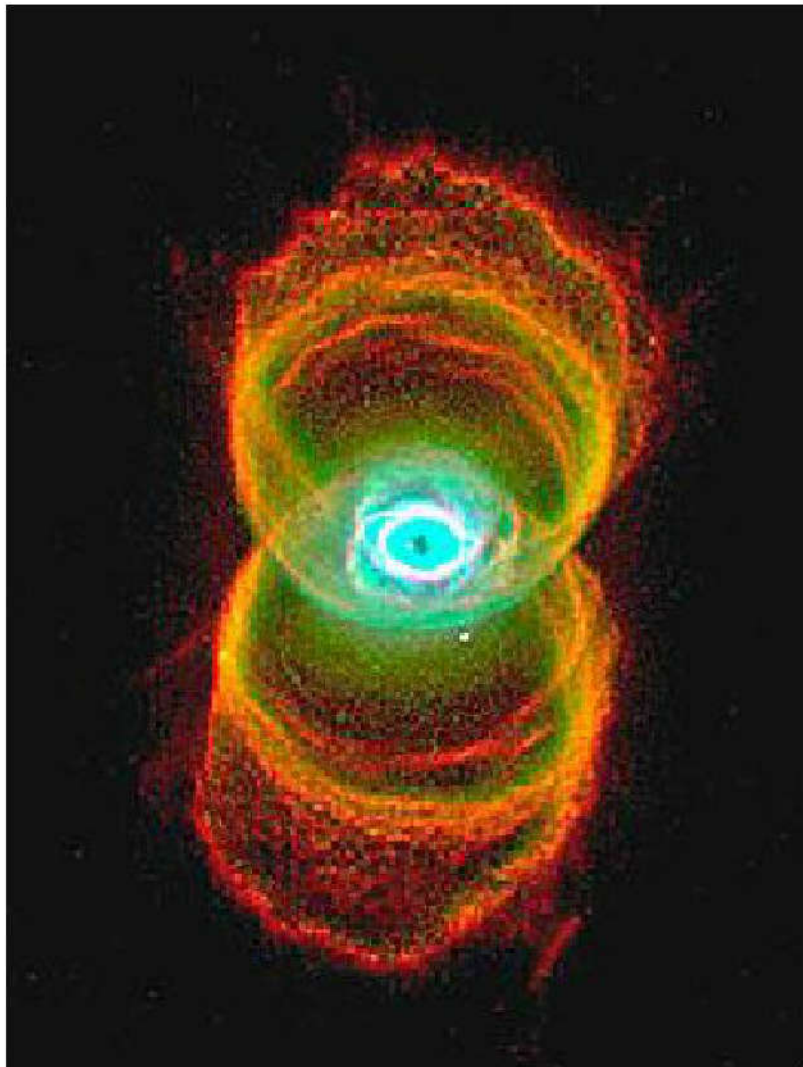
被命名为蚂蚁星云的Mz3



被称为爱斯基摩星云的NGC 2392



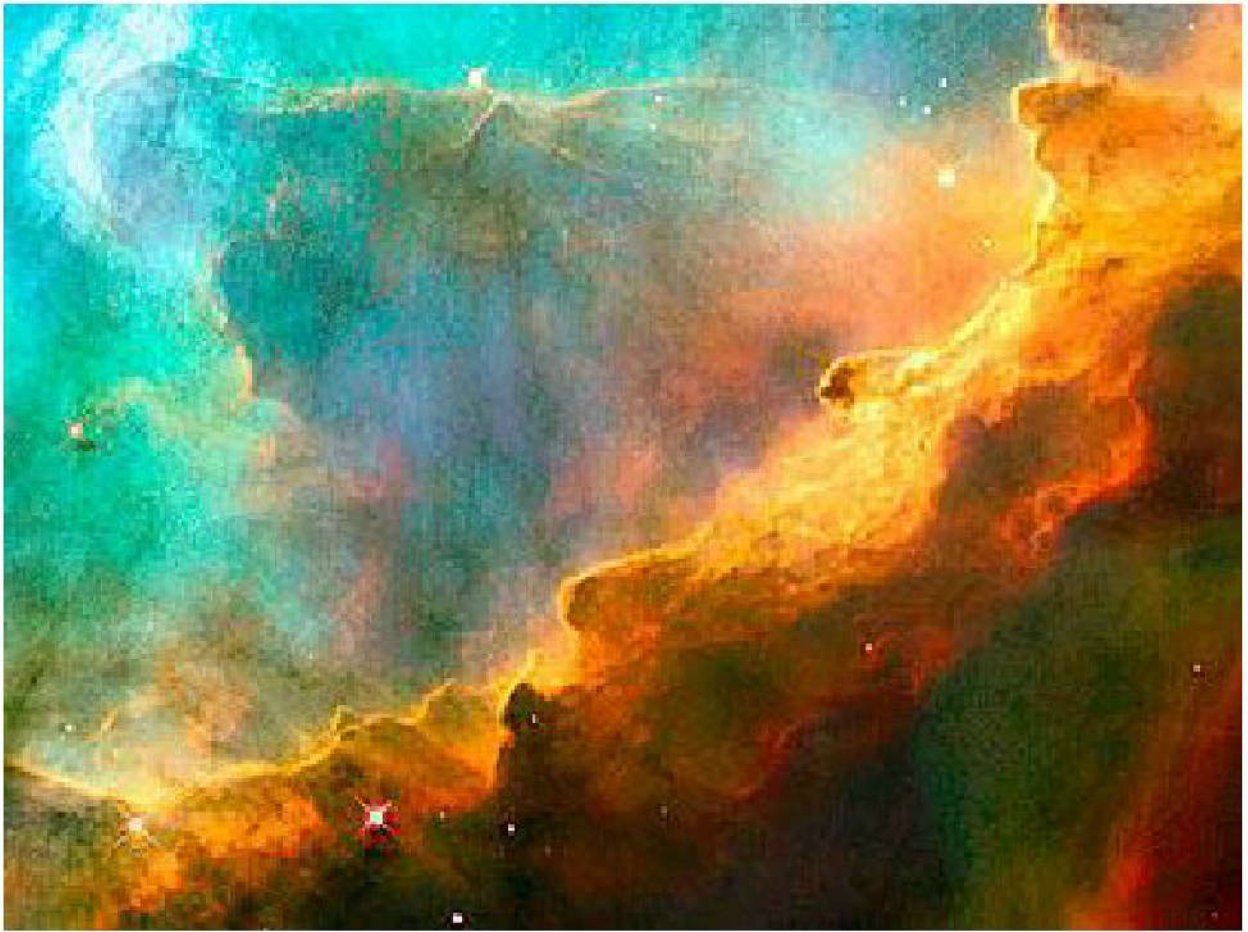
猫眼星云



距地球八千光
年的沙漏星云



锥形星云



距地球五千五百光年的天鹅星云中的完美风暴



以凡高作品《星夜》命名的星夜图



遥远的大犬星座的两个螺旋形星系相互碰撞



距地球九千光年的人马座的三裂星云

2. 照相物镜的分辨本领

底片上每 mm 内恰能分开的线条数 N

(i) 底片都在物镜后焦面附近

(ii) 底片上恰能分辨的两条直线之间的距离 ε'

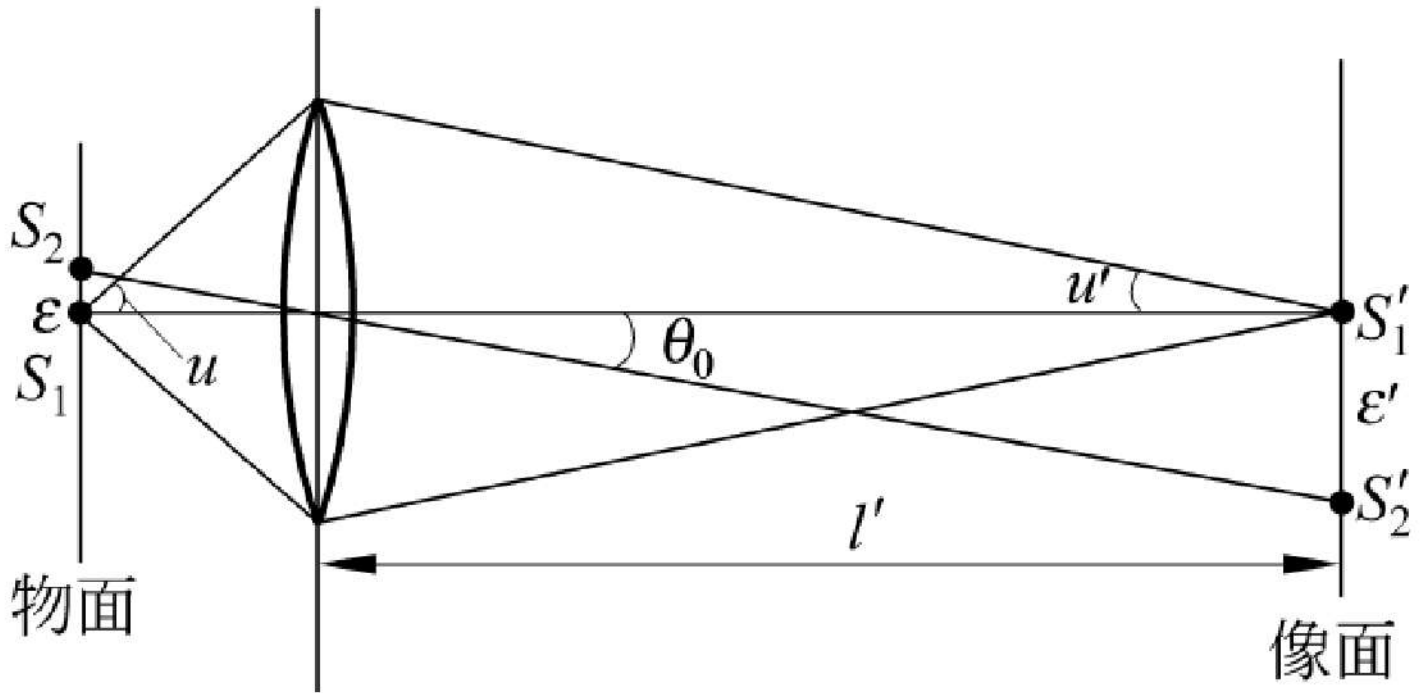
$$\theta_0 = 1.22\lambda / D \rightarrow \varepsilon' = f\theta_0 = 1.22 f\lambda / D$$

$$(iii) \quad N = \frac{1}{\varepsilon'} = \frac{1}{1.22\lambda} \cdot \frac{D}{f} \quad (6-42)$$

D / f ... 相对孔径

3. 显微镜的分辨本领

能分辨的两点物间的最小距离 ε 。



(A) 公式

$$\varepsilon' = l' \theta_0 = 1.22 l' \lambda / D \quad (\text{a})$$

阿贝正弦条件

$$n \varepsilon \sin u = n' \varepsilon' \sin u' \quad (\text{b})$$

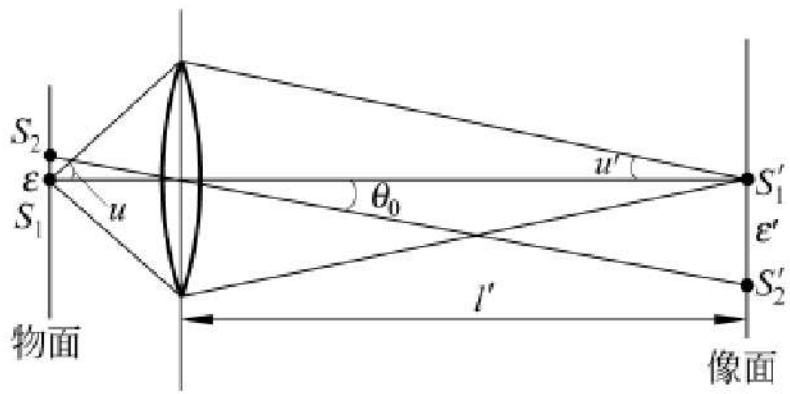
$$n' = 1, \quad \sin u' \approx u' \approx \frac{D/2}{l'} = \frac{D}{2l'} \quad \dots (\text{c}) \quad n, n' \text{ 物、像方折射率}$$

由(a)、(b)、(c)三式，得

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' \sin u'}{n \sin u} = \frac{1.22 l' \lambda}{D} \cdot \frac{D/2l'}{n \sin u} = \frac{0.61 \lambda}{n \sin u} = \frac{0.61 \lambda}{NA} \quad (\text{6-42})$$

$$NA = n \sin u$$

Numerical Aperture 数值孔径



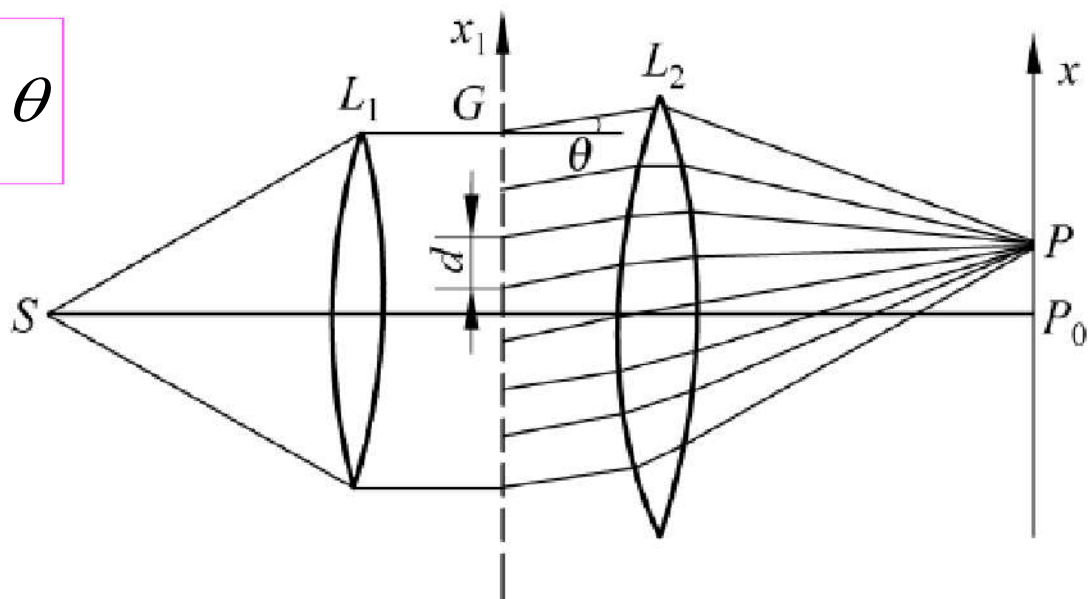
(B) 提高显微镜分辨本领的途径

$$\varepsilon = \frac{0.61\lambda}{n \sin u} = \frac{0.61\lambda}{NA}$$

- * 减小波长 — 附加紫色滤光片；电子显微镜
- * 增大 NA — 提高物方折射率(油浸显微镜)
减小焦距,增大孔径角 u

6.5 夫琅和费多缝衍射

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot ka \sin \theta$$



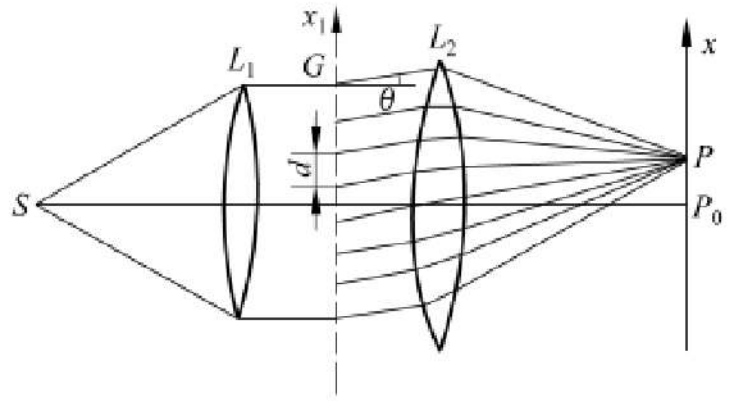
$$I(x, y) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

多缝在 P 点产生的复振幅是 N 个振幅相同、相邻光束程差相等的多光束干涉的结果

单缝衍射，多缝干涉

6.5.1 强度分布公式

1. 不同单缝衍射场的分布相同，但存在位相差



$$E_1(p) = A \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{2} k a \sin \theta \quad a - \text{缝宽}$$

$$E_2(p) = A \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \exp(-i\delta) \quad E_3(p) = A \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \exp(-i2\delta)$$

$$\delta = k d \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad d - \text{狭缝间距}$$

2. 各单缝衍射场的相干叠加

$$E(p) = E_1(p) + E_2(p) + \dots$$

$$= A \frac{\sin \alpha}{\alpha} [1 + \exp(-i\delta) + \exp(-i2\delta) + \dots + \exp(-i(N-1)\delta)]$$

$$\frac{-\exp(-iN\delta)}{-\exp(-i\delta)}$$

$$= \frac{\exp(-iN\delta/2)}{\exp(-i\delta/2)}$$

$$= A \cdot \frac{\alpha}{\alpha} \cdot \frac{N\delta}{\sin(\delta/2)} \exp[-i(N-1)\delta/2]$$

$$= A \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin(N \frac{\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})} \exp[-i(N-1) \frac{\delta}{2}]$$

常数吸收进入 I_0 , 得

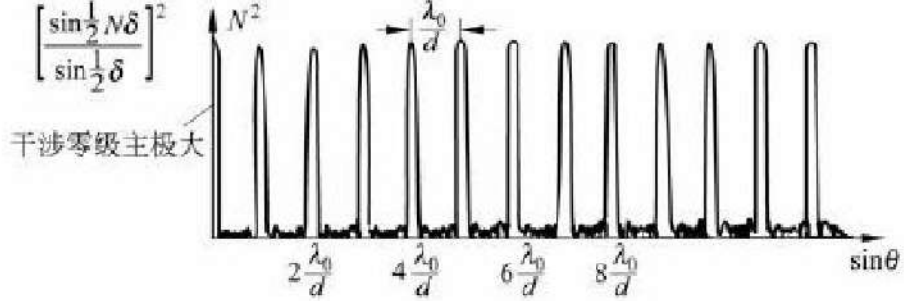
$$I(p) = E(p) \cdot E^*(p) = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cdot \left[\frac{\sin \frac{N}{2} \delta}{\sin \frac{1}{2} \delta} \right]^2 \quad (6-46)$$

式中 $\alpha = \frac{1}{2} ka \sin \theta$, $\delta = kd \sin \theta$

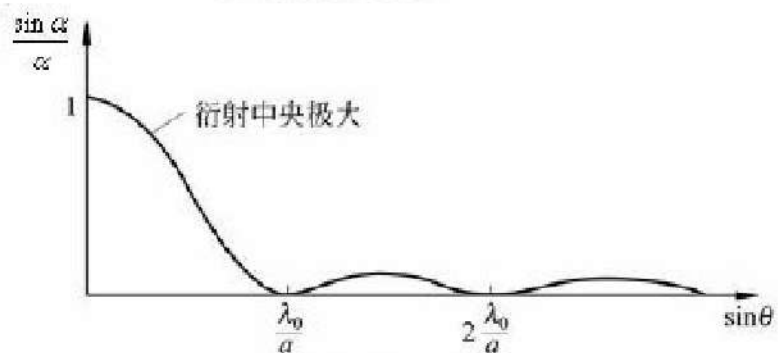
单缝衍射因子

多光束干涉因子

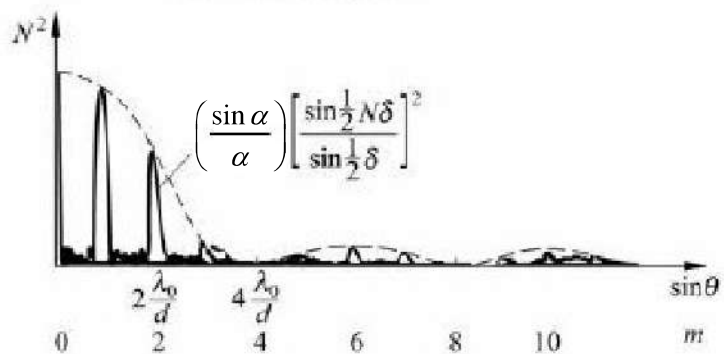
3. 衍射图样



(a) 6缝的干涉因子



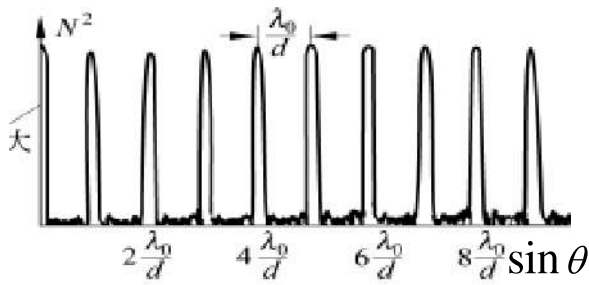
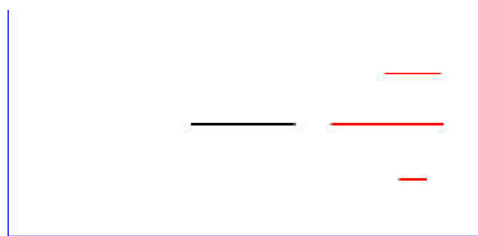
(b) 单缝的衍射因子



(c) 6缝衍射的强度分布曲线

(A) _____

(1)



* 位置

位置

间距

$$\Delta \sin \theta = \sin \theta_{m+1} - \sin \theta_m = \lambda / d$$

(6-51)

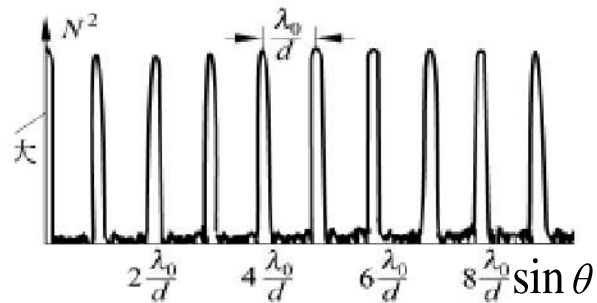
* 数值

$\frac{1}{2}$

$$\sin \frac{1}{2}$$

(2) 干涉极小

$$\left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]^2$$



$$\delta = kd \sin \theta$$

如 $\sin \theta_m = \left[m + (m' / N) \right] \lambda / d$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$m' = 1, 2, \dots, N-1$$

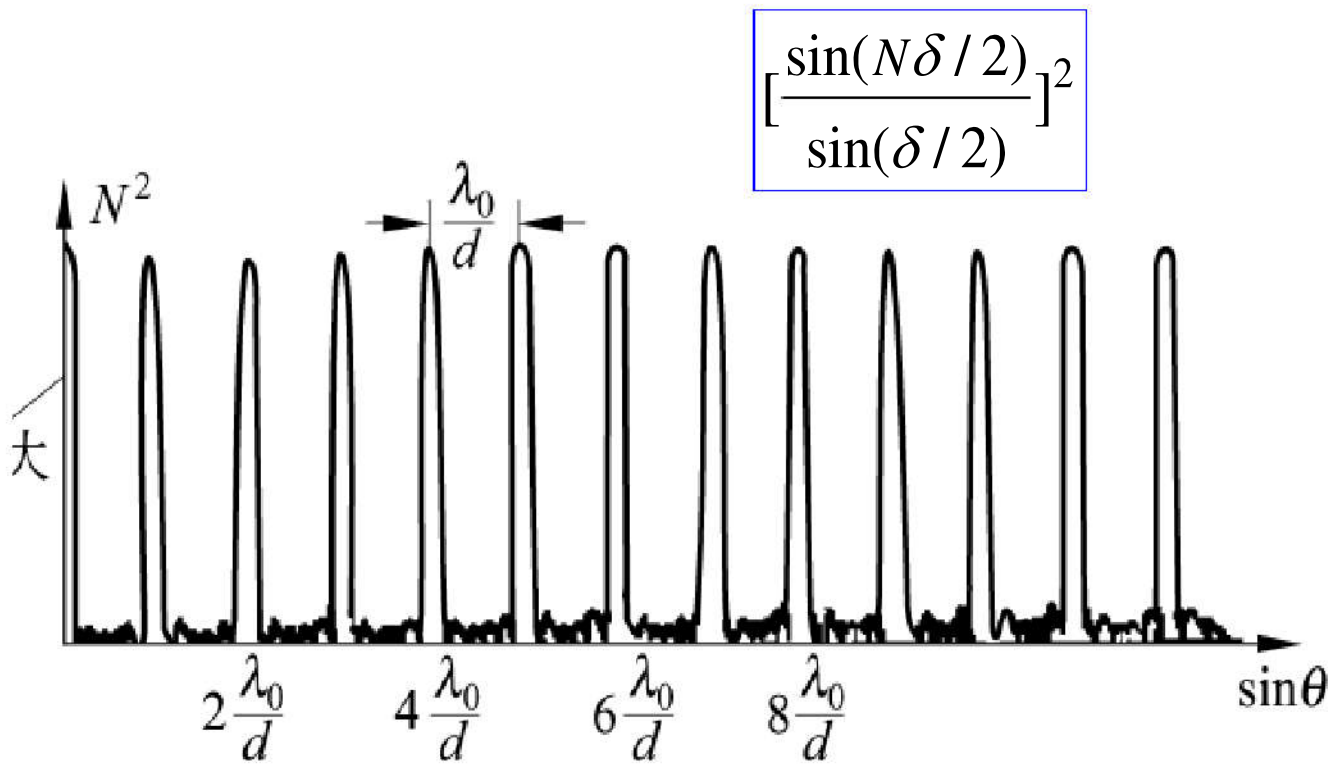
$$\begin{aligned} \sin(N\delta/2) &= \sin[(N/2) \cdot (2\pi/\lambda) \cdot d(m + m'/N)\lambda/d] \\ &= \sin(Nm + m')\pi = 0 \end{aligned}$$

$$\sin(\delta/2) = \sin \left[m + (m' / N) \right] \pi \neq 0$$

在主极大之间存在
(N-1)个极小(零点)

$$I_p = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]^2 = 0$$

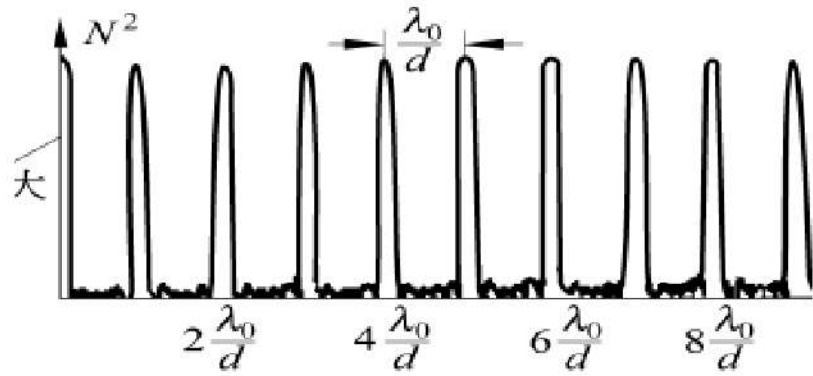
(3) 干涉次极大



$N-1$ 个零点间必然存在次极大 $[(N-2)$ 个]，否则主极大之间恒为零

(4) 干涉条纹角宽度

—两相邻极小之间的角距离



$$\sin \theta_{m'} = \left[m + (m' / N) \right] \lambda / d$$

$$\sin \theta_{m'+1} = \left[m + (m' + 1) / N \right] \lambda / d$$

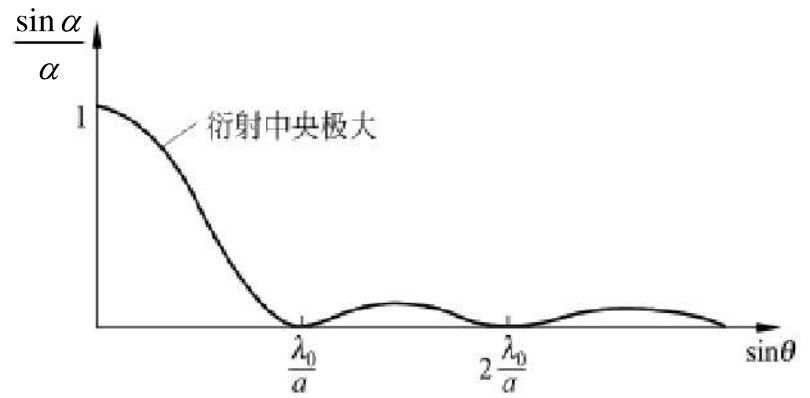
$$\sin \theta_{m'+1} - \sin \theta_{m'} = \Delta(\sin \theta_{m'}) = \cos \theta_{m'} \cdot \Delta \theta = \frac{(m' + 1) - m'}{N} \cdot \frac{\lambda}{d} \theta$$

$$\Rightarrow \Delta \theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \quad (6-50)$$

对主极大 $\Delta \theta_{\text{主}} = 2\Delta \theta = \frac{2\lambda}{Nd \cos \theta}$

(B) 单缝衍射图样

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$$



主极大: $\alpha=0$

极小 $\alpha = \frac{1}{2}ka \sin \theta = \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta = m\pi$

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

(C) 总的强度分布

(1). 各级主极大的强度受到单缝衍射因子的调制。
各级主极大的强度为

$$I = N^2 I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

(2). 多缝衍射花样中可能出现缺级现象

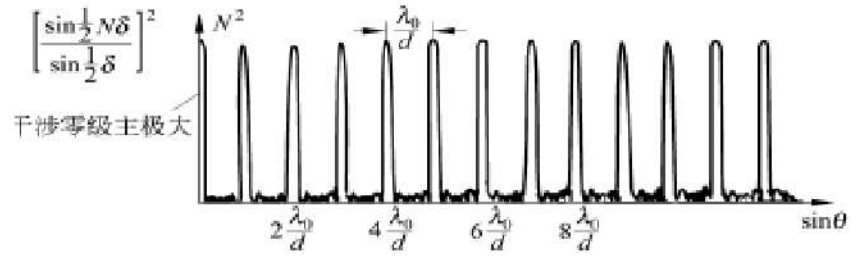
干涉主极大:

$$d \sin \theta = m \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

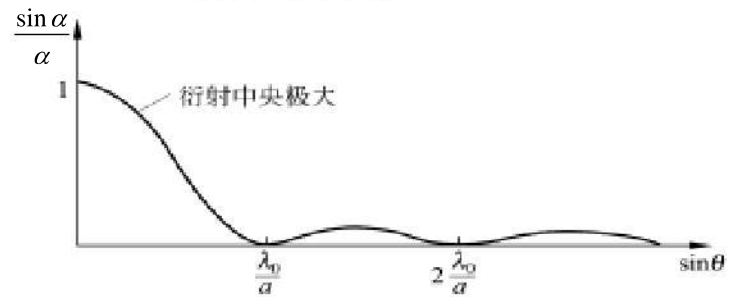
衍射极小:

$$a \sin \theta = n \lambda \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

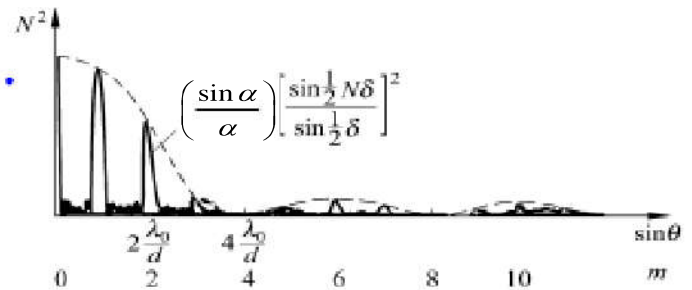
$$m = n \left(\frac{d}{a} \right)$$



(a) 6缝的干涉因子

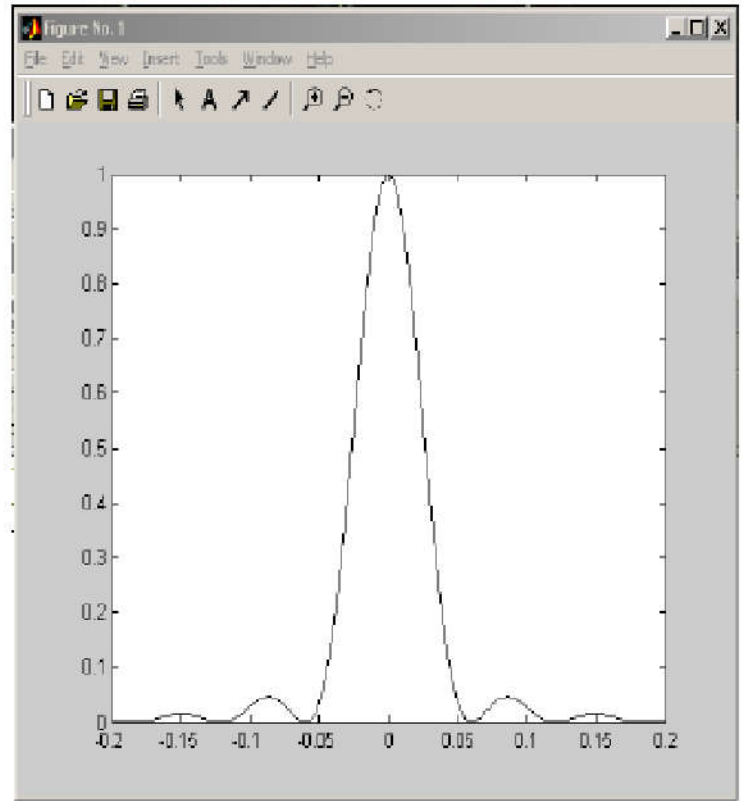
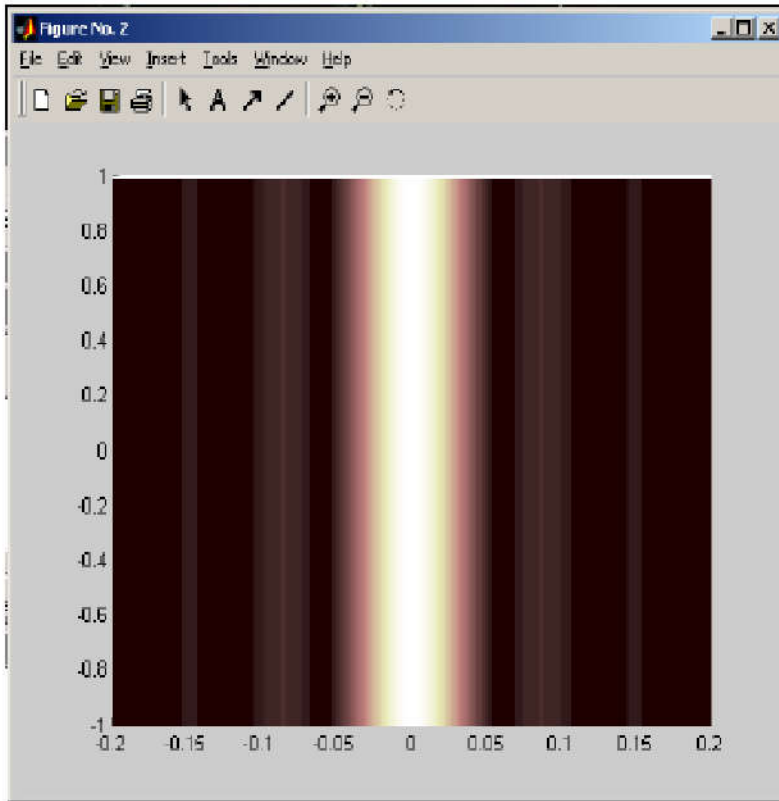


(b) 单缝的衍射因子

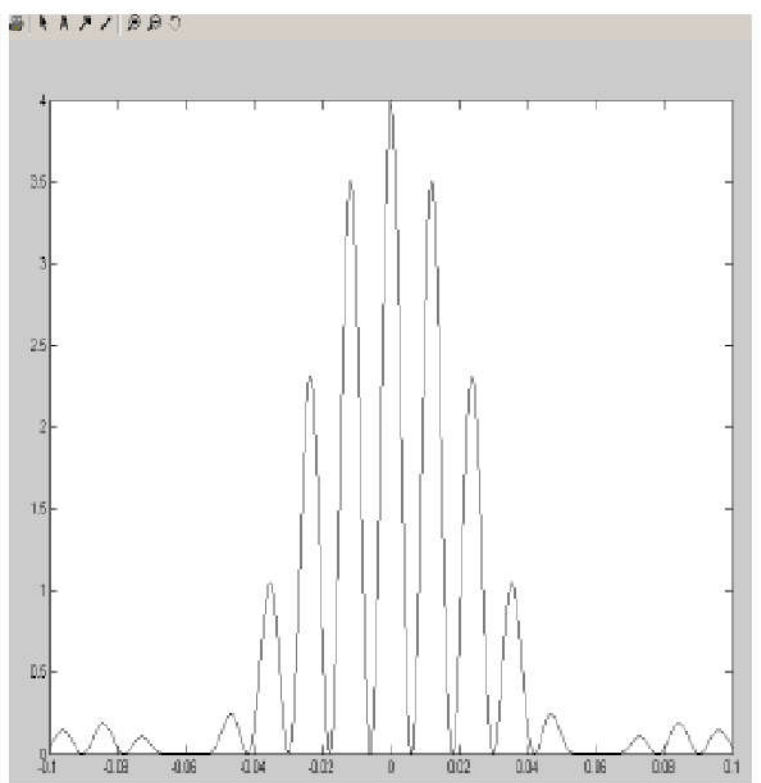
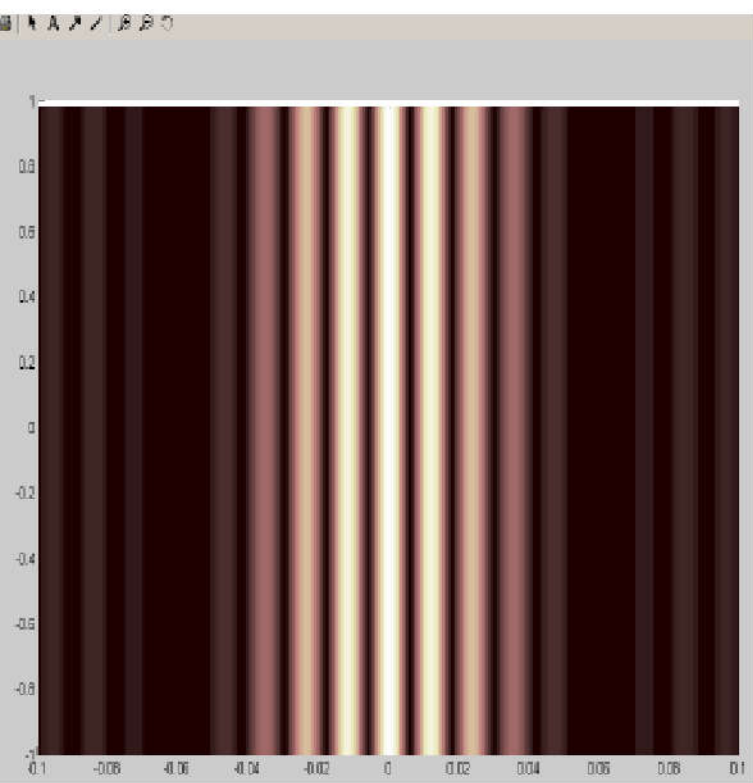


(c) 6缝衍射的强度分布曲线

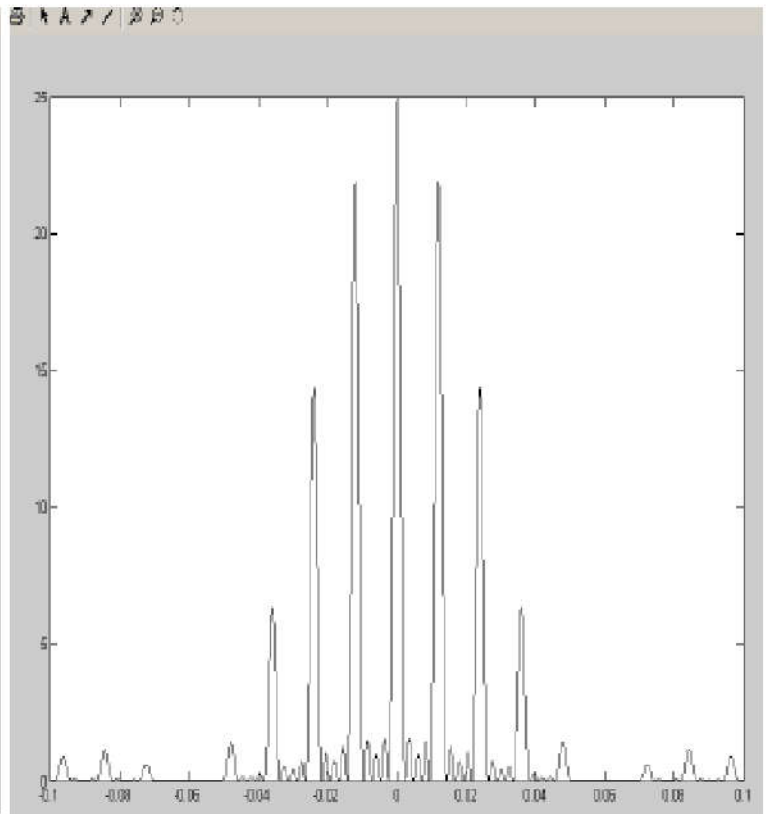
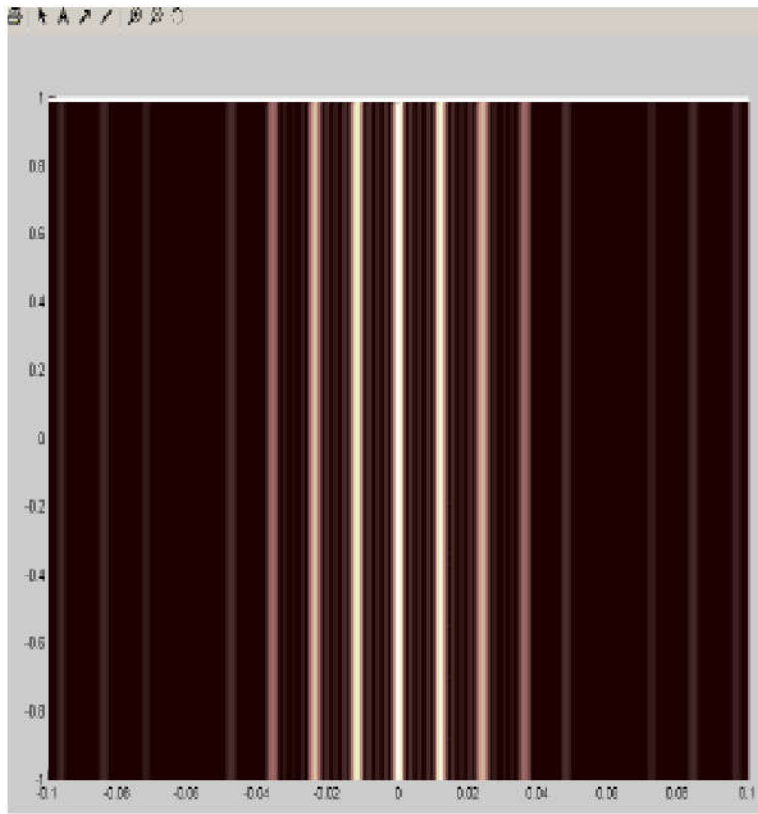
$N=1$



$N=2$



$$N=5$$



1、对于多缝夫琅和费衍射，光栅常数 d 给出了各级主极大值的位置；单缝因子仅影响光强在各主极大值之间的分配。

2、当缝数 N 增大时，衍射图样有两个显著的变化：

(1) 光的能量向主极大的位置集中（为单缝衍射的 N^2 倍）；

(2) 亮条纹变得更加细而亮。