5.4 光学薄膜 Optical films

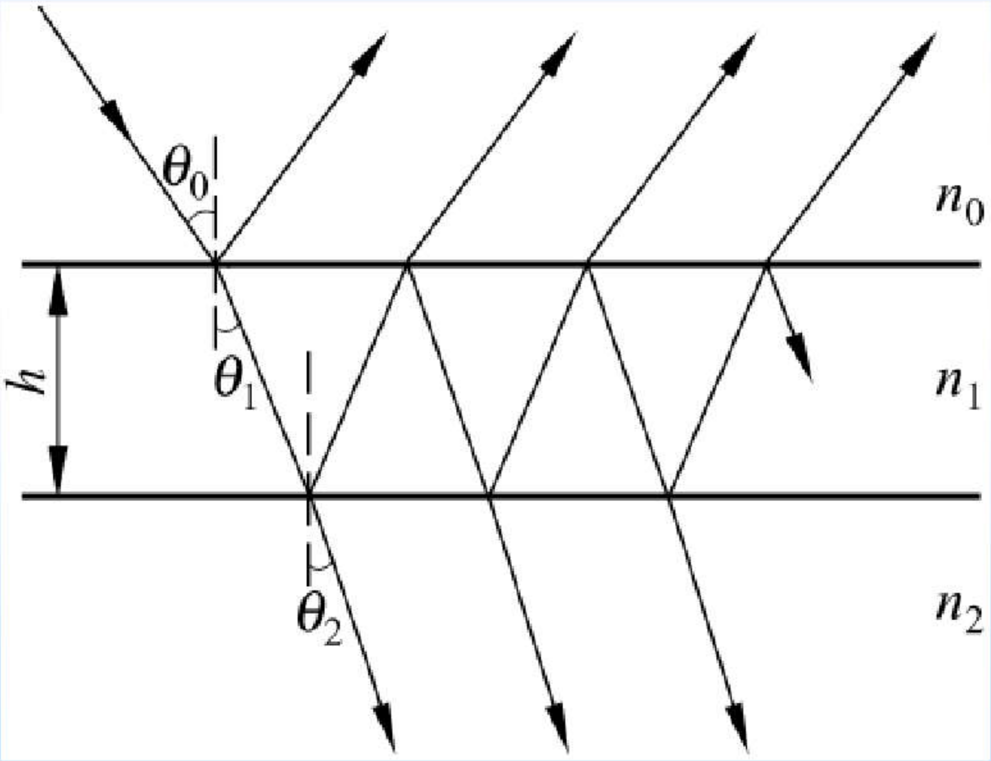
- 所谓光学薄膜，是指在透明平整的基片或金属光滑表面上，用物理或化学的方法涂敷的单层或多层透明介质薄膜。
- 利用在薄膜上、下表面反射光干涉相长或相消的原理，使反射光得到增强或减弱，可制成光学元件增透膜或增反膜，满足不同光学系统对反射率和透射率的不同要求。

图 15–16 涂有增透膜的照相机镜头

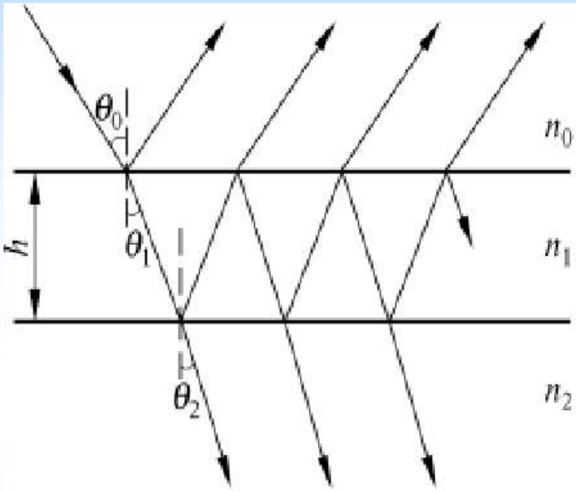
5.4.1 单层光学薄膜

A homogeneous dielectric film

当光束由 n_0 介质入射到薄膜上时，在膜内多次反射，并在薄膜的两表面上有一系列平行光束射出。



1. 公式



$$E_{01r} = r_1 E_{0i}$$

$$E_{02r} = r_2 t t' E_{0i} \exp(-i\varphi)$$

$$E_{03r} = r_2 t t' (r_1' r_2) E_{0i} \exp(-i2\varphi)$$

$$E_{04r} = r_2 t t' (r_1' r_2)^2 E_{0i} \exp(-i3\varphi)$$

$$\vdots$$

$$E_{0r} = E_{0i}\left\{ r_1 + r_2 t t' \exp(-i\varphi)\left[1 + r_1' r_2 \exp(-i\varphi) + (r_1' r_2)^2 \exp(-i2\varphi) + \cdots \right] \right\}$$

反射系数

$$E_{0r} = E_{0i}\left\{r_1 + r_2 tt' \exp(-i\varphi)\left[1 + r_1' r_2 \exp(-i\varphi) + (r_1' r_2)^2 \exp(-i2\varphi) + \cdots\right]\right\}$$

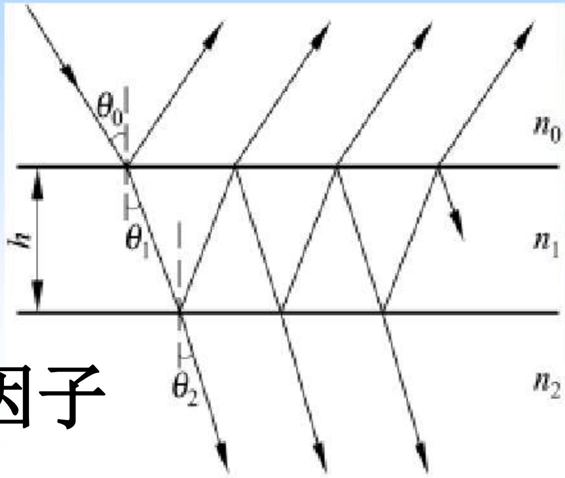
反射系数 $$r = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{r_1 + r_2 \exp(-i\varphi)}{1 + r_1 r_2 \exp(-i\varphi)}$$

r_1， r_2是薄膜上,下表面的反射系数，φ是相邻两光束间的相位差，且有

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} n_1 h \cos\theta_1$$

反射率

$$r=\frac{r_1+r_2\exp(-i\varphi)}{1+r_1r_2\exp(-i\varphi)}$$
$$=|r|\exp(-i\varphi_r)$$



φ_r 是单层膜反射系数的相位因子

$$\tan\varphi_r=\frac{r_2\left(1-r_1^2\right)\sin\varphi}{r_1\left(1+r_2^2\right)+r_2\left(1+r_1^2\right)\cos\varphi}$$

$$R=\left|\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right|^2=rr^*=\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\varphi}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\varphi}$$

正入射

$$R=\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\varphi}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos\varphi}$$

正入射时， $r_1=\dfrac{n_0-n_1}{n_0+n_1}$ $\qquad r_2=\dfrac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$

$$R=\frac{(n_0-n_2)^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}+\left(\dfrac{n_0n_2}{n_1}-n_1\right)^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{(n_0+n_2)^2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}+\left(\dfrac{n_0n_2}{n_1}+n_1\right)^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$$

2. 讨论

$$R=\frac{\left(n_0-n_2\right)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}+\left(\frac{n_0n_2}{n_1}-n_1\right)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\left(n_0+n_2\right)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}+\left(\frac{n_0n_2}{n_1}+n_1\right)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

(A) $n_1=n_0$ 或 $n_1=n_2$， R与未镀膜的 R_0 相等。

$$R_0=\left(\frac{n_0-n_2}{n_0+n_2}\right)^2$$

光学厚度

(B) 正入射时（θ=0），如 $n_1h=m\cdot\frac{\lambda_0}{2}=2m\cdot\frac{\lambda_0}{4}$

$$\varphi=\frac{4\pi}{\lambda}n_1h\cos\theta=2m\pi$$

$$\sin^2(\frac{\varphi}{2})=\sin^2(m\pi)=0 \qquad \cos^2(\frac{\varphi}{2})=1$$

$$R=R_0$$

$$R=\frac{(n_0-n_2)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}+\left(\frac{n_0n_2}{n_1}-n_1\right)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{(n_0+n_2)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}+\left(\frac{n_0n_2}{n_1}+n_1\right)^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

(*C*) 增透（*R*极小）
增反（*R*极大）

$n_1h=(2m+1)\frac{\lambda_0}{4}$ 时，$\varphi=(2m+1)\pi$，$\frac{\varphi}{2}=(m+\frac{1}{2})\pi$

即 $\cos^2\frac{\varphi}{2}=0,\qquad \sin^2\frac{\varphi}{2}=1$

$$R=\left[\frac{\frac{n_0n_2}{n_1}-n_1}{\frac{n_0n_2}{n_1}+n_1}\right]^2$$

记 $R=\left(\frac{n_0-n_1^2/n_2}{n_0+n_1^2/n_2}\right)^2$

$$\boxed{R=\left(\frac{n_0-n_1^2/n_2}{n_0+n_1^2/n_2}\right)^2}\qquad \boxed{R_0=\left(\frac{n_0-n_2}{n_0+n_2}\right)^2}$$

$n_1>n_2$时， $\dfrac{n_1^2}{n_2}>n_2$， $R>R_0$ 增反

$n_1<n_2$时， $\dfrac{n_1^2}{n_2}<n_2$， $R<R_0$ 增透

$$n_1{}^2=n_0n_2\text{时，}\quad R=0$$

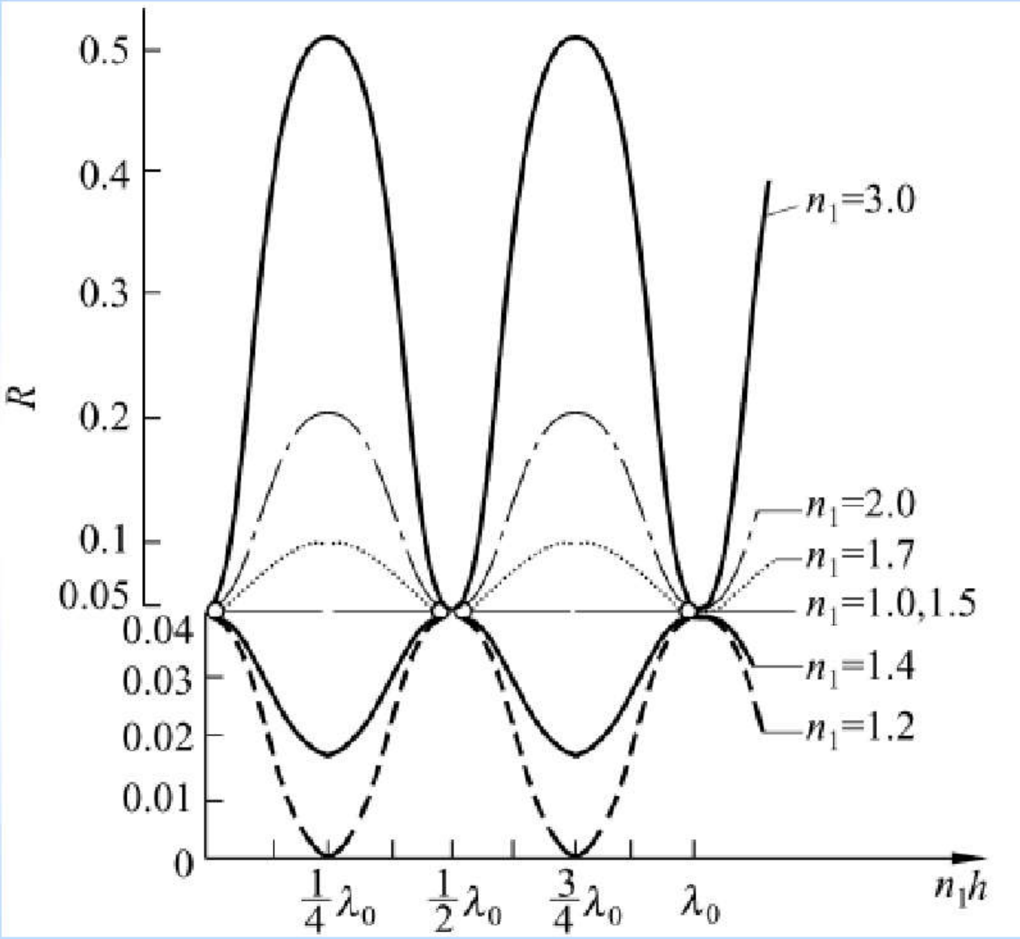
$n_1h=(2m+1)\dfrac{\lambda_0}{4}$时， 称为$\lambda/4$ 膜

(D) 所谓$\dfrac{\lambda_0}{4}$膜，针对特定波长λ_0的入射光

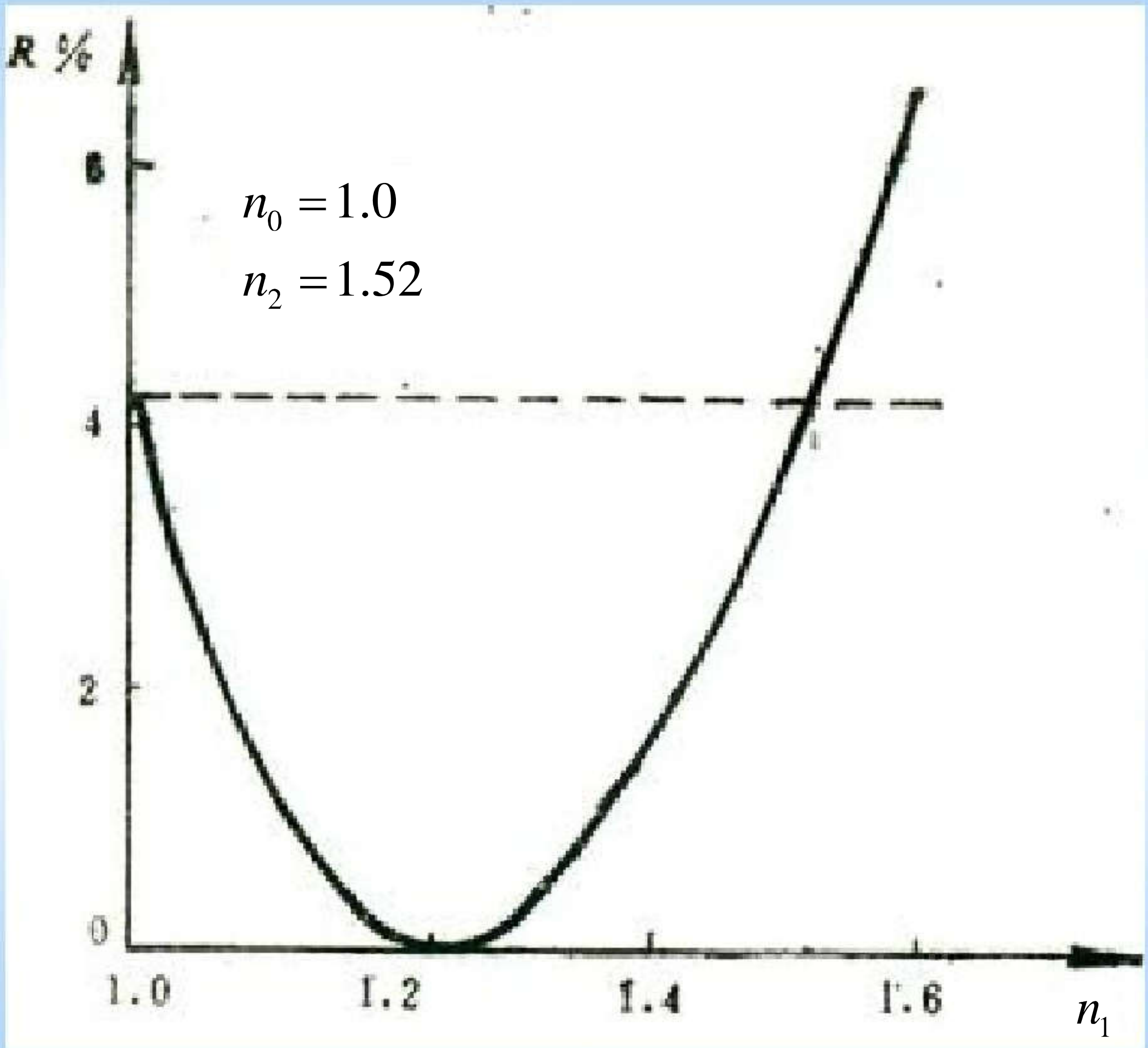
3. 结论

$$n_1 h = 2m\frac{\lambda_0}{4}$$ 等价于不镀膜

$$n_1 h = (2m+1)\frac{\lambda_0}{4} \quad \begin{cases} n_1 > n_2 & \text{增反} \\ n_1 < n_2 & \text{增透} \end{cases}$$


0.5
0.4
0.3
R
0.2
0.1
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
n_1=3.0
n_1=2.0
n_1=1.7
n_1=1.0,1.5
n_1=1.4
n_1=1.2
$\frac{1}{4}\lambda_0$
$\frac{1}{2}\lambda_0$
$\frac{3}{4}\lambda_0$
λ_0
n_1h

$n_0=1$，$n_2=1.5$，正入射


R %
6
4
2
0
$n_0 = 1.0$
$n_2 = 1.52$
1.0
1.2
1.4
1.6
n_1

5.4.2 多层光学薄膜——Multi layer

- 单层膜的功能有限，通常只用于一般的增反、增透、分束。为满足更高的光学特性要求，实际上更多地采用多层膜系。
- 可采用等效界面法分析多层膜系光学特性。利用等效分界面和等效折射率的概念, 可以将多层膜问题简化成单层膜来处理。

等效折射率

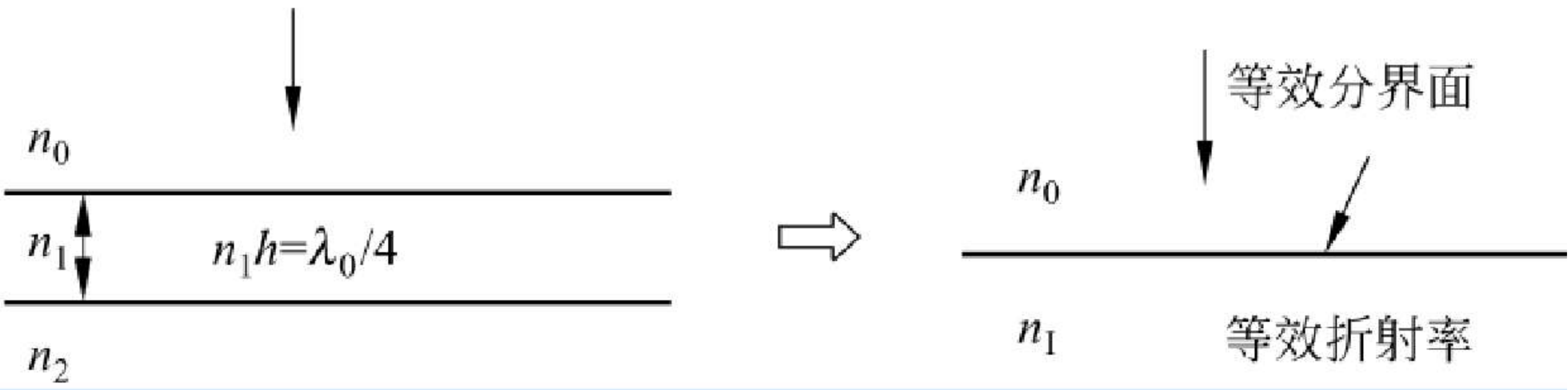
- 对于$\lambda_0/4$单层薄膜，其反射率 $$R=\left(\frac{n_0-n_1^2/n_2}{n_0+n_1^2/n_2}\right)^2$$

定义 $n_I=n_1^2/n_2$ 为等效折射率

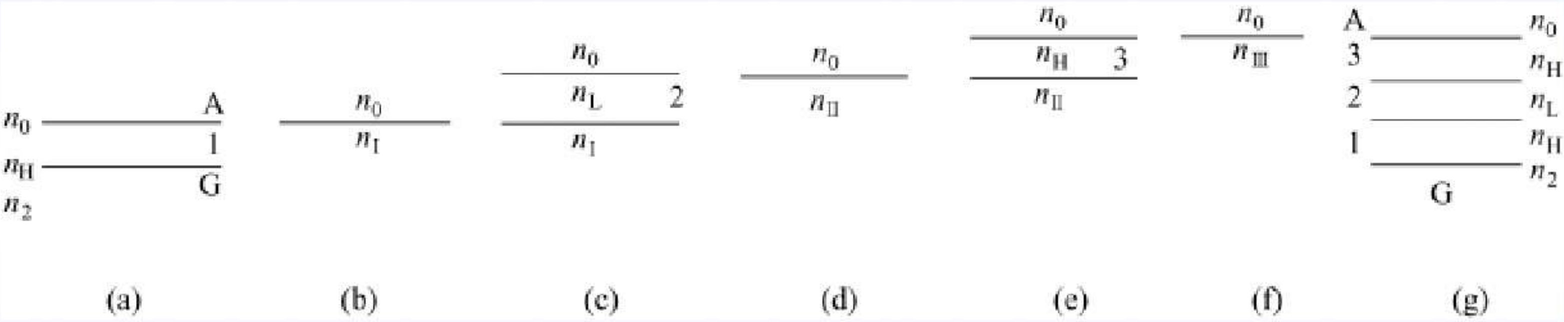
则 $$R=\left(\frac{n_0-n_I}{n_0+n_I}\right)^2$$ $(n_1+n_2)\Rightarrow n_I$

等效界面

- 在折射率为n_1的$\lambda_0/4$ 膜层上光的反射率与 n_0 / n_I 界面上的反射率相同



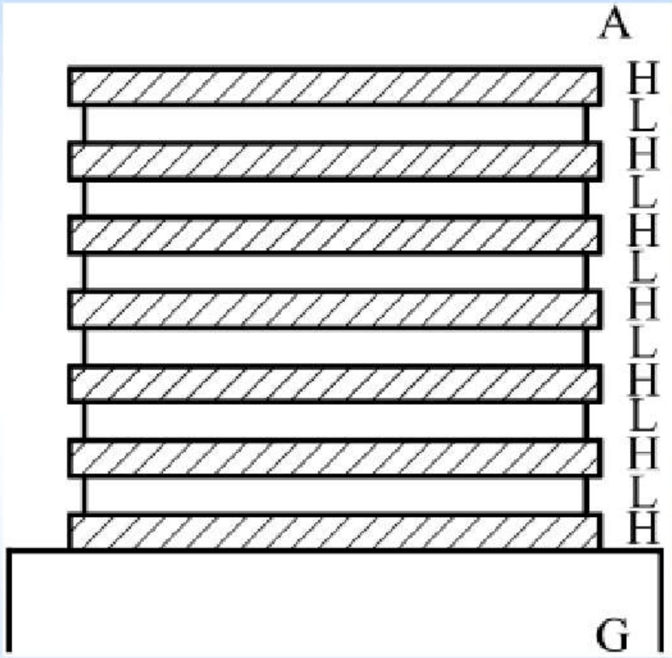
借助等效折射率讨论多层膜



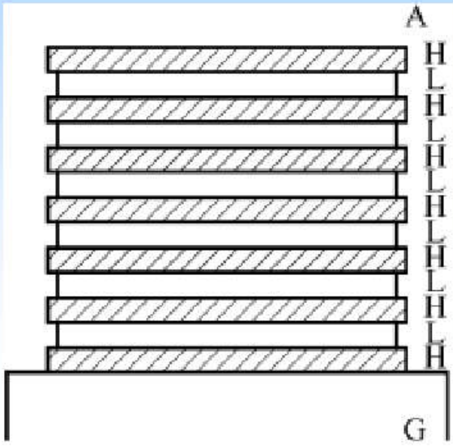
1. 多层高反膜

常用的多层高反膜是由光学厚度nh都是$\lambda_0/4$的高折射率膜层和低折射率膜层交替镀制的膜系，可表示为

GHLHL…HLHA＝G(HL)^{p}HA



$$镀H层-\frac{\lambda_0}{4}$$

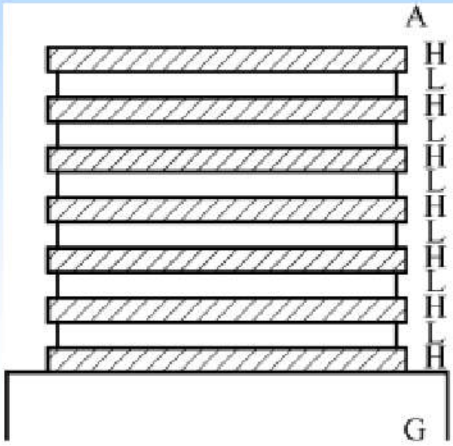


$$R=\left(\frac{n_A n_G-n_H{}^2}{n_A n_G+n_H{}^2}\right)^2=\left(\frac{n_A-n_H{}^2/n_G}{n_A+n_H{}^2/n_G}\right)^2$$

记镀 n_H 层的有效折射率 $n_I=n_H{}^2/n_G$

$$R=\left(\frac{n_A-n_I}{n_A+n_I}\right)^2 \qquad GH\rightarrow n_I$$

类推



$\because \quad GH \rightarrow n_I$

$\therefore \quad GH \cdot LA \quad \Rightarrow n_I n_L n_A$

$$R_{\Pi} = \left(\frac{n_A - n_L{}^2 / n_I}{n_A + n_L{}^2 / n_I} \right)^2$$

$$n_I = \frac{n_H^{\ 2}}{n_G} \qquad R_{\Pi} = \left(\frac{n_A - n_L^{\ 2}/n_I}{n_A + n_L^{\ 2}/n_I}\right)^2$$

令 $n_{\Pi} = n_L^2 / n_I = (n_L / n_H)^2 n_G$

则 $R_{\Pi} = \left(\frac{n_A - n_{\Pi}}{n_A + n_{\Pi}}\right)^2 \quad GHL \rightarrow n_{\Pi}$

考虑 $GHLHA \rightarrow n_{\Pi} n_H n_A$

$$R_{III} = \left(\frac{n_A - n_H^2 / n_{II}}{n_A + n_H^2 / n_{II}}\right)^2$$

$$n_{\Pi} = \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^2 n_G \qquad R_{III} = \left(\frac{n_A - n_H^2 / n_{II}}{n_A + n_H^2 / n_{II}}\right)^2$$

记 $$n_{\mathrm{III}} = \frac{n_H{}^2}{n_{\Pi}} = \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^2 \frac{n_H{}^2}{n_G{}^2} n_G$$

得 $$R_{III} = \left(\frac{n_A - n_{\mathrm{III}}}{n_A + n_{\mathrm{III}}}\right)^2$$

....

2p+1层薄膜

- 按照上述分析方法类推，可以得到2p+1 层薄膜 $(HL)^pH$ 的等效折射率和反射率R_{2p+1}分别为

$$n_{2p+1} = \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2p} \frac{n_H^2}{n_G^2} n_G$$

$$R_{2p+1} = \left(\frac{n_A - n_{2p+1}}{n_A + n_{2p+1}}\right)^2$$

$$GH \rightarrow \qquad n_I = \frac{{n_H}^2}{n_G} \qquad R_I = \left(\frac{n_A - n_I}{n_A + n_I}\right)^2$$

$$GHL \rightarrow \qquad n \ldots = \left(\frac{n_L}{\ldots}\right)^2 n \ldots \qquad R \ldots = \left(\frac{n_A - n_{II}}{\ldots}\right)^2$$

$$GHLH \rightarrow \quad n_I \ldots$$

$$\ldots$$

$$n_{2p+1} = \left(\frac{\ldots}{n_L}\right) \ldots \frac{\ldots}{n_G} \qquad R_{2p+1} = \left(\frac{\ldots}{n_A + n_{2p+1}}\right)^2$$

$$R_{2p+1} = \left(\frac{n_A - n_{2p+1}}{n_A + n_{2p+1}}\right)^2 \qquad n_{2p+1} = \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2p} \cdot \frac{n_H^{\ 2}}{n_G}$$

$\because$ $\gg$

$\approx 1-4\alpha$

$\gg$ 时 $\rightarrow 1.$

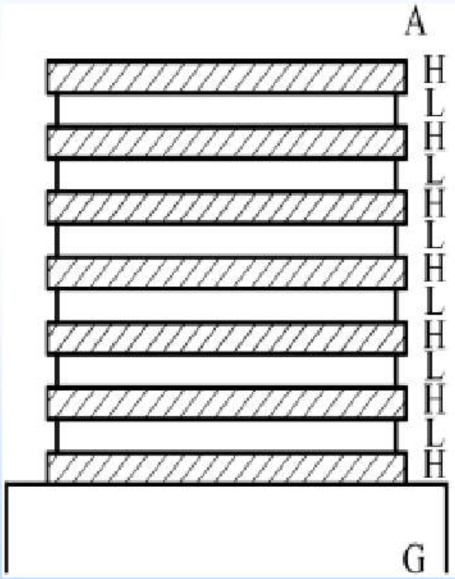
膜系	层数	等效折射率	反射率%	透射率%
GA	0		4.3	95.7
GHA	1	3.48	30.6	69.4
GHLHA	3	9.665	66.2	33.8
$G(HL)^2HA$	5	26.84	86.1	13.9
$G(HL)^3HA$	7	74.53	94.8	5.2
$G(HL)^4HA$	9	207	98.0	2.0
$G(HL)^5HA$	11	575	99.30	0.70
$G(HL)^6HA$	13	1596	99.75	0.25
$G(HL)^7HA$	15	4434	99.91	0.09
$G(HL)^8HA$	17	1.23×10^5	99.97	0.03
$G(HL)^9HA$	19	3.42×10^5	99.99	0.01

结论

(A) $p\uparrow,\ R\rightarrow 1.$

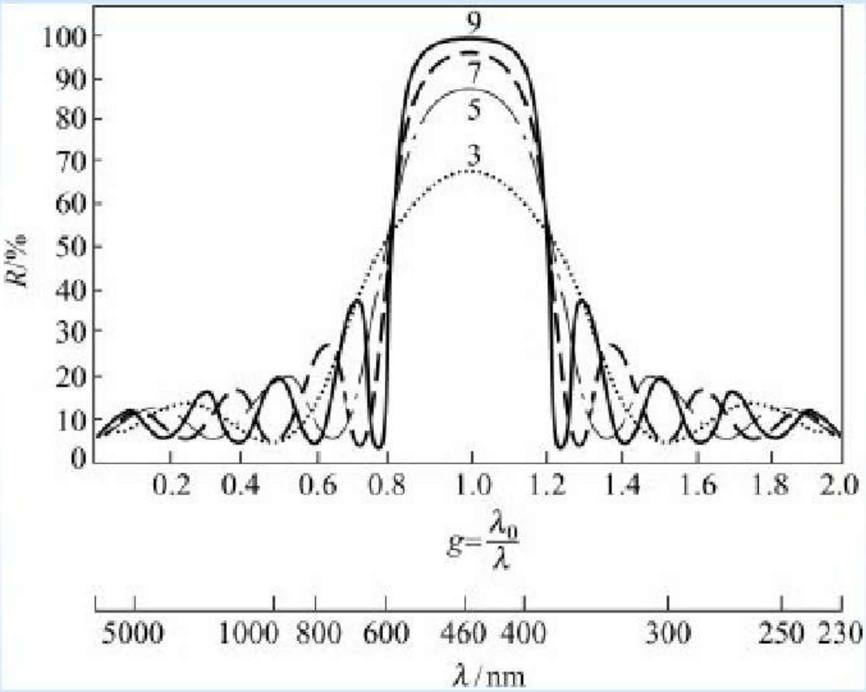
(B) HL…HLH，两外层为H层；

(C) 也只对确定波长增反。



带宽

- 薄膜的反射率都是对一定的中心波长λ_0而言的。如果入射光波的波长偏离中心波长，则反射率将随之改变。高反膜只在一定的波长范围内产生高反射。所对应的波段称为该反射膜系的反射带宽。随着膜系层数的增加，高反射率的带宽变窄.

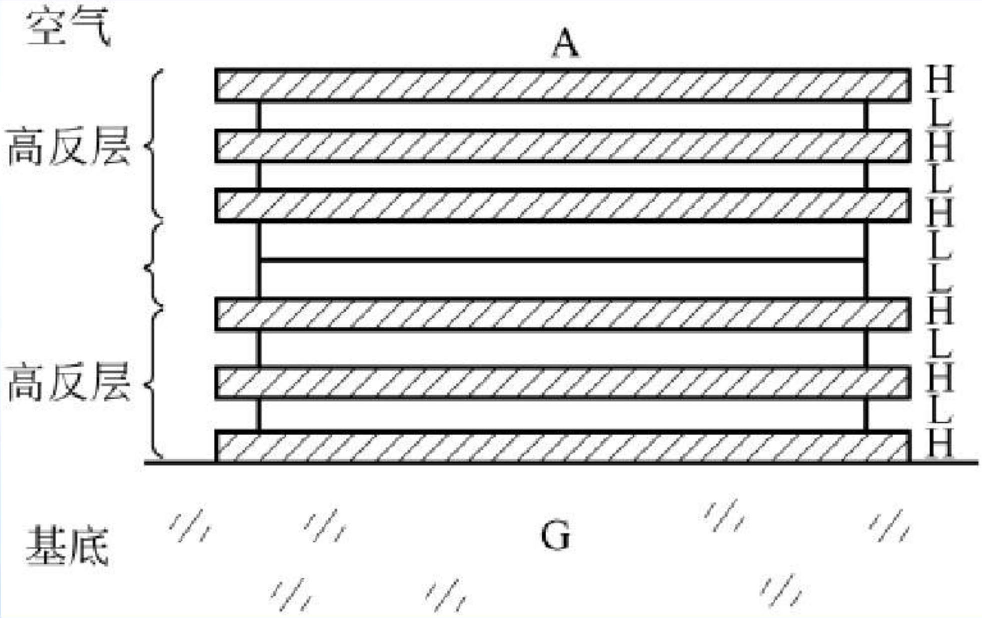


2. 干涉滤波片

为得到高透射率、窄带宽的滤波片，采用结构

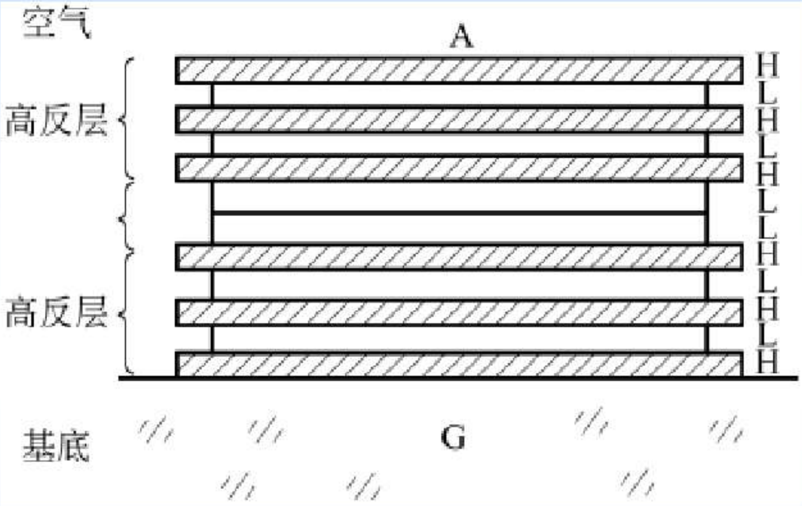
GH(LH)^{p}LL(HL)^{p}HA

其中，G为基底，A为空气，H和L分别是光学厚度为$\lambda_0/4$的高折射率膜层和低折射率膜层。



干涉滤波片

中间的*LL*的光学厚度为$\lambda_0/2$, 对波长为λ_0的光毫无影响，可以略去;剩下的中间层将成*HH*层，同样是光学厚度为$\lambda_0/2$的膜层，也对波长为λ_0的光不起作用,也可略去。



- 依此类推，整个滤光片的膜层对于波长为λ_0的光来说都可以略去,其透过率相当于光从空气*A*直接照射在基底*G*上。但对于不是λ_0的光，透过率迅速下降。干涉滤波片具有透射率大和透射带窄的优点。

5.5 典型的干涉仪及其应用

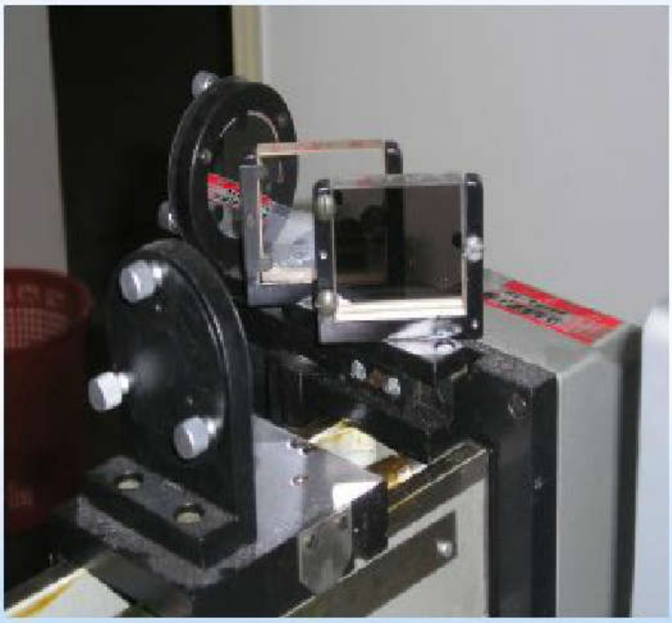
- 利用光干涉原理制做的各种干涉仪已广泛应用于光学工程中，特别是在光谱学和精密计量及检测仪器中，具有重要的实际应用。本节将介绍三种典型的干涉仪的原理及其应用。
  - 5.5.1 迈克耳孙干涉仪
  - 5.5.2 马赫-泽德干涉仪
  - 5.5.3 法布里-珀罗干涉仪

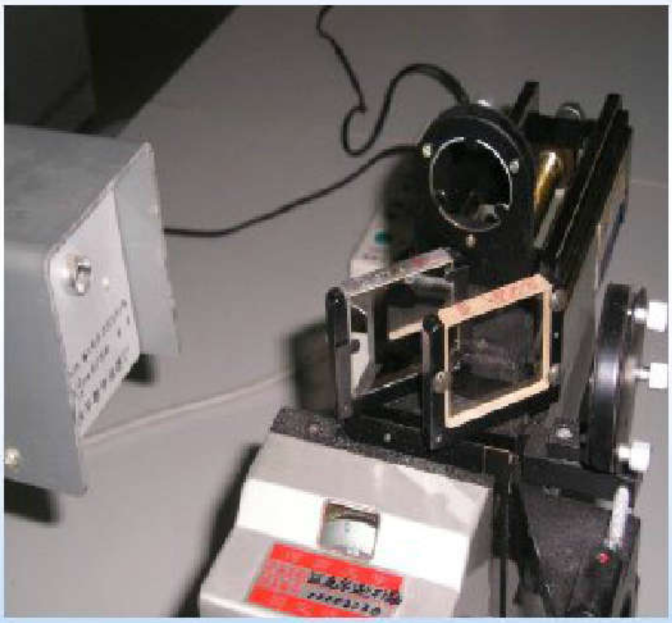
5.5.1 迈克耳孙干涉仪

Michelson Interferometer

- 迈克耳孙和他的合作者利用这种干涉仪进行测“以太风”、光谱线精细结构的研究和用光波标定标准米尺等实验，为近代物理和近代计量技术作出了重大贡献，为此，迈克耳孙获得1907年诺贝尔物理学奖。

迈克耳孙干涉仪实体图

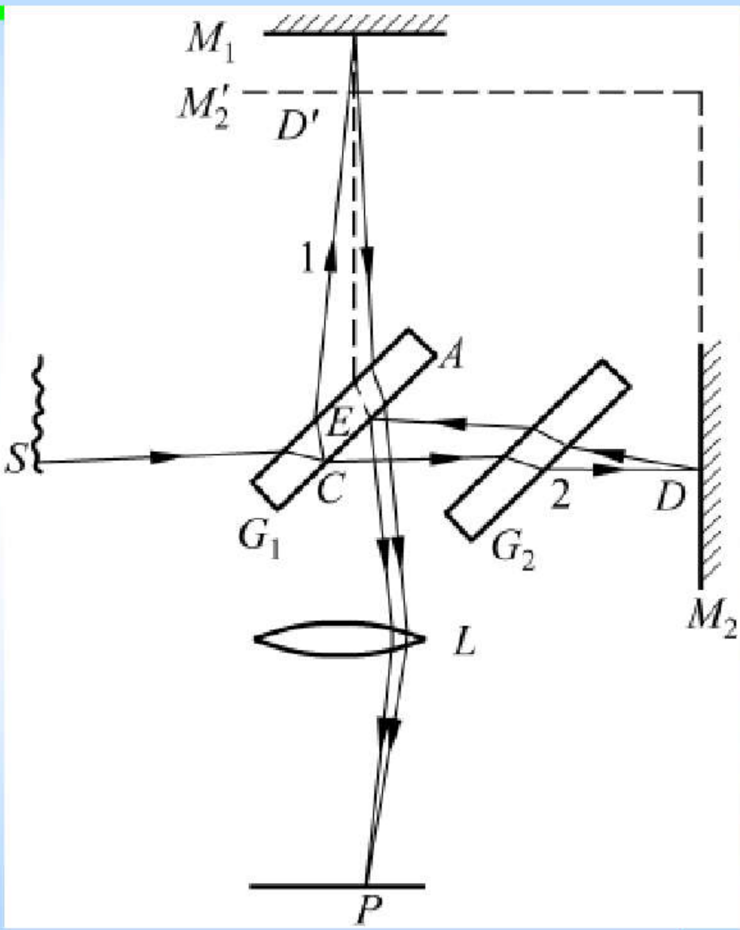




5.5.1 迈克耳孙干涉仪

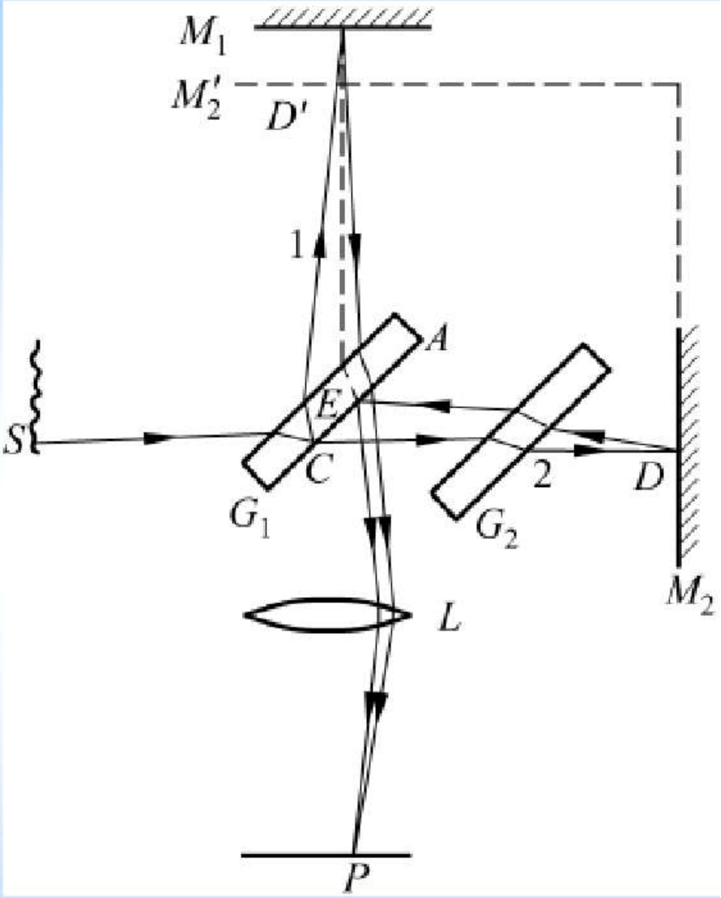
Michelson Interferometer

- 利用分振幅法产生双光束干涉，许多其它的干涉仪都是它的变形,可观察等倾干涉条纹和等厚干涉条纹。



原 理

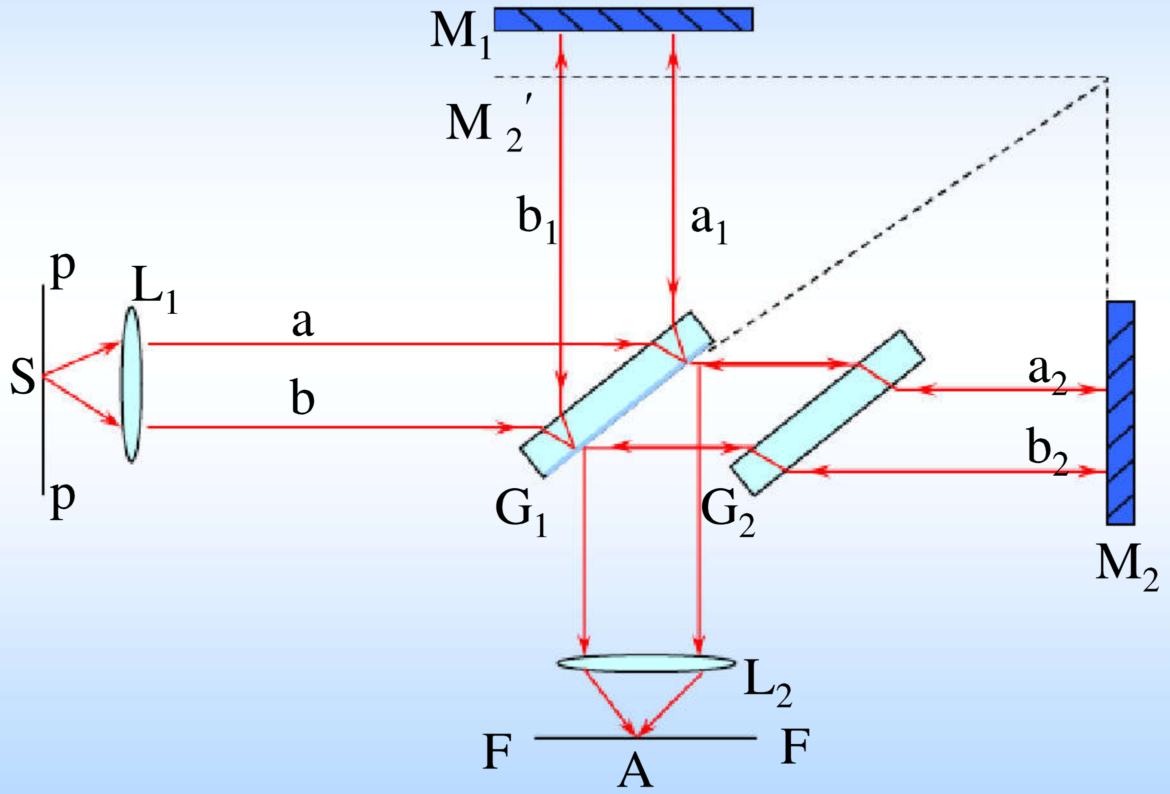
M'_2 为 M_2 相对于 A 的虚像，M_1，M_2 两反射光之间的干涉等效于由 M_1 和 M'_2 之间“薄膜”的干涉，其光程差公式



$$\Delta = 2h\cos\theta + \frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda_0$$

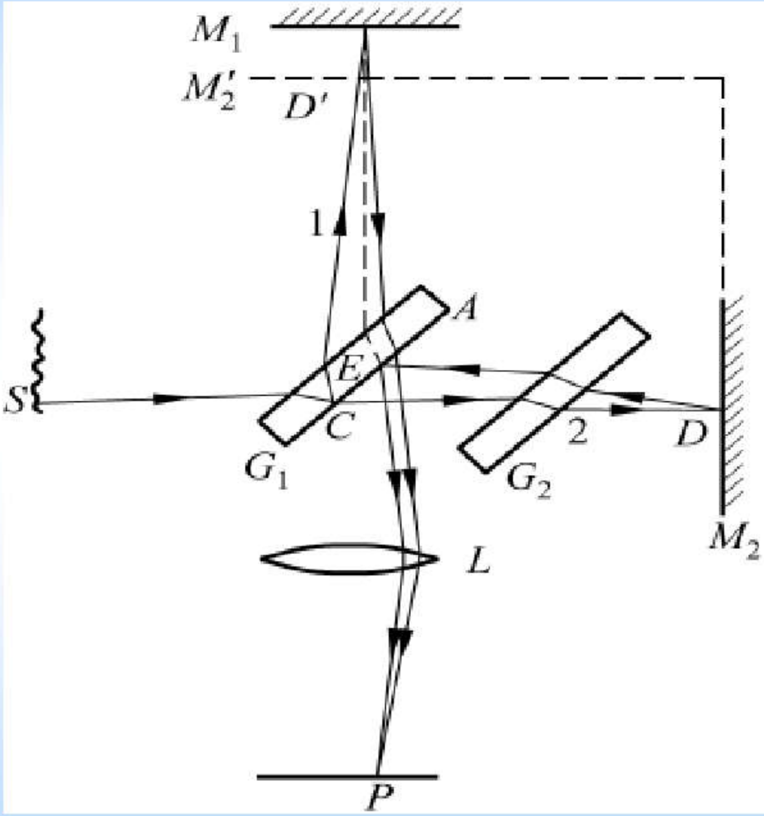
- 其中 h 为 M_1、M'_2 之间的间隔

迈克耳孙干涉仪光路图

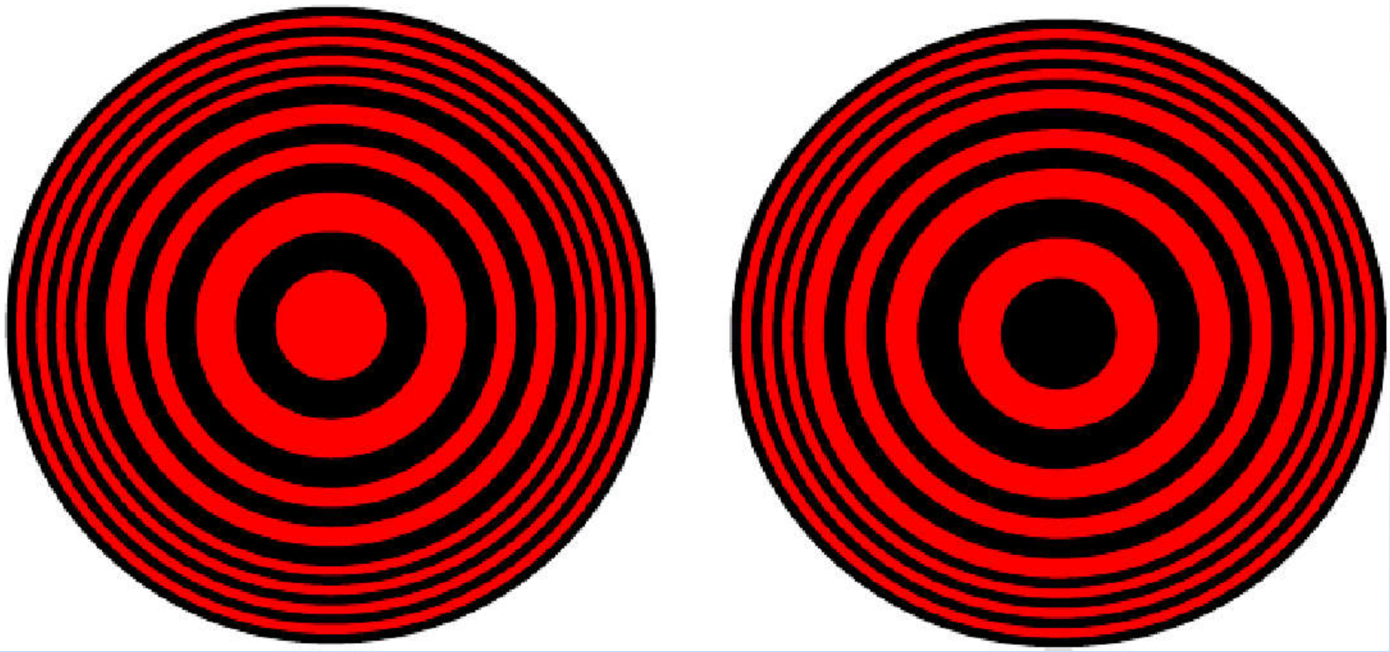


等倾干涉

- M_1 与 M_2 垂直时，M_1与M'_2平行，可观察等倾干涉条纹。M_1 向 M'_2 每移动一个 $\lambda/2$ 的距离，在中心就消失一个条纹。根据条纹消失的数目，可以确定M_1移动的距离。

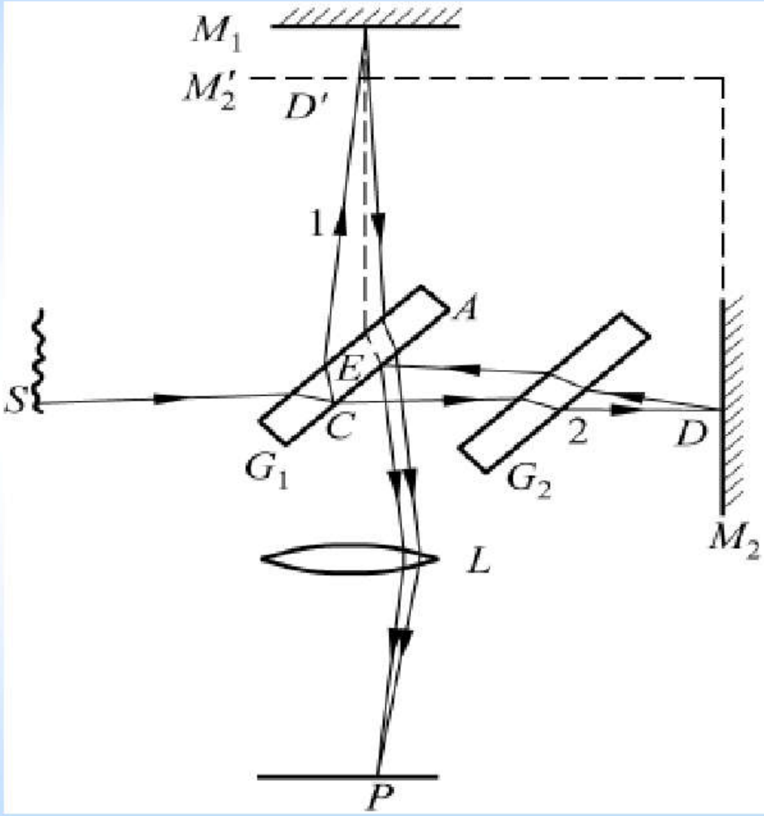


迈克耳孙干涉仪的干涉花样



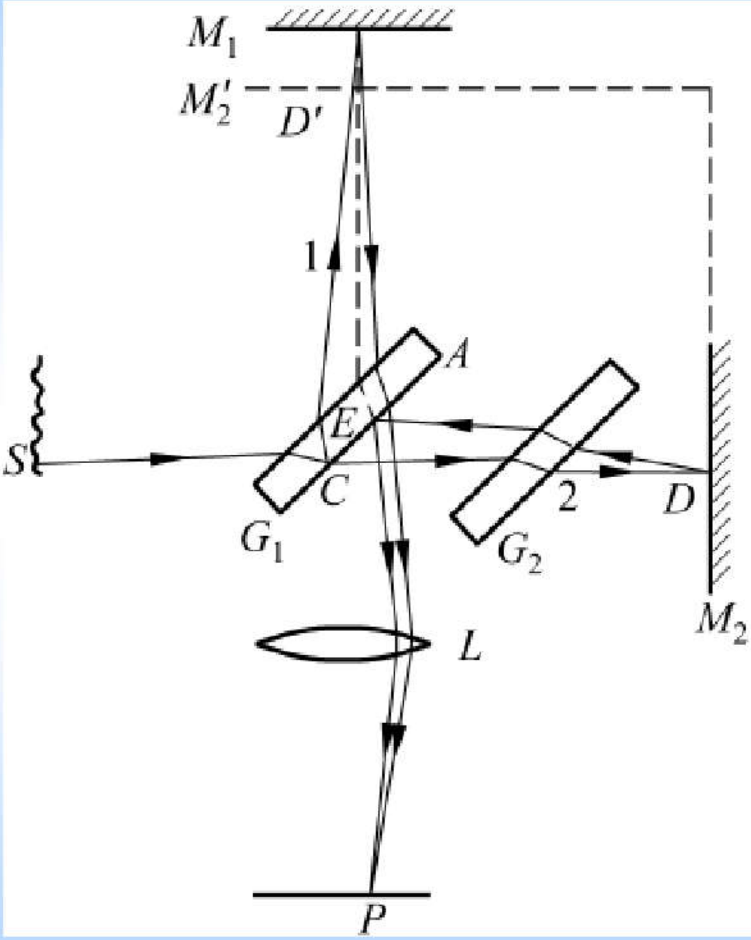
等厚干涉

- M_1与M_2不严格垂直，等厚干涉，干涉条纹是和M_1、M'_2交线平行的直线，这些直线；M_1每移动 $\lambda/2$，就相应地移动一个条纹。



主要优点

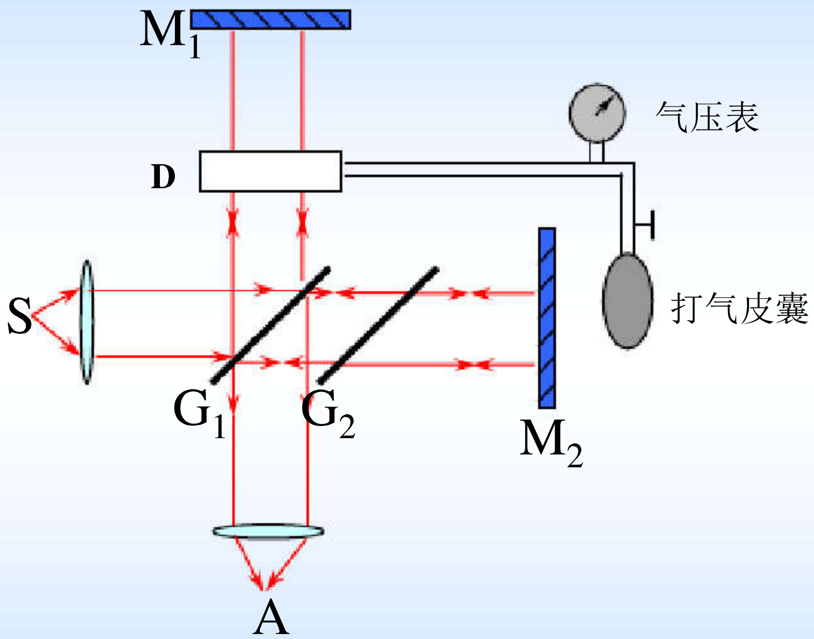
- 两束相干光完全分开，可由一个镜子的平移来改变它们的光程差，也可很方便地在光路中安置测量样品，用以精密测量长度、折射率、光的波长及相干长度等。



应用一

- 1892年，迈克耳孙用他的干涉仪最先以光的波长测定了国际标准米尺的长度。用镉蒸汽在放电管中发出的红色谱线来量度米尺的长度，在温度为15℃,压强为1*atm*高的干燥空气中，测得1*m*=1553,163.5倍红色镉光波长，或：红色镉光波长λ_0=643.8472 *nm*
- 由于激光技术的发展，在激光技术方面有了很高的精确度。根据1983年10月召开的国际计量大会决定，1*m*的长度确定为在真空中的光速在(1/29979458)*s*通过的距离。根据这个定义，光速的这个数值是个确定值，而不再是一个测量值了。

应用二：测空气折射率



- 使小气室的气压变化△P，从而使气体折射率改变△n，（因而光经小气室的光程变化2D △n ），引起干涉条纹“吞”或“吐” △N条。则有：

$$2D\,|\,\triangle n\,| = \triangle N\lambda$$

$$|\,\triangle n\,| = \triangle N\,\lambda\,/2D \qquad ①$$

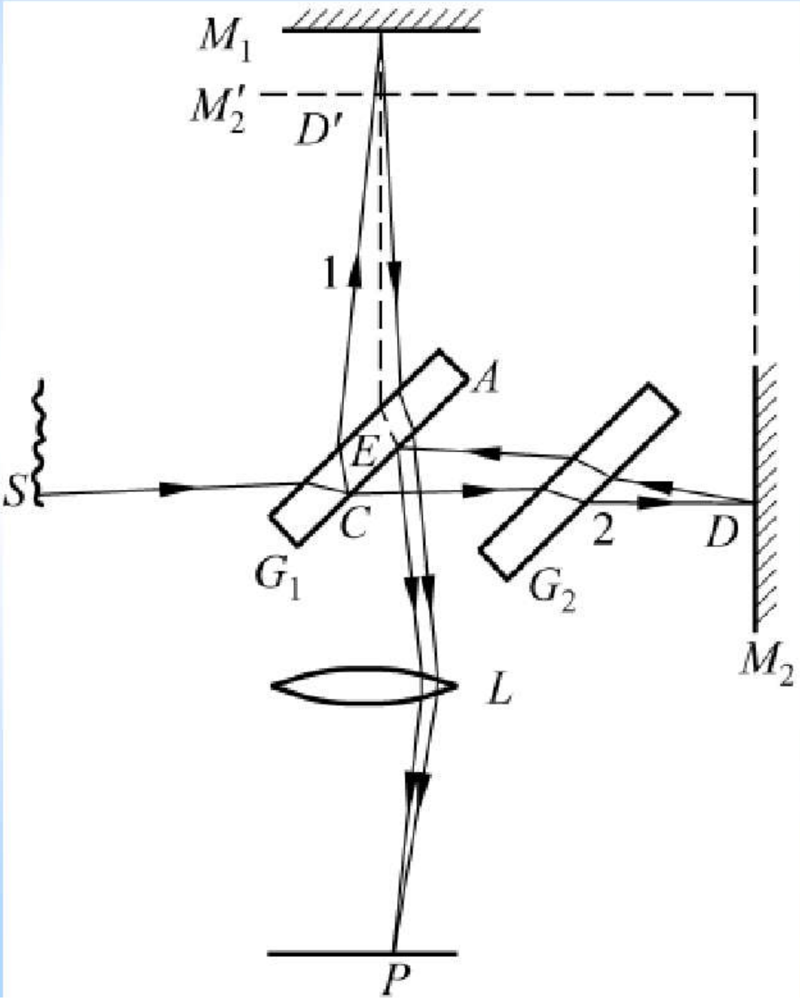
理论证明，在温度和湿度一定的条件下，当气压不太大时，气体折射率的变化量△n与气压的变化量△P成正比：

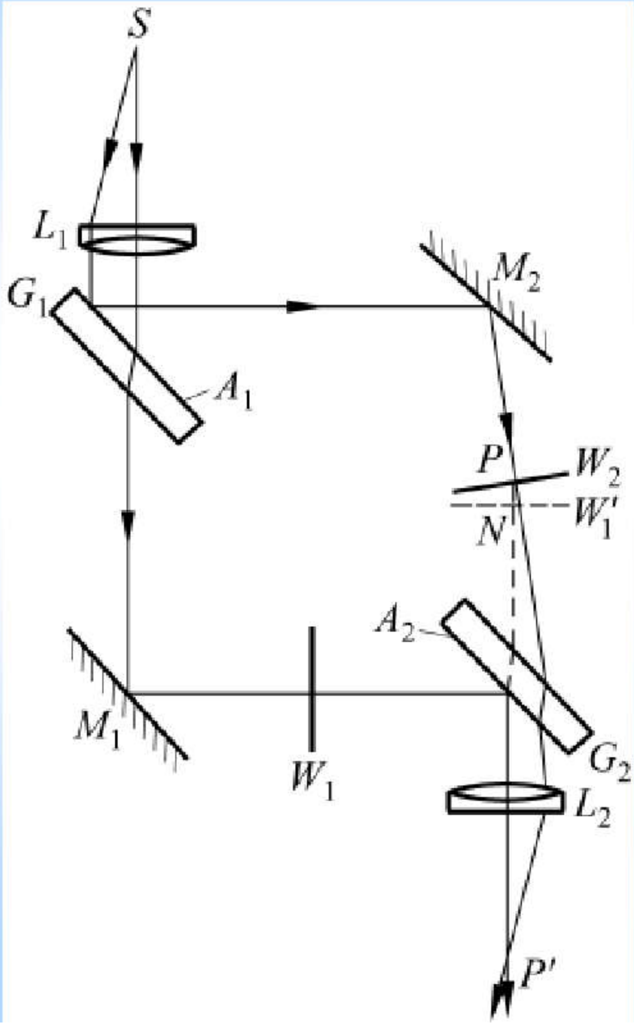
$$(n-1)/P = \triangle n/\,|\,\triangle P\,| = \text{常数}$$

$$n = 1 + (\triangle N\,\lambda\,/2D)(P/\,|\,\triangle P\,|) \qquad ②$$

5.5.2 马赫-泽德干涉仪

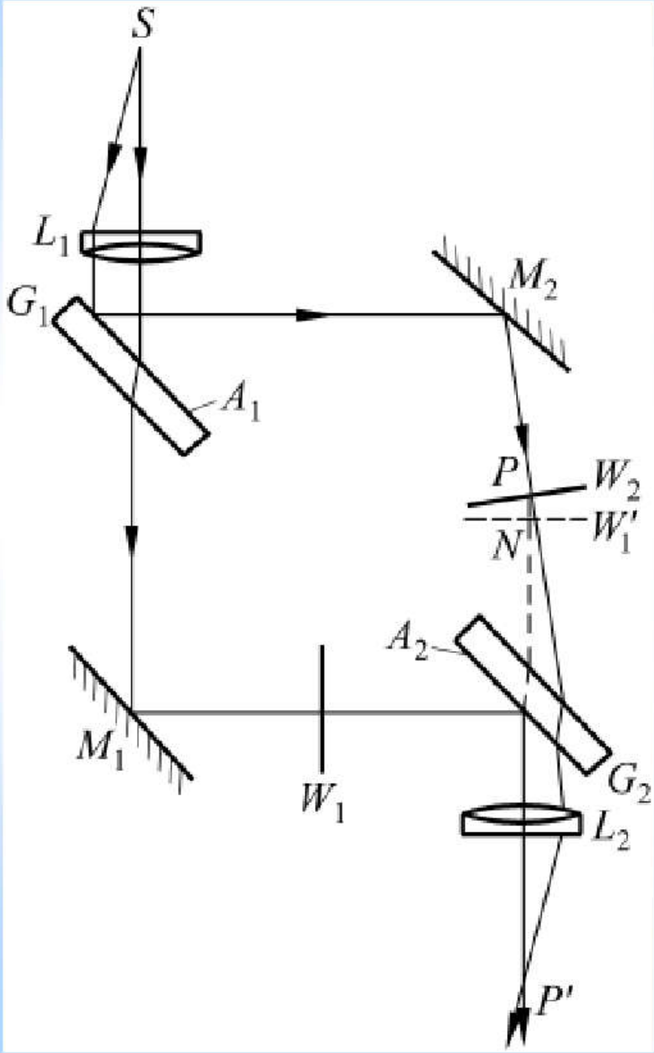
Mach-Zehnder Interferometer





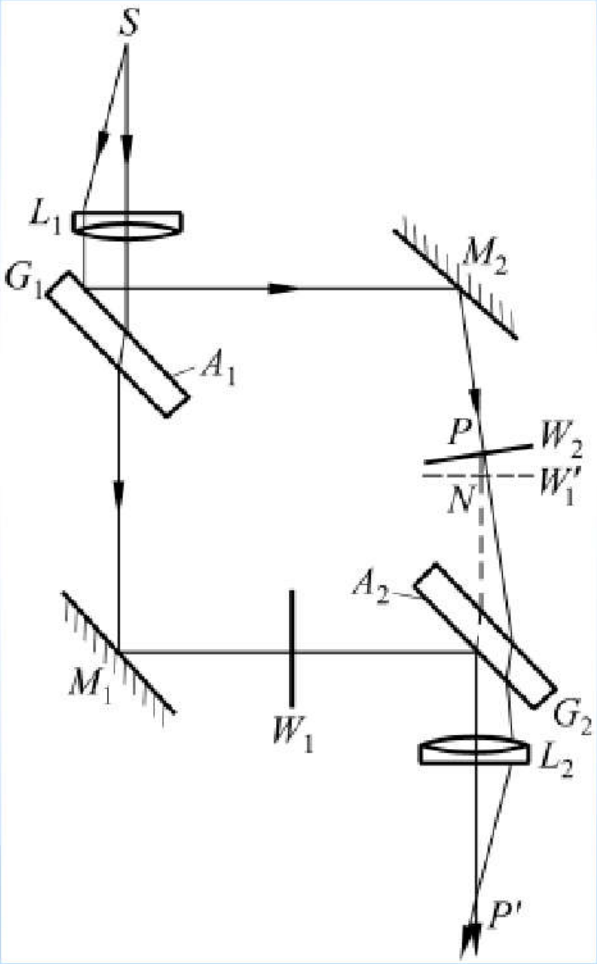
结构

- 点光源S发出的光经L_1准直后入射到半反射面A_1，反/透射光分由M_1和M_2反射, 波面分别为W_1和W_2，W_1相对于A_2的虚像W'_1与W_2互相倾斜，形成一个空气间隙，在W_2上将形成平行等距的直线干涉条纹，条纹的走向与W_2和W'_1所形成空气楔的楔棱平行。



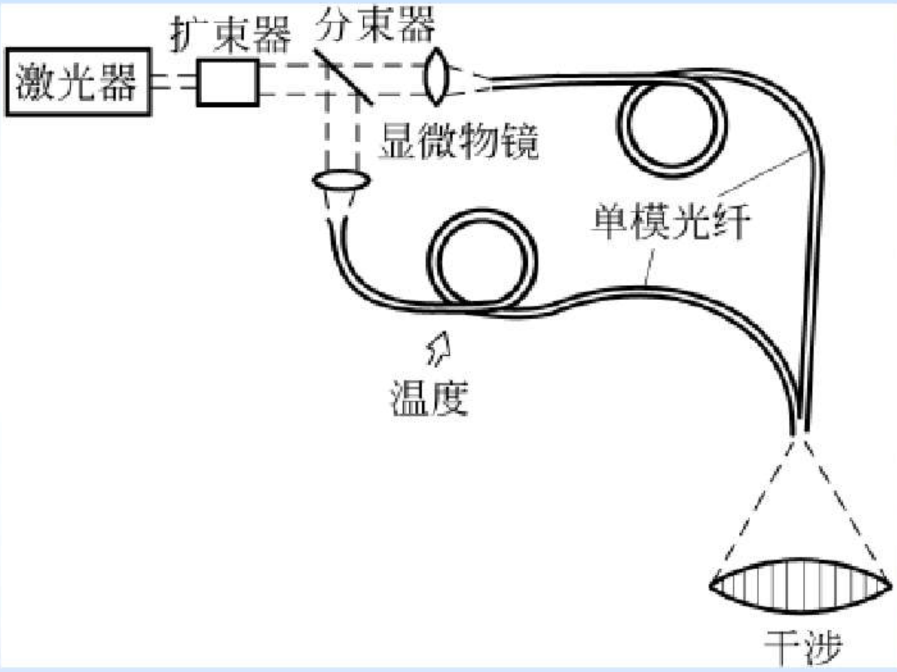
应用

某种原因(例如，使W_2通过被研究的气流)使W_2发生变形，则干涉图形不再是平行等距的直线，从而可以从干涉图样的变化测出相应物理量(例如，所研究区域的折射率或密度)的变化。



温度传感器

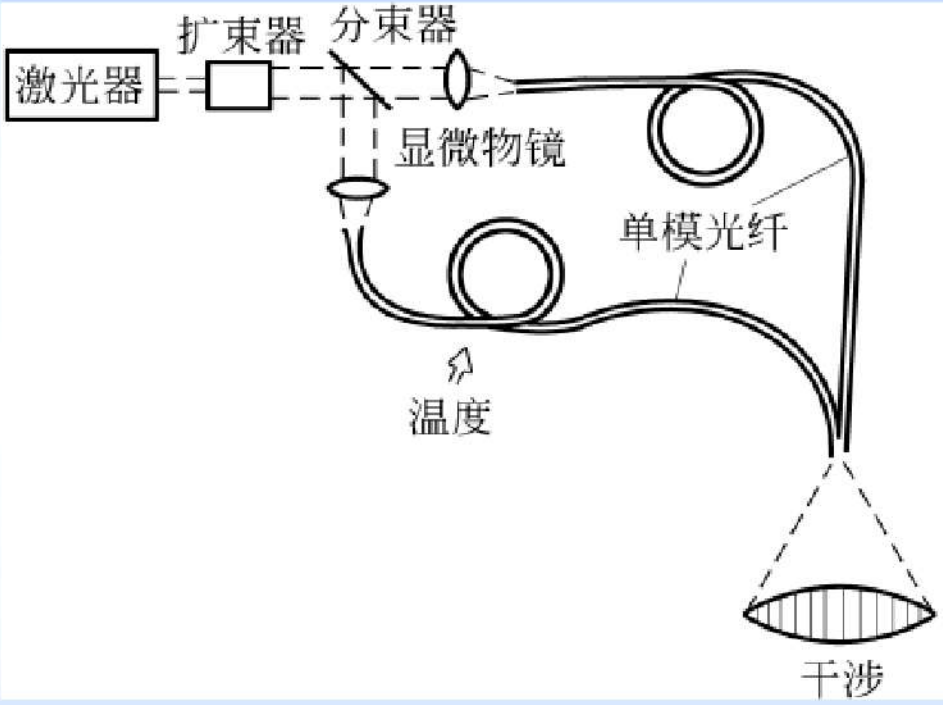
激光器发出的相干光，经分束器分别送入两根长度相同分别称为参考臂和信号臂的单模光纤，其中参考臂光纤不受温度场作用，



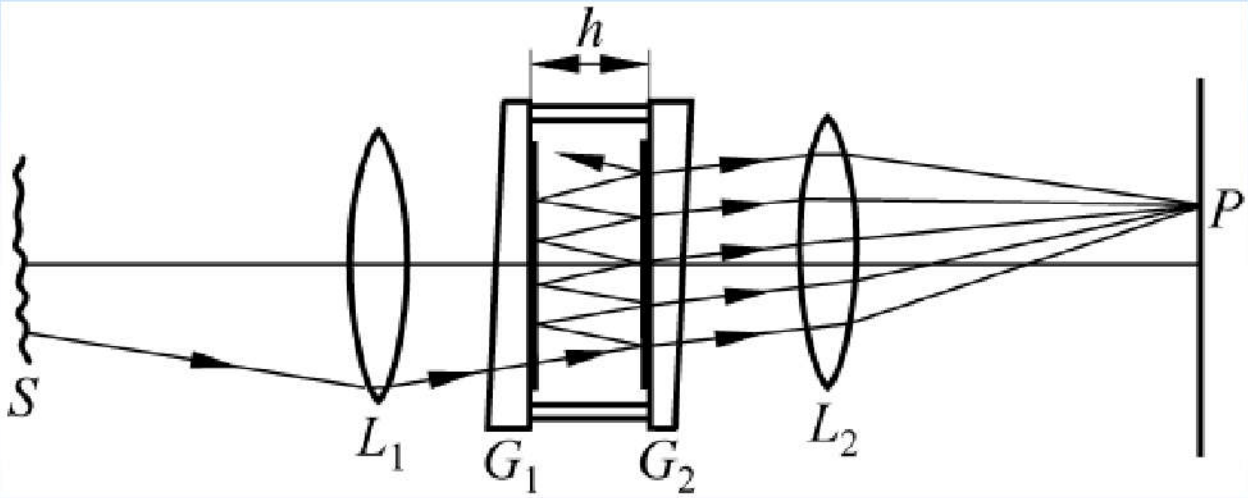
而信号臂放在待测温度场中，二光纤出射的激光束产生干涉。由干涉条纹移动的计量处理，即可测定外界温度。

扩展性

使信号臂对各种不同的物理量敏感，对二光纤出射激光束干涉条纹移动进行类似的计量处理，即可测定不同的物理量。

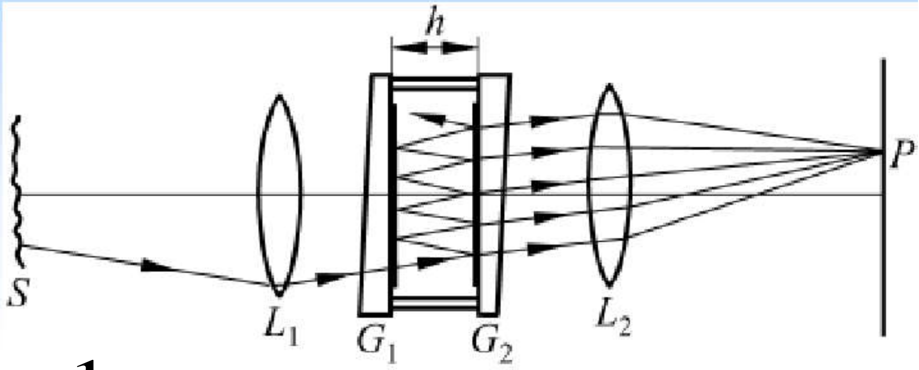


5.5.3 法布里-珀罗干涉仪
Fabry-Perot Interferometer/etalon



多光束干涉的一个重要应用实例,应用非常广泛，其特殊价值在于极高的分辨，还可构成激光器的谐振腔。

1. 结构



（A）观察透射光干涉

(*B*) 内腔面平行，$R \to 1$

（C）玻璃外表面成一小棱角，避免反射干扰

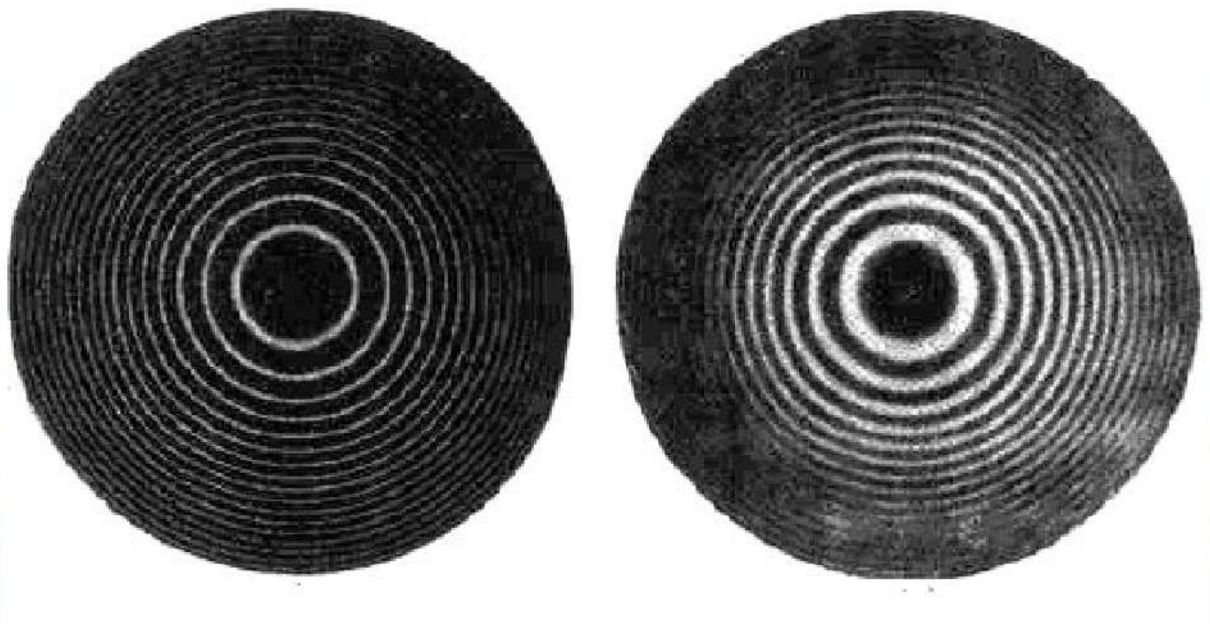
（D） *h*—可变　　干涉仪 Interferometer

h—恒定　　标准具 etalon

(E) 扩展光源，等倾干涉

条纹精细

- 与迈克耳孙干涉仪产生的等倾干涉条纹(b)相比，法布里-珀罗干涉仪产生的条纹(a)要精细很多



(a) (b)

激光腔

- 在激光技术中，经常把两个具有高反射率的平面反射镜彼此相对平行放置，构成所谓**法布里-珀罗谐振腔**，激光器输出的纵模频率实际上是满足法布里-珀罗干涉仪干涉亮条纹条件的一系列频率。

2. 性能参数

由于法布里-珀罗标准具能够产生十分细而亮的等倾干涉条纹，所以它的一个重要应用就是研究光谱线的精细结构，即将一束光中不同波长的光谱线分开——分光。

分光元件特性的三个技术指标：

- 自由光谱范围；
- 分辨本领；
- 角/线色散率。

（A）自由光谱范围—free spectral range

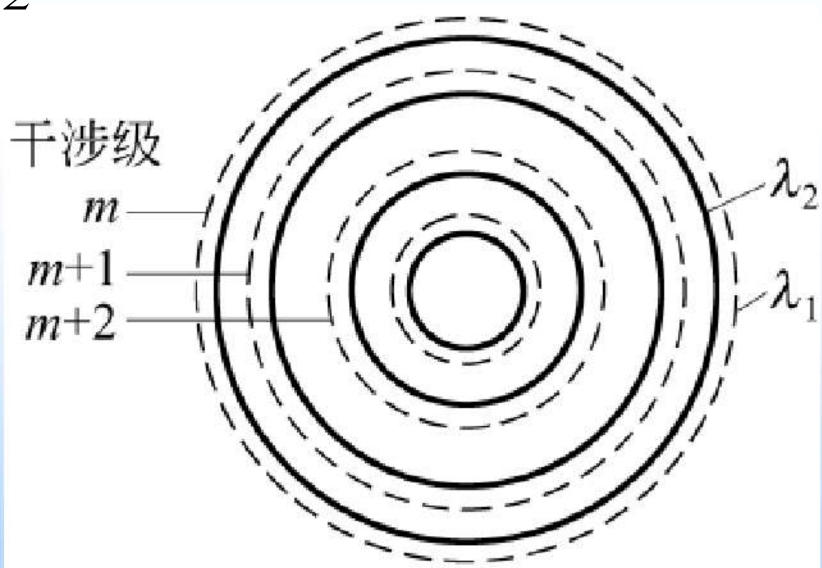
* 对某一级次不同波长的谱线，各色光干涉条纹不发生级次交叠的最大波长范围，称为自由光谱范围。

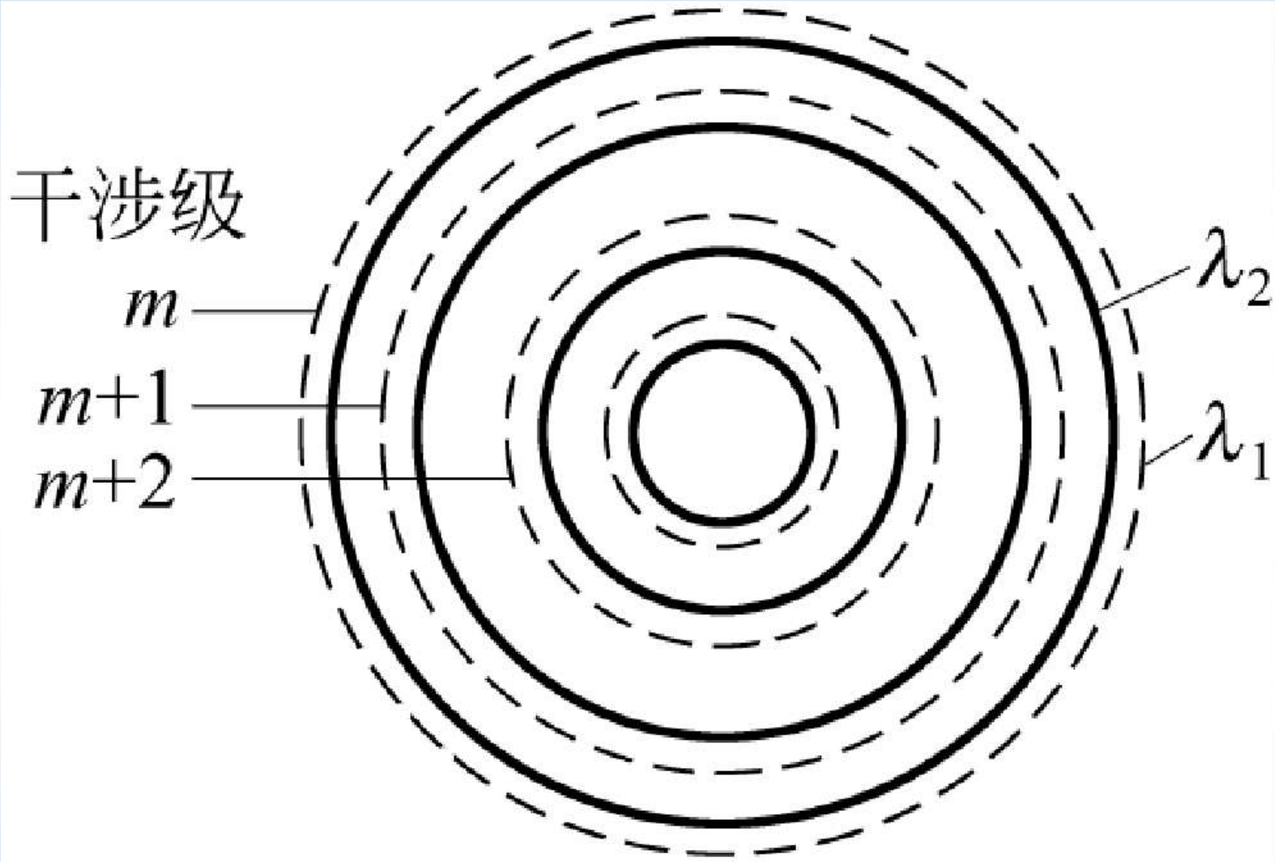
* $$(m+1)\lambda_1 = m\lambda_2 = 2nh$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + (\Delta\lambda)_f$$

$$\lambda_1 = m(\Delta\lambda)_f$$

$$(\Delta\lambda)_f = \frac{\lambda_1}{m} \xlongequal{\lambda_1\lambda_2=\lambda^2} \frac{\lambda^2}{2nh}$$





自由光谱范围—— 标准具常数

(B) 分辨本领 —resolving power

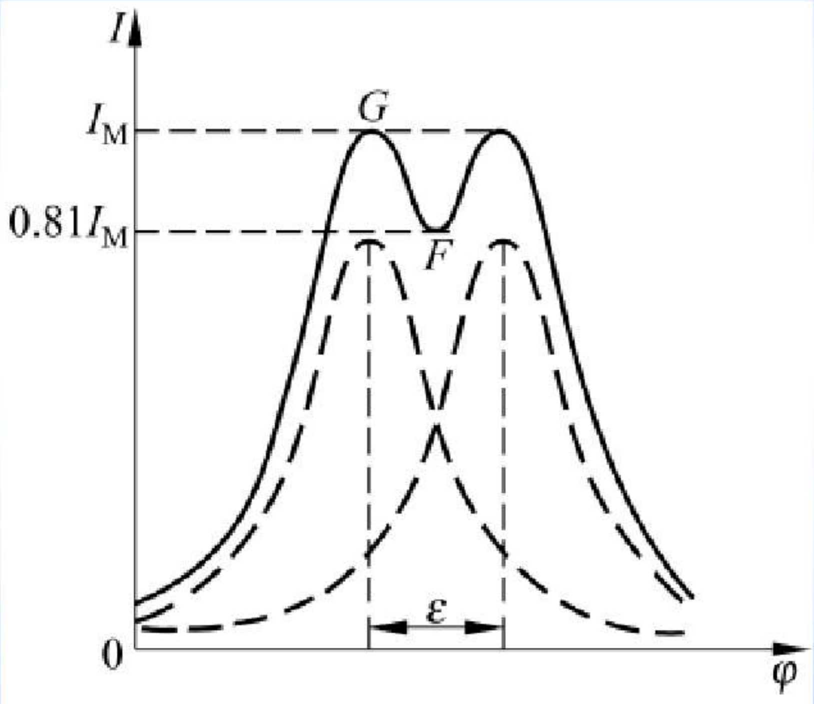
分辨相近谱线的能力，它定义为

$$A = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_m}$$

式中 $(\Delta\lambda)_m$ 为光谱仪的最小可分辨波长差。

瑞利（Rayleigh）判据

两等强度不同波长的谱线之间的相位差间隔正好等于相位宽度ε (中央极小值等于两边极大值的81%) — 恰好能够分开



A—mN

$$I=\frac{I_{1i}}{1+F\sin^2\frac{\varphi_1}{2}}+\frac{I_{2i}}{1+F\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}$$

$$I_{1i}=I_{2i}=I_i,\quad \varphi_2-\varphi_1=\varepsilon$$

F点处： $\varphi_1=2m\pi+\frac{\varepsilon}{2}$， $\varphi_2=2m\pi-\frac{\varepsilon}{2}$

$$I_m=\frac{I_i}{1+F\sin^2\left(m\pi+\frac{\varepsilon}{4}\right)}+\frac{I_i}{1+F\sin^2\left(m\pi-\frac{\varepsilon}{4}\right)}$$

$$=\frac{2I_i}{1+F\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)}$$

$A—mN$

G点处：$\varphi_1 = 2m\pi$，$\varphi_2 = 2m\pi - \varepsilon$

$$I_M = I_i + \frac{I_i}{1+F\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

分辨条件：$I_m = 0.81 I_M$

$$\frac{2I_i}{1+F\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)} = 0.81\left(I_i + \frac{I_i}{1+F\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{4.15}{\sqrt{F}} = \frac{2.07\pi}{N}$$

A—mN

$$|\Delta\varphi| = \frac{4\pi h\cos\theta}{\lambda^2}\Delta\lambda = 2m\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

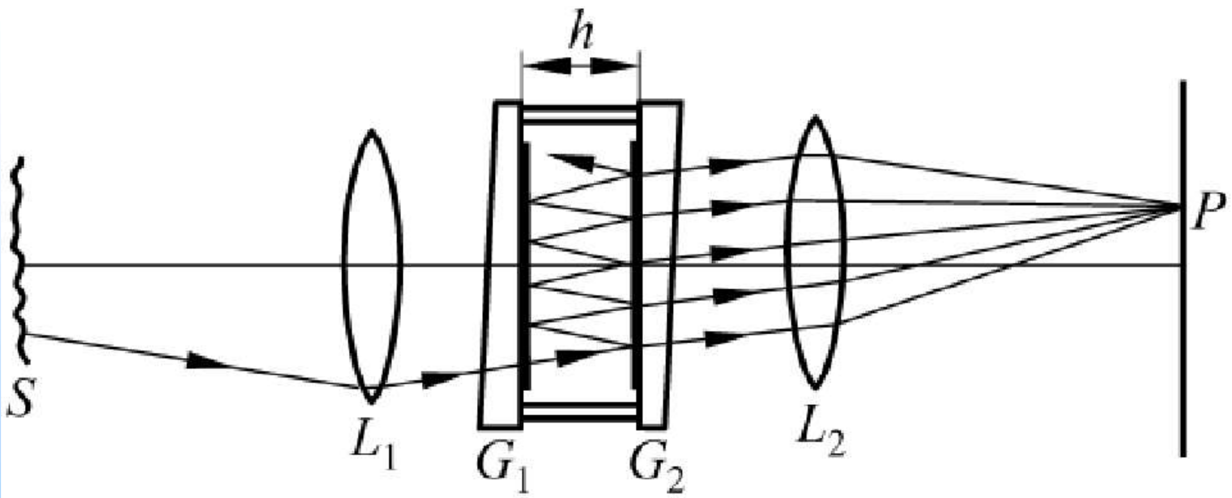
$$|\Delta\varphi| = \varepsilon \rightarrow \varepsilon = 2m\pi\frac{(\Delta\lambda)_m}{\lambda}$$

$$A = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_m} = \frac{2mN}{2.07} = 0.97mN$$

提高A的途径

$$A=\frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_m}=mN(\sim 0.97mN)$$

提高A两条途径：一是增大 m (增大h)；二是增大 N (提高R)



(C) 线、角色散—linear/angle dispersion

(1) 角色散率

色散率是用来表征分光仪器能够将不同波长的光分开的程度。**角色散率**定义为单位波长间隔的光，经分光仪所分开的角度，用D_θ表示，

$$D_\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}$$

公式

$$D_\theta = \mathrm{d}\theta / \mathrm{d}\lambda$$

$$2nh\cos\theta = m\lambda \quad \begin{cases} m = 2nh\cos\theta/\lambda \ldots\ldots (a) \\ -2nh\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = m\,\mathrm{d}\lambda \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\dfrac{m}{2nh\sin\theta} \cdots \quad (b) \end{cases}$$

代 (a)入 (b)，得

$$D_\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2nh\cos\theta/\lambda}{2nh\sin\theta} = -\frac{1}{\lambda}\mathrm{ctg}\,\theta$$

环中心光谱最纯

$$D_\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\mathrm{ctg}\,\theta$$

角度 θ 愈小，仪器的角色散愈大。因此，对给定波长差 $\mathrm{d}\lambda$ 的两谱线，愈靠近干涉图样中心，其分离角度愈大，这意味在法布里-珀罗干涉仪的干涉环中心处光谱最纯。

（2）线色散

线色散率定义为单位波长间隔的光，经分光仪所分开的距离，用 D_L 表示

$$D_L = f \cdot D_\theta = f \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{f}{\lambda} \cdot \mathrm{ctg}\,\theta$$

5.6 光的相干性 coherence

1. 定义

时间相干性:

空间同一点在不同时刻辐射光波的相位相关性。

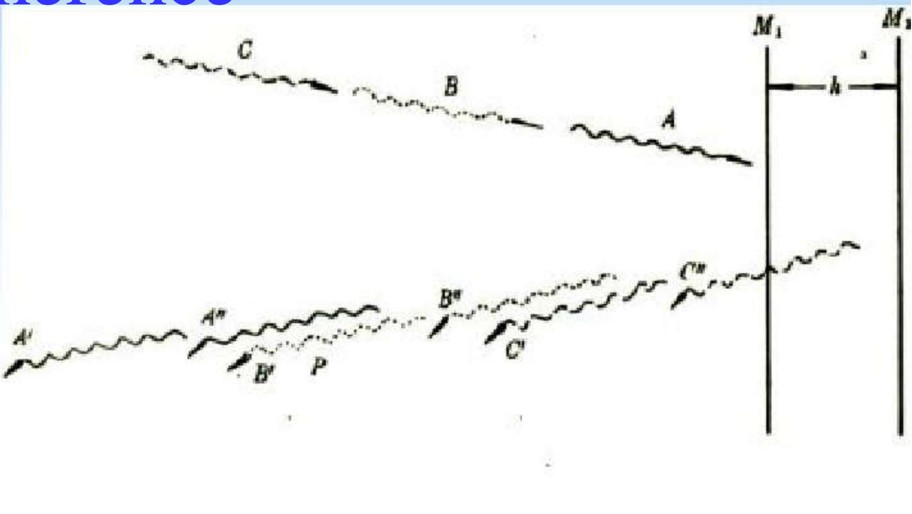


图 2-19 当 M_1M_2 间距离 h 大于 $L/2$，$A'A''$不发生重叠

空间相干性:

空间不同点在同一时刻辐射光波的相位相关性。

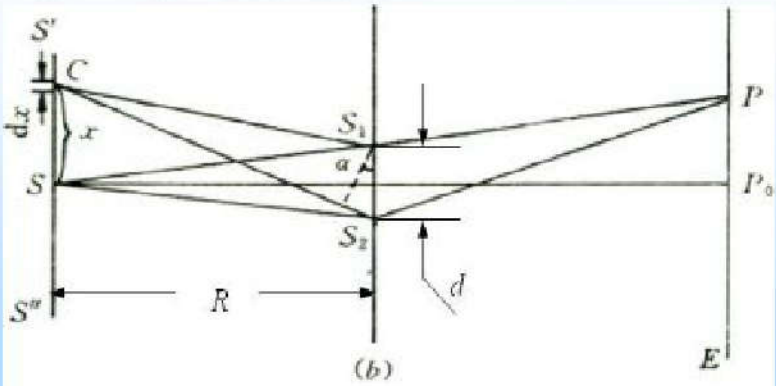


图 2－59 扩展光源的杨氏干涉

5.6.1 光的空间相干性

扩展光源是大量非相干点源的集合，观测到的干涉场是那一组组干涉条纹的非相干叠加；非相干叠加结果使可见度 V 值有所下降。当光源大到一定程度时，甚至使 V 值降为零，即干涉现象消失.

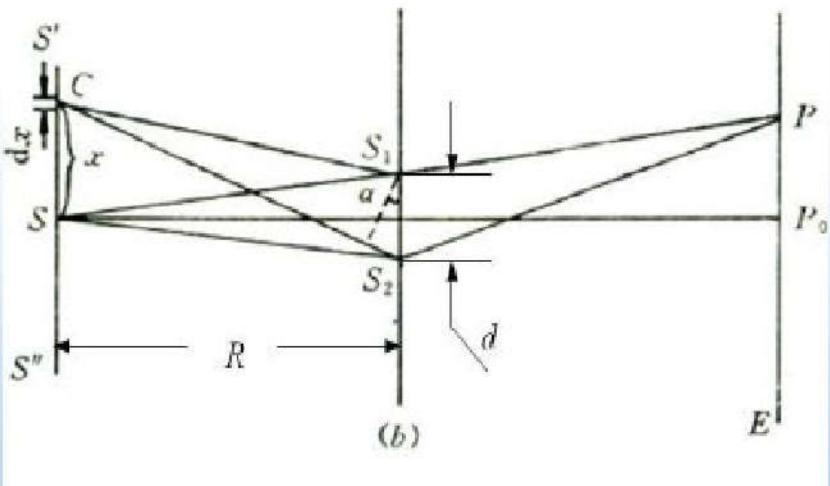
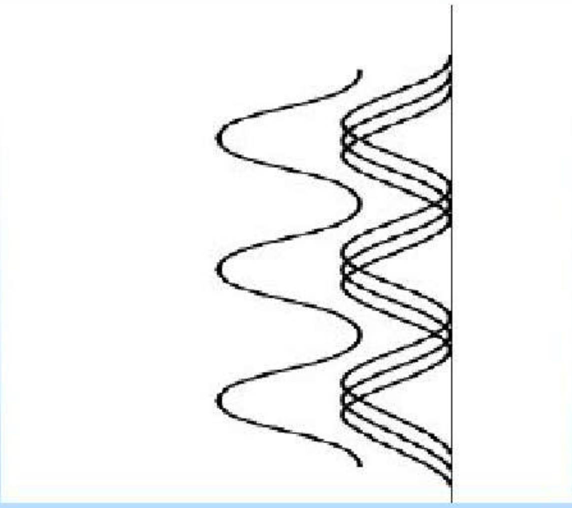


图 2－59　扩展光源的杨氏干涉



1. 横向相干线度d

在垂直于光传播方向的某方向上，能产生干涉的(干涉现象第一次消失)的两最远点之间的距离.

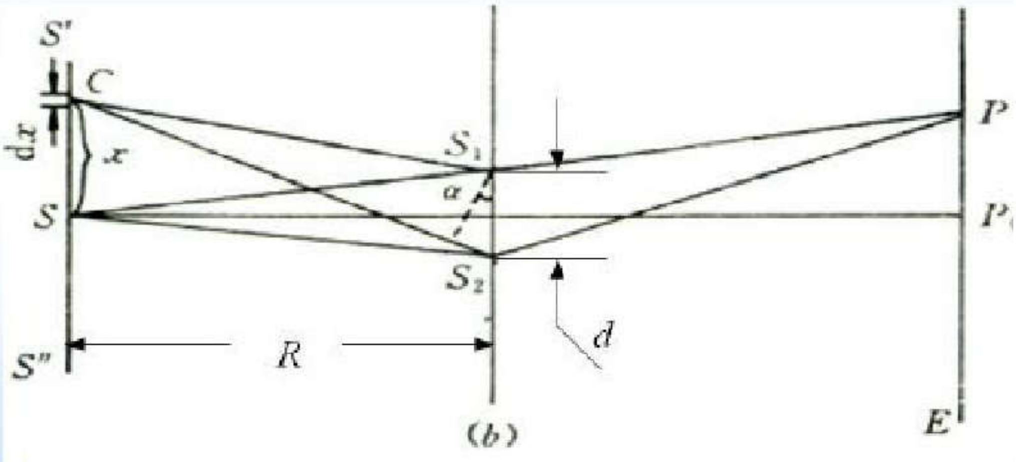
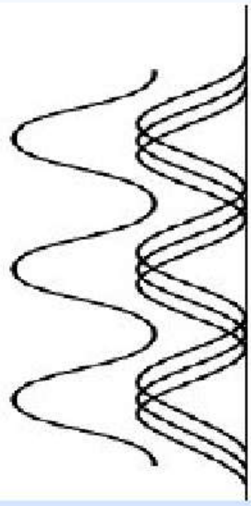
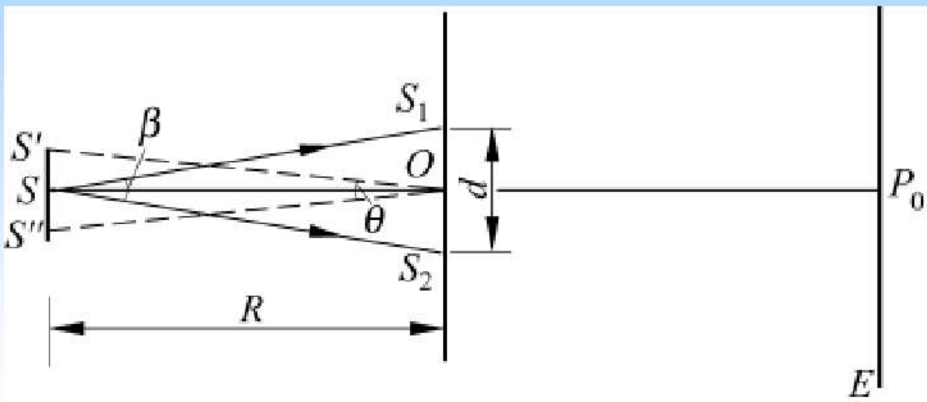


图 2－59 扩展光源的杨氏干涉

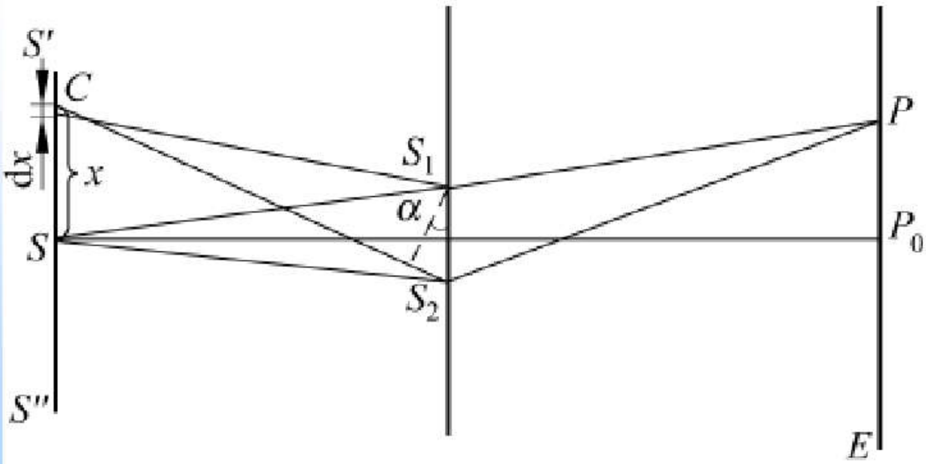


扩展带光源

设 (a)所示的以S为中心的扩展带光源$S'S''$宽度为b, 可视为许多无穷窄线光源元，总的光强度便是这些线光源元产生的光强度之和。

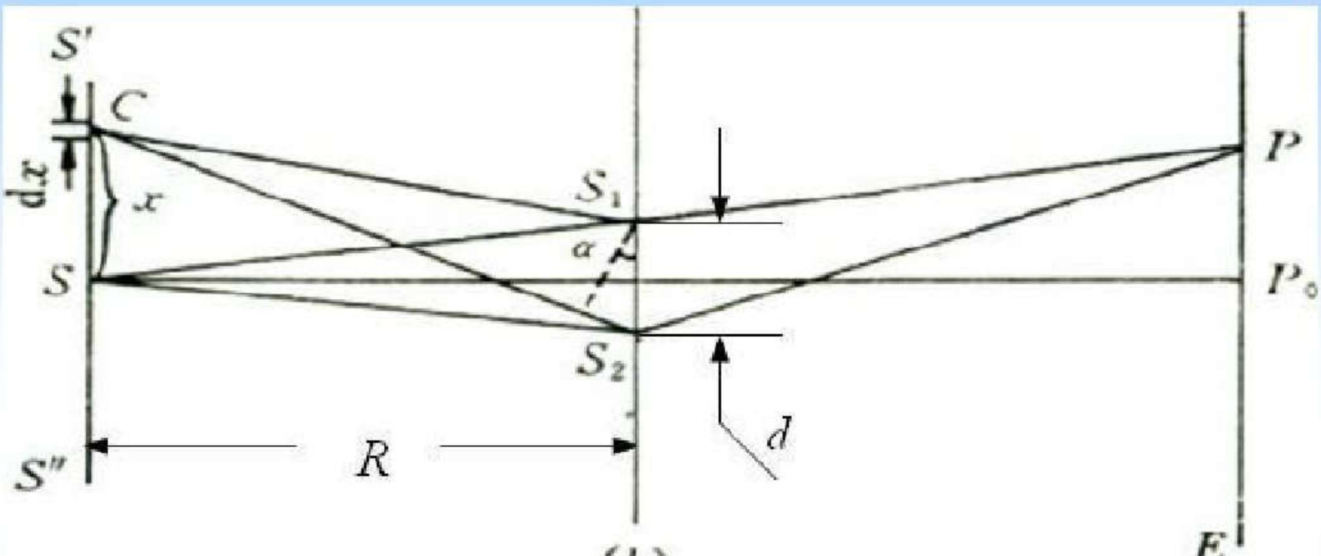


(a) S_1和S_2对扩展光源中心S的张角β和扩展带光源$S'S''$对S_1S_2连线的中心O的张角θ



(b) 计算距离S为x的元光源在P点产生的光强度

光源宽度 b 与附加光程差

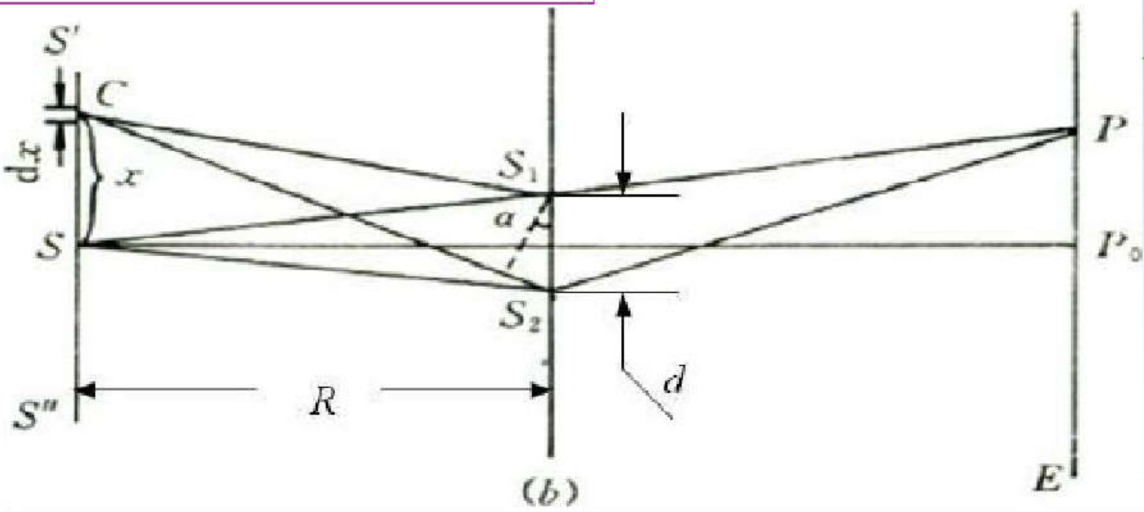


(b)

$$cs_2{}^2 = R^2 + \left(x + d/2\right)^2$$

$$= R^2 + x^2 + xd + \left(d/2\right)^2 \quad (a)$$

$$cs_1{}^2 = R^2 + \left(x - d/2\right)^2 = R^2 + x^2 - xd + \left(d/2\right)^2 \quad (b)$$



$R,$则

$\simeq$

Δ_x $\simeq x\beta$

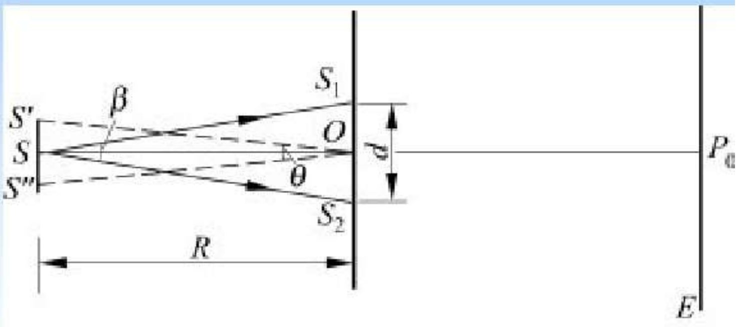
扩展光源的干涉强度

$$\Delta_x = xd/R \simeq x\beta$$

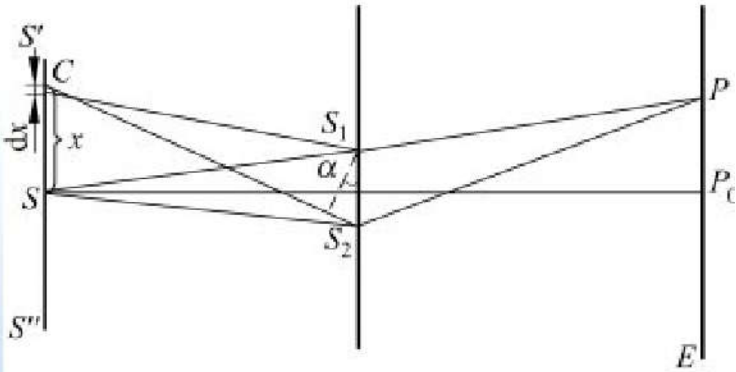
$$I = \int_{-b/2}^{b/2} 2I_0\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta + x\beta)\right]\mathrm{d}x$$

$$= b\left(2I_0 + 2I_0\frac{\lambda}{\pi b\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right)$$

$$= b\left(2I_0 + 2I_0\,\mathrm{sinc}\frac{b\beta}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right)$$

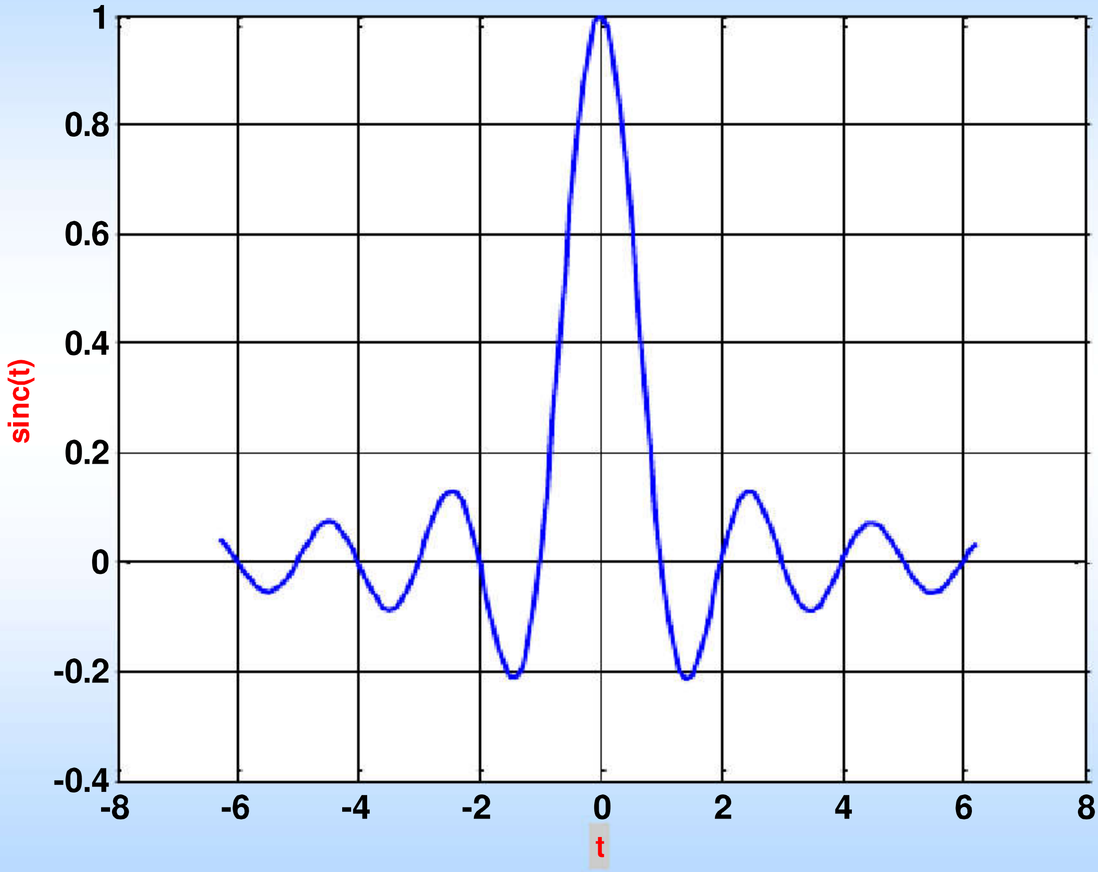


(a) S_1 和 S_2 对扩展光源中心 S 的张角 β 和扩展带光源 $S'S''$ 对 S_1S_2 连线的中心 O 的张角 θ



(b) 计算距离 S 为 x 的元光源在 P 点产生的光强度

Δ 为双缝到观察点的光程差，第一项表示背景强度，随着光源宽度的增大而增强；第二项随Δ 周期性地变化，不超过$2I_0$。


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
sinc(t)
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
t

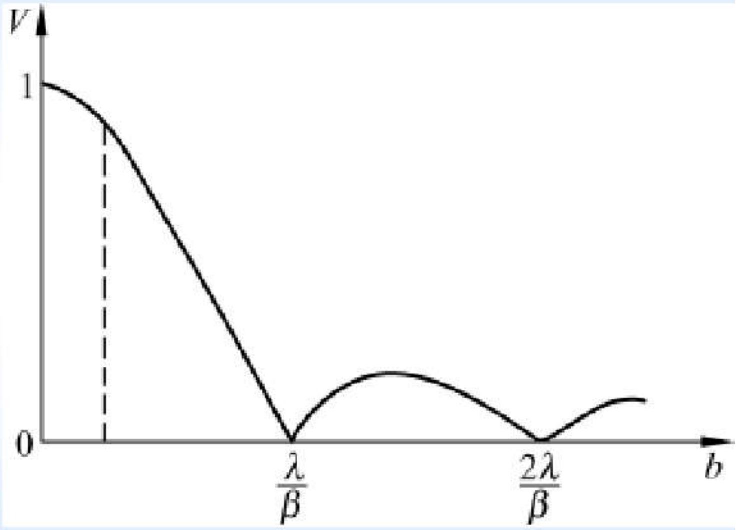
可见度

$$I = 2I_0 b + 2I_0 b \operatorname{sinc}\frac{b\beta}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta$$

$$I_M = 2I_0 b + 2I_0 b \operatorname{sinc}\frac{b\beta}{\lambda}$$

$$I_m = 2I_0 b - 2I_0 b \operatorname{sinc}\frac{b\beta}{\lambda}$$

$$V = \left|\operatorname{sinc}\frac{b\beta}{\lambda}\right|$$



显然,随光源宽度b或$\beta = d/R$ 增大,条纹的可见度下降。

临界宽度和横向相干长度

$V=\left|\text{sinc}(b\beta/\lambda)\right|$ 第一零点 $b\beta=bd/R=\lambda$

当 b 确定时， 相应的 $d_t=R\lambda/b$ 即为横向相干长度。

当 d 确定时， 相应的 $b_c=R\lambda/d$ 即为光源临界宽度。

当光源宽度不超过临界宽度的1/4时，$V>0.9$。
此光源宽度称为许可宽度b_p。

$$b_p=\frac{b_c}{4}=\frac{\lambda}{4\beta}$$

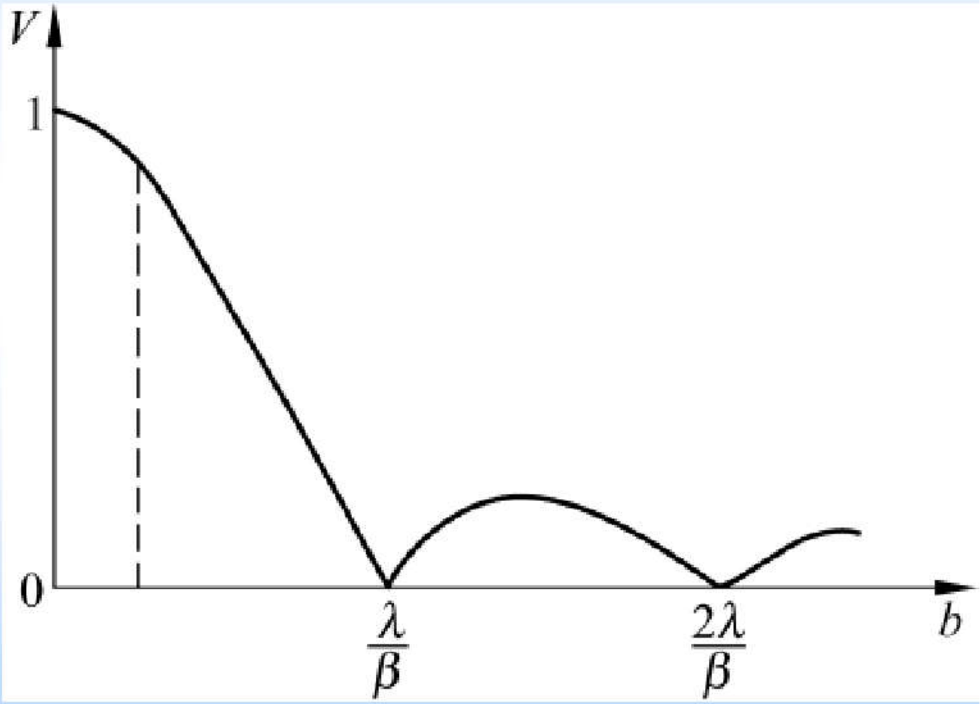
V-b

$$V = \left|\operatorname{sinc}\frac{b\beta}{\lambda}\right|$$

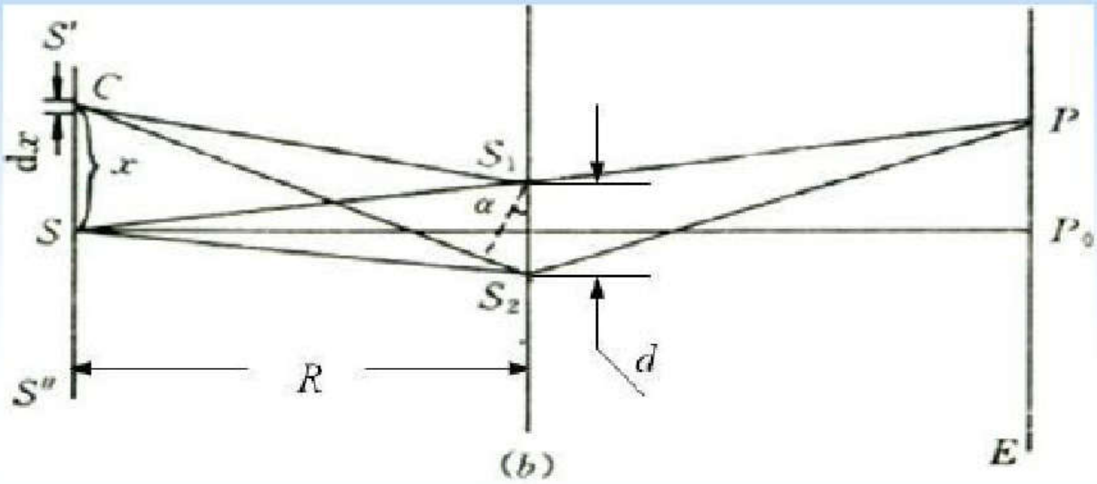
- 光源临界宽度b_c，

$$b_c = \frac{\lambda}{\beta}$$

$$= R\lambda / d$$



横向相干长度物理意义



$$d_t = R\lambda / b$$

$$\Delta_x = xd / R$$

$$\Delta_{b/2} = (b/2)\bullet(R\lambda/b)/R \simeq \lambda/2$$

2. 相干面积
— Area of coherence

（A) 定义：在垂直于光传播方向的某平面上，能产生干涉的最大区域的面积 A_C。

(B) $d_t = R\lambda / b$ 两边平方，即得

$$A_C = d_t^2 = \frac{R^2}{b^2}\lambda^2 = \frac{R^2}{A_s}\lambda^2$$

$A_C = d_t^2$ 即为横向相干面积 ， A_C与 $b^2 = A_s$ 成反比

方/圆形光源

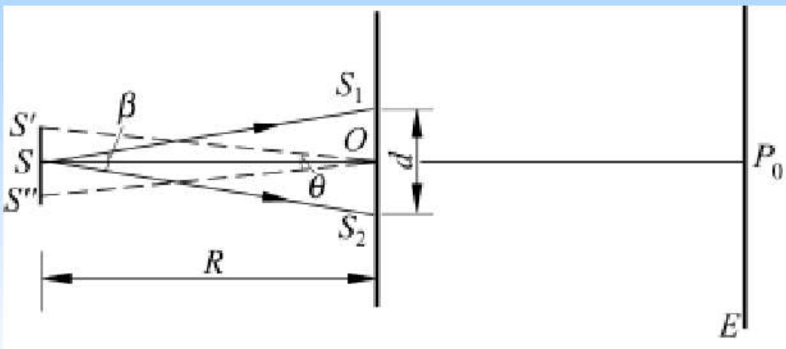
- 方形光源，**相干面积**

$$A_C = d_t^2 = (\lambda/\theta)^2$$

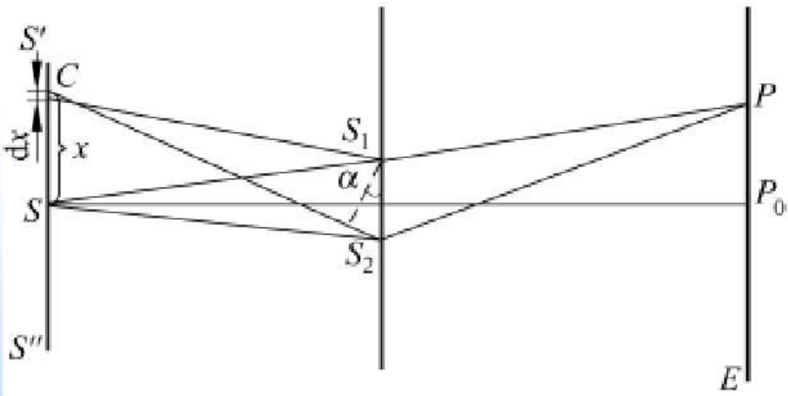
- 圆形光源，横向相干长度和相干面积分别为

$$d_t = \frac{1.22\lambda}{\theta}$$

$$A_C = \pi\left(\frac{0.61\lambda}{\theta}\right)^2$$



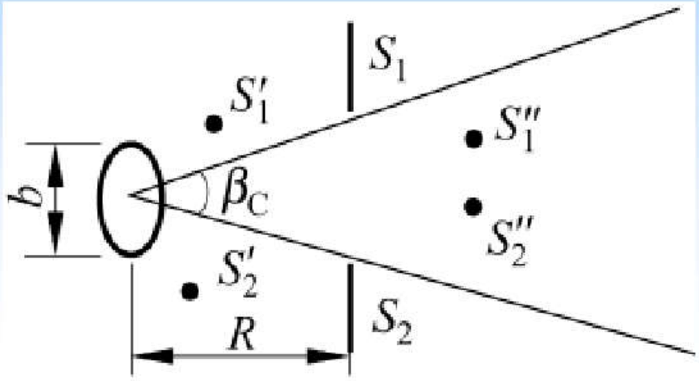
(a) S_1 和 S_2 对扩展光源中心 S 的张角 β 和扩展带光源 $S'S''$ 对 S_1S_2 连线的中心 O 的张角 θ



(b) 计算距离 S 为 x 的元光源在 P 点产生的光强度

θ： $S'-O-S''$ 张角

3. 相干孔径角β_C



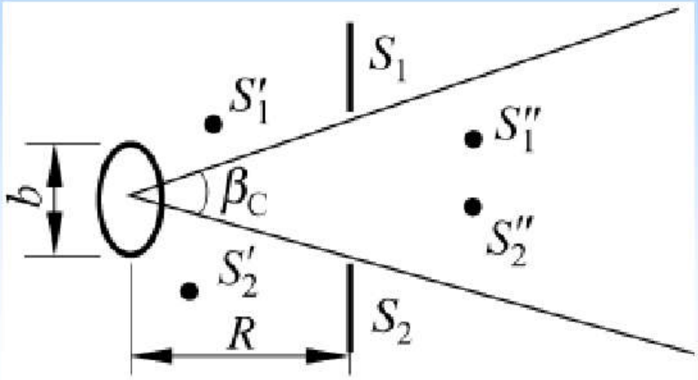
■光场中保持相干性的两最大横向分离点相对于光源中心的张角，即

$$\beta_C = \frac{d_t}{R} = \frac{\lambda}{b}$$

孔径角以外的两点(如S'_1和S'_2) 不相干，在孔径角以内的两点(如S''_1和S''_2)都具有一定程度的相干性。

β_C 与 b 的关系

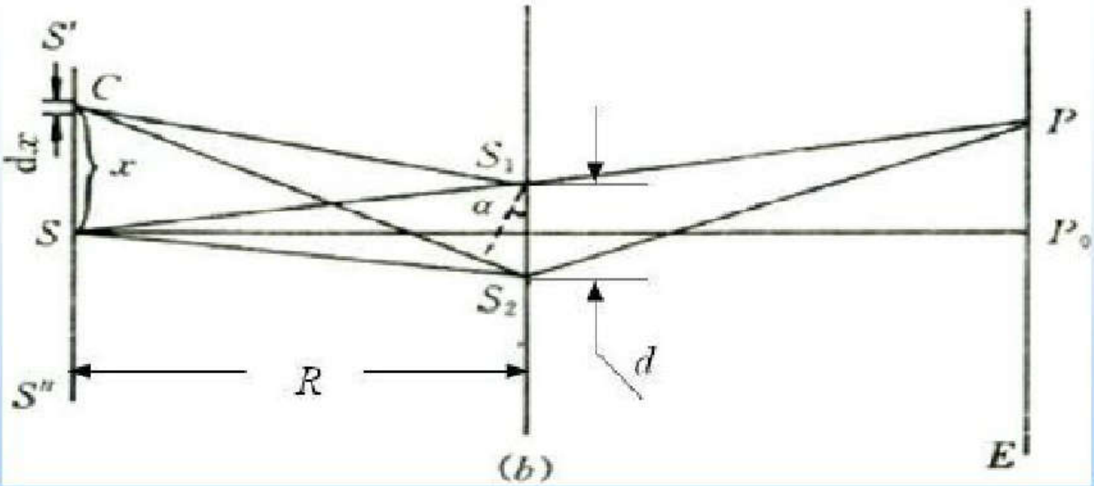
$$b\beta_C = \lambda$$



该式称为**空间相干性的反比公式**。光源小，空间相干性好；可忽略大小的点光源应有最好的空间相干性。

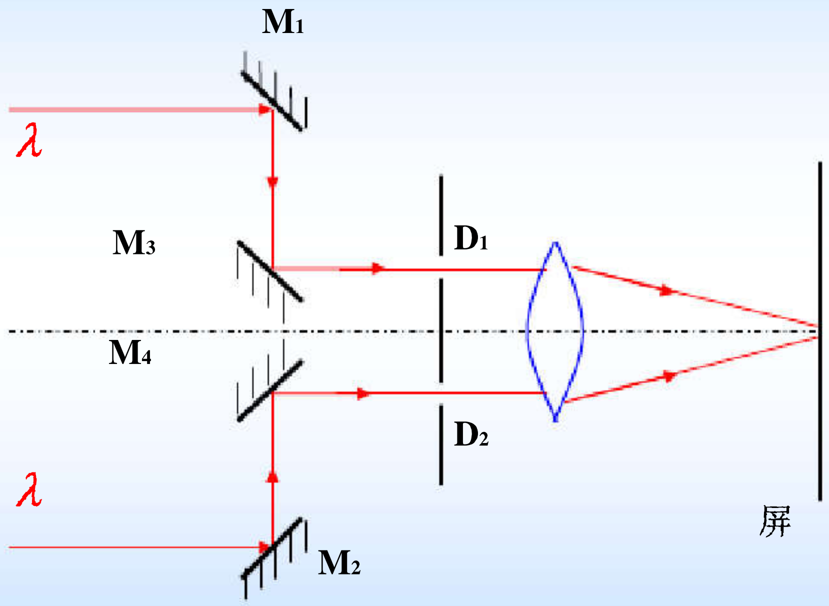
光源的空间展宽与空间相干

- 光场的空间相干性来源于光源的空间展宽；空间展宽越大、其光场的空间相干性越差，通过限制光源线度可以实现同时异地光振动的关联。空间相干性反映了光波场的横向相干性。



迈克尔孙测星干涉仪

测星干涉仪



5.6.2 光的时间相干性

分振幅干涉系统中，如果采用单色/无限长光源，则可产生清晰的干涉条纹。如果采用复色/有限长光源，其干涉条纹的可见度将降低。下面讨论光源的非单色性/有限长对条纹可见度的影响，并由此引出光的时间相干性的概念。

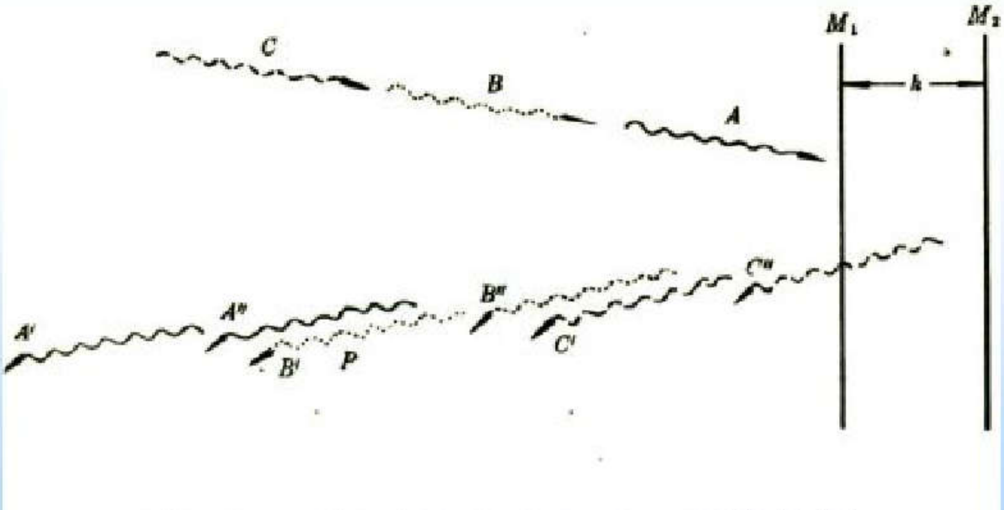


图 2-19 当 M_1M_2 间距离 h 大于 $L/2$，$A'A''$不发生重叠

1. 相干长度
— Coherence length

* 能够发生干涉的最大光程差
* 波串（wave trains）长度

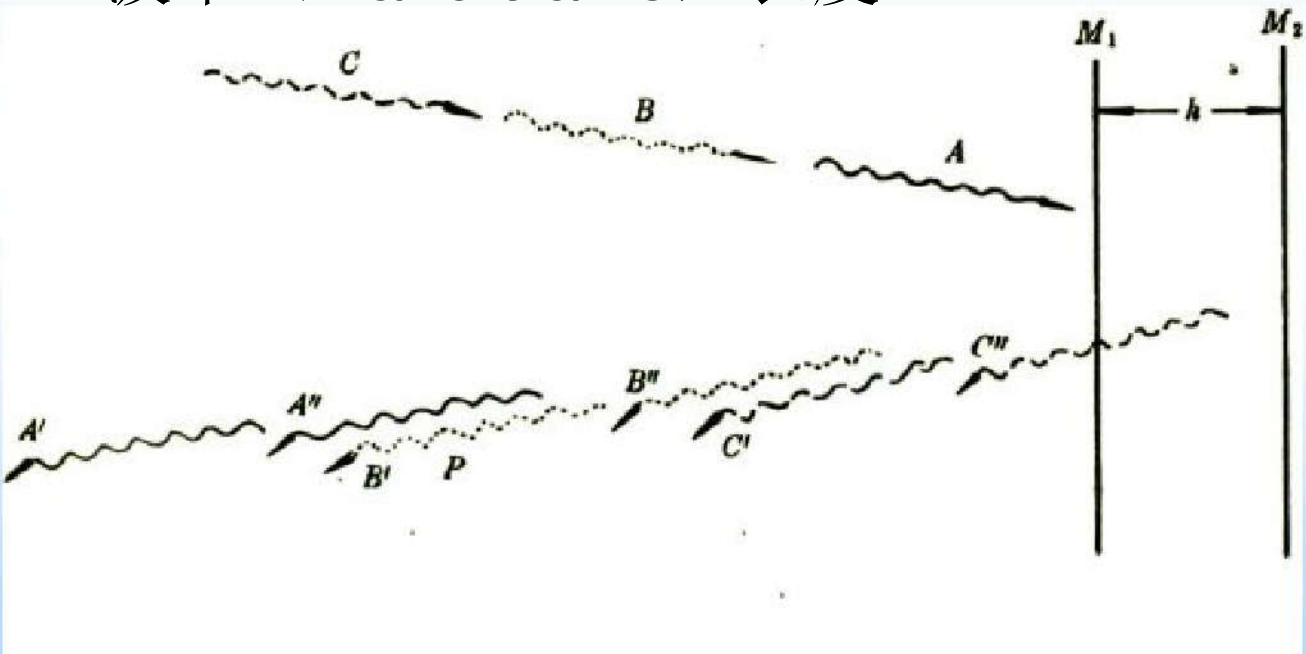
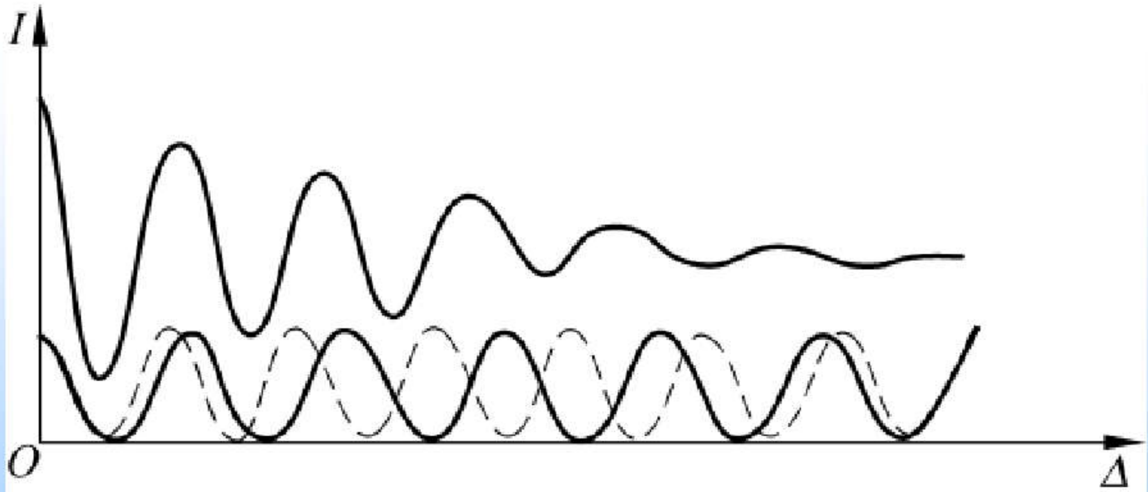


图 2-19 当 M_1M_2 间距离 h 大于 $L/2$，$A'A''$不发生重叠

谱线宽度Δλ限制可见度

- 光源含一定谱线宽度 Δλ，在干涉实验中，Δλ 内每一波长的光都生成各自的一组干涉条纹，除零级外，各组条纹间均有位移(图的下部曲线)，干涉条纹的可见度随着光程差的增大而下降(图的上部曲线)，最后降为零。因此，光源的谱线宽度限制了干涉条纹的可见度。



光程差Δ -总光强 I

■给定光程差Δ ,在Δk内各光谱分量产生的总光强

$$I=\int_{k_0-\frac{\delta k}{2}}^{k_0+\frac{\delta k}{2}} 2I_0[1+\cos(k\Delta)]\mathrm{d}k$$

$$=2I_0\delta k\left[1+\frac{\sin\left(\delta k\frac{\Delta}{2}\right)}{\delta k\frac{\Delta}{2}}\cos\left(k_0\Delta\right)\right]$$

式中第一项是常数，表示平均光强；第二项随光程差Δ的大小变化，但变化的幅度越来越小。

V--Δ

$$I = 2I_0\delta k\left[1+\frac{\sin\left(\delta k\dfrac{\Delta}{2}\right)}{\delta k\dfrac{\Delta}{2}}\cos\left(k_0\Delta\right)\right]$$

$$I_M = 2I_0\delta k\left[1+\frac{\sin\left(\delta k\dfrac{\Delta}{2}\right)}{\delta k\dfrac{\Delta}{2}}\right], \qquad I_m = 2I_0\delta k\left[1-\frac{\sin\left(\delta k\dfrac{\Delta}{2}\right)}{\delta k\dfrac{\Delta}{2}}\right]$$

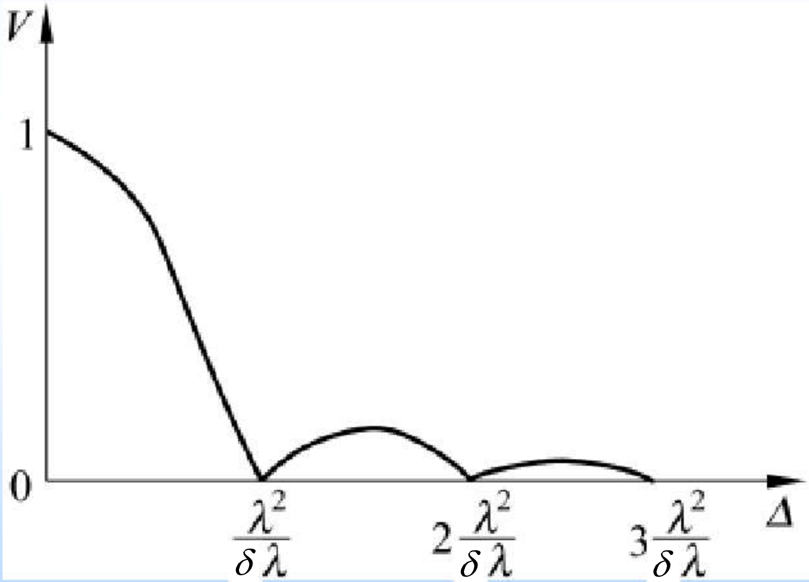
$$V = \left|\frac{\sin(\pi\delta\lambda\dfrac{\Delta}{\lambda^2})}{\pi\delta\lambda\dfrac{\Delta}{\lambda^2}}\right| = \left|\mathrm{sinc}(\delta\lambda\frac{\Delta}{\lambda^2})\right|$$

相干长度

$$V = \left| \mathrm{sinc}\left(\delta\lambda \frac{\Delta}{\lambda^2}\right) \right|$$

相应于 V 第一零点的光程差是能够发生干涉的最大光程差，称为相干长度，用Δ_C表示,即

$$\Delta_C = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda} = \frac{2\pi}{\delta k}$$



2. 相干时间τ_C

*定义：光波通过相干长度所需的时间

实际上也就是波串的持续时间

$$\tau_C = \frac{\Delta_C}{c}$$

式中，c是光的速度。空间同一点在相干时间τ_C内不同时刻发出的光可以产生干涉，在大于τ_C期间发出的光不能干涉。

$$\tau_C - \delta\nu$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{\lambda^2}{\delta\lambda} \\ \frac{\delta\lambda}{\lambda} &= \frac{\delta\nu}{\nu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{\lambda\nu}{\delta\nu} \\ \tau_C &= \frac{\Delta_C}{c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau_C \delta\nu = \frac{\lambda\nu}{c}$$

$$\Rightarrow \tau_C \cdot \delta\nu = 1$$

该式说明，$\delta\nu$ 愈小(单色性愈好)，τ_C 愈大，光的时间相干性愈好。

综上所述

* 实际光波都是一段段有限波列的组合
* 相干长度 Δ_C 就是波列的空间长度 L
* 相干时间 τ_C 就是波列的持续时间 τ
* 谱线越宽，时间相干性越差，因而限制光源的光谱宽度可以改善时间相干性；时间相干性反应了光波场的纵向相干性。

表5-3 几种不同光源的相干长度比较

光源	相干长度数量级（m）
白光	10^{-6}
纳	10^{-2}
汞	10^{-1}
氪	10^{0}
氦氖激光器 一般（连续输出）	$0.2 \sim 0.3$
氦氖激光器 特别（单模）	4×10^{5}

作业：2、3、4、5、6、7、9、11、12、15、18、20、23、25、27、28、29