第九章

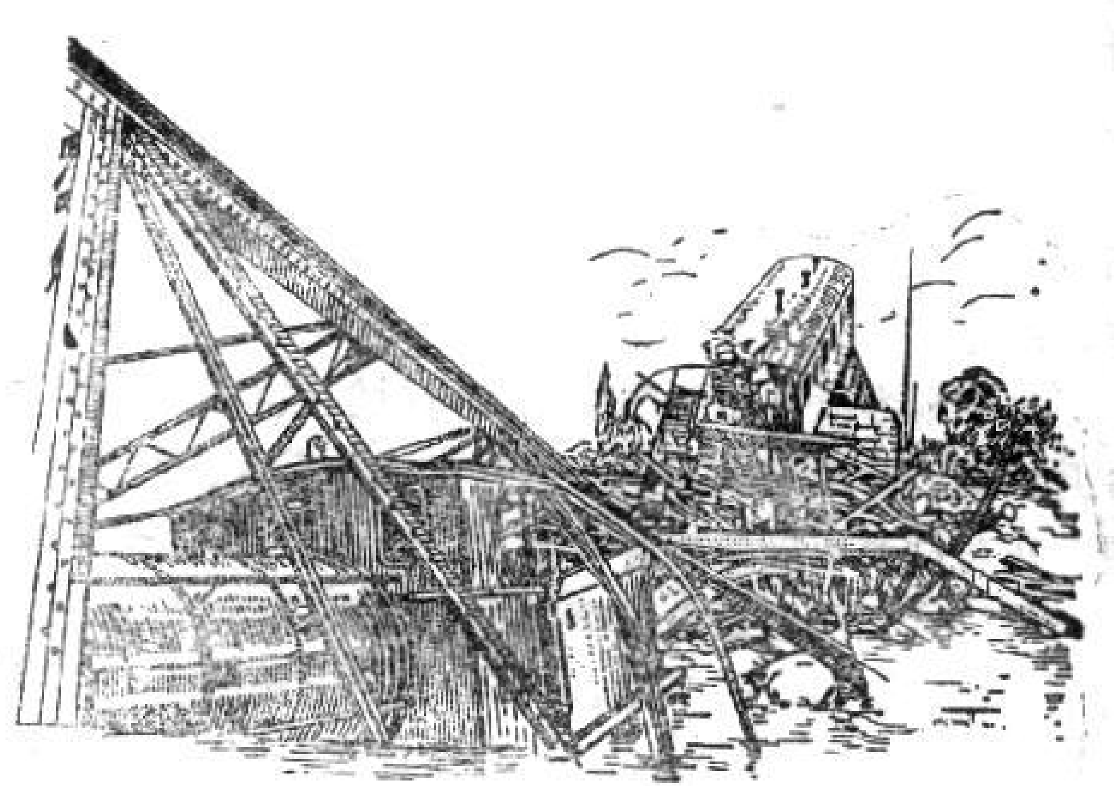
压杆稳定

（一）

§ 9 –1 压杆稳定性的概念

构件的承载能力：

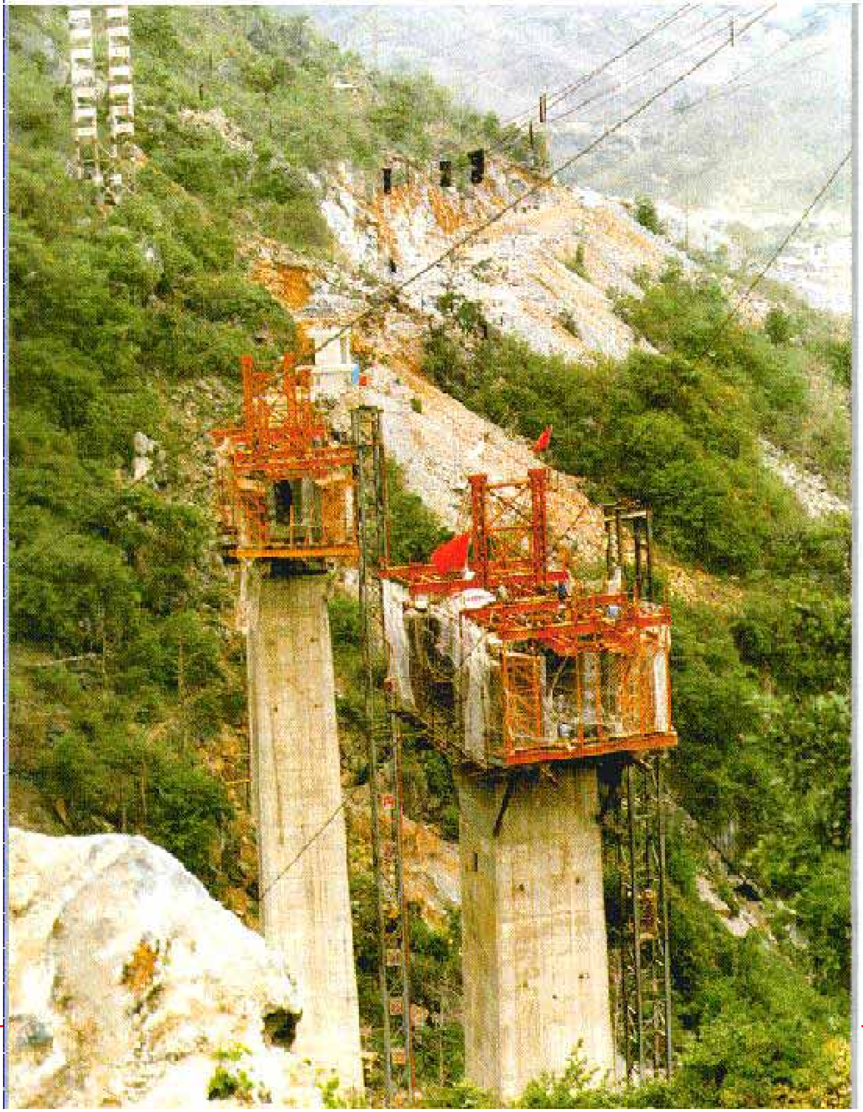
- ①强度
- ②刚度
- ③稳定性

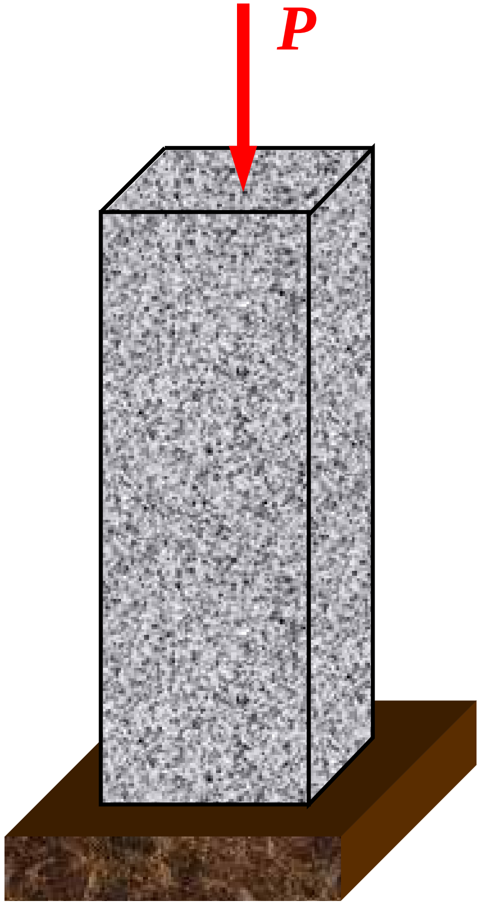


工程中有些构件具有足够的强度、刚度，却不一定能安全可靠地工作。

一、压杆稳定的工程实例

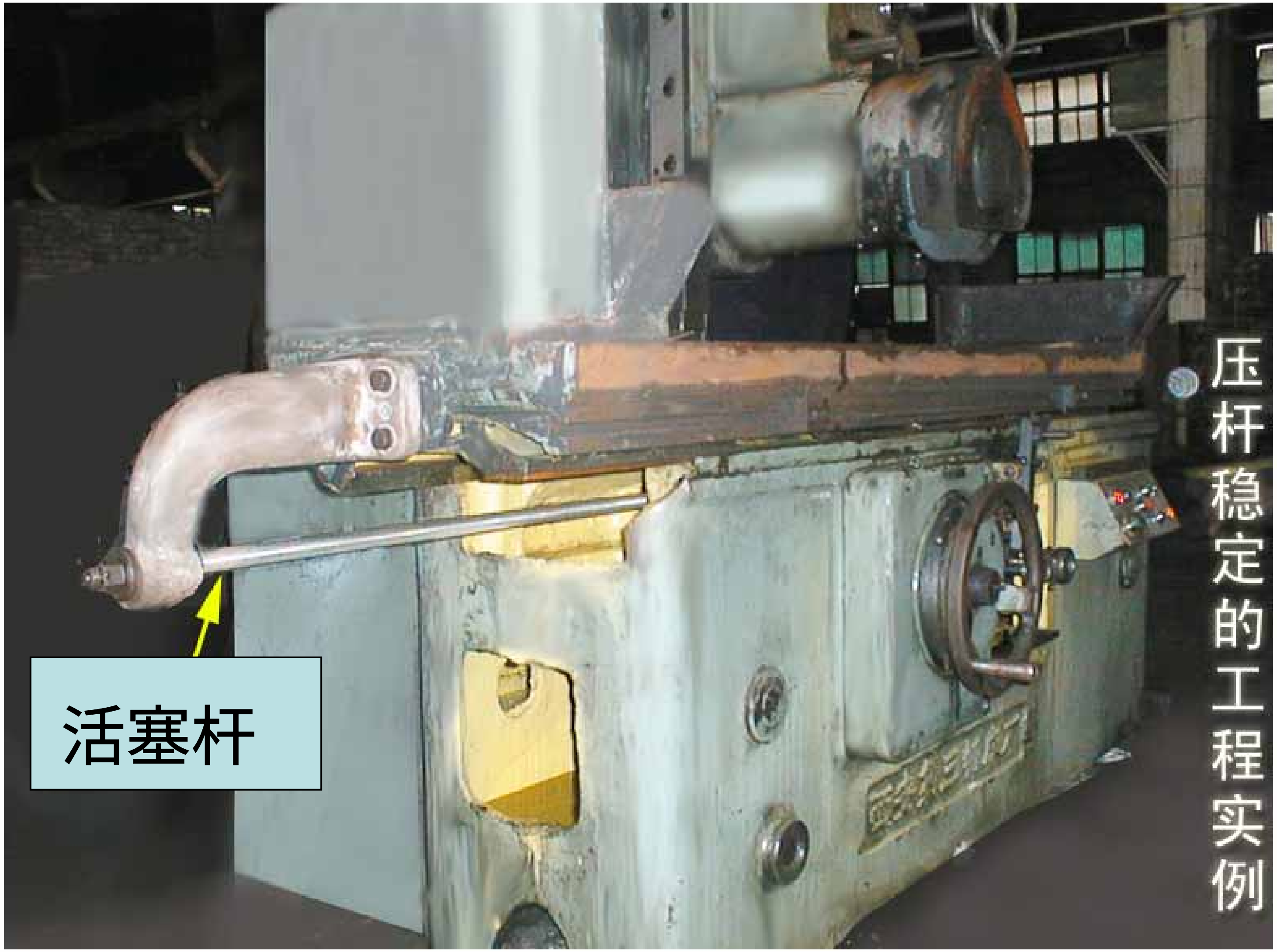
南昆铁路重点工程之一板其2号大桥依地形、顺山势，是中国第一座弯梁桥。





压杆稳定的工程实例

压杆稳定的工程实例



压杆稳定的工程实例

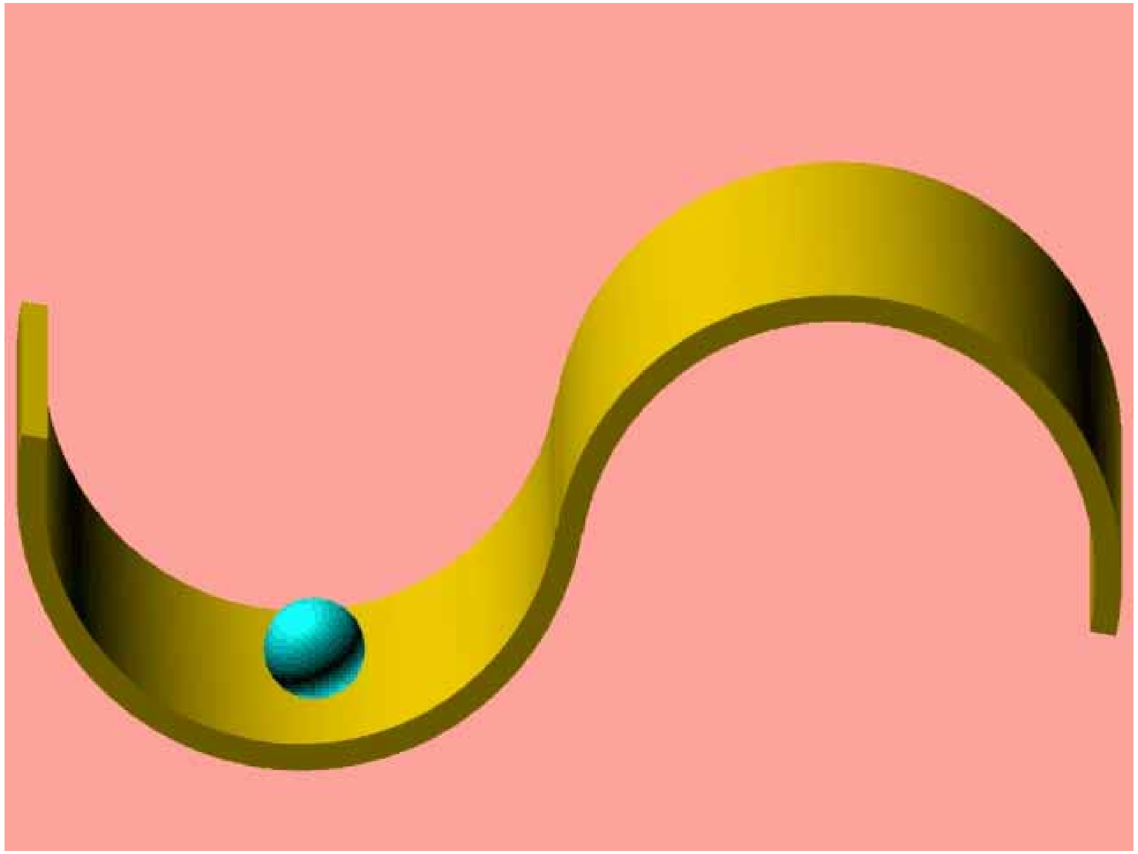
桁架中的
受压杆

钢塔因局部压杆失稳而倒塌

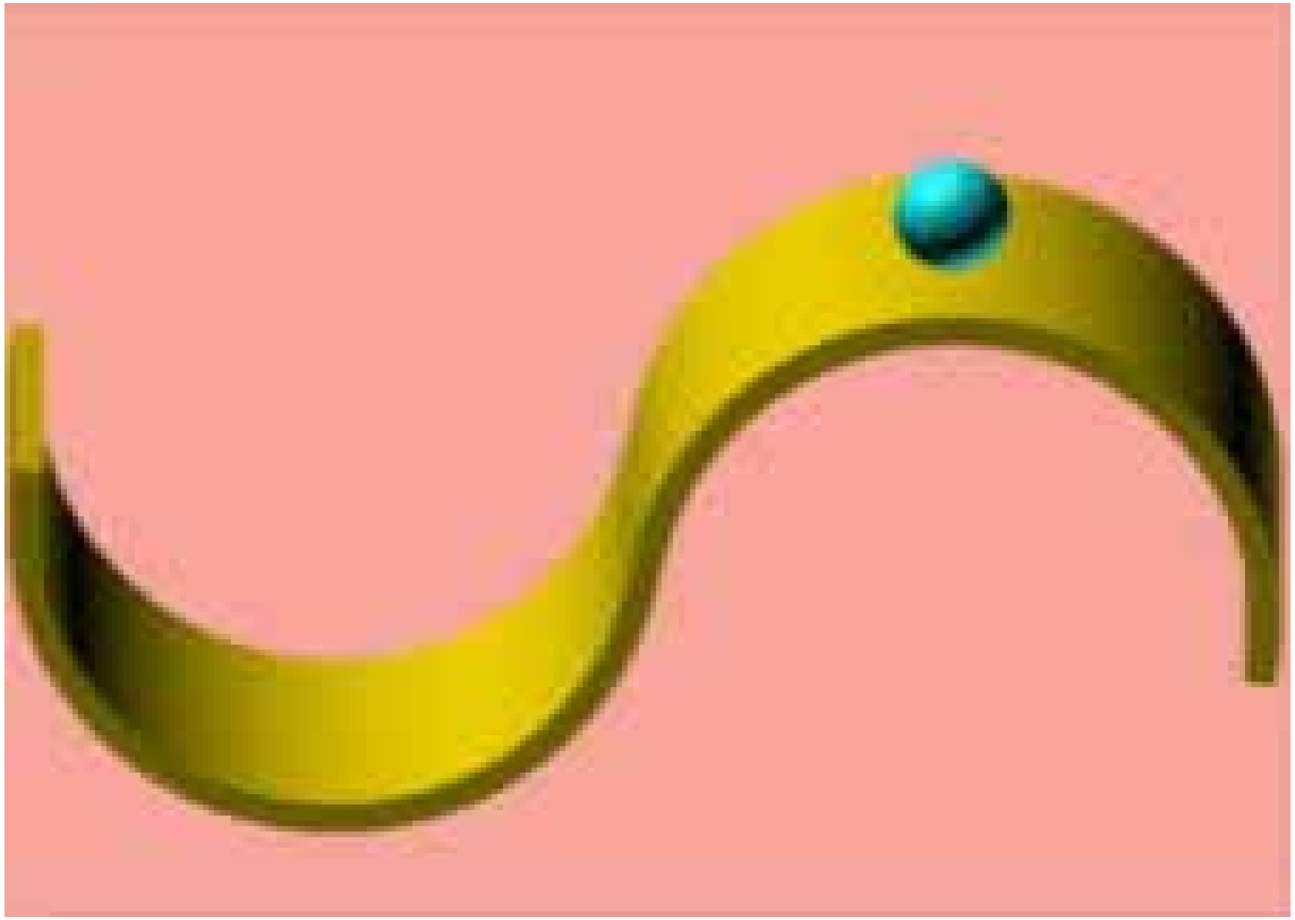
压杆稳定的工程实例

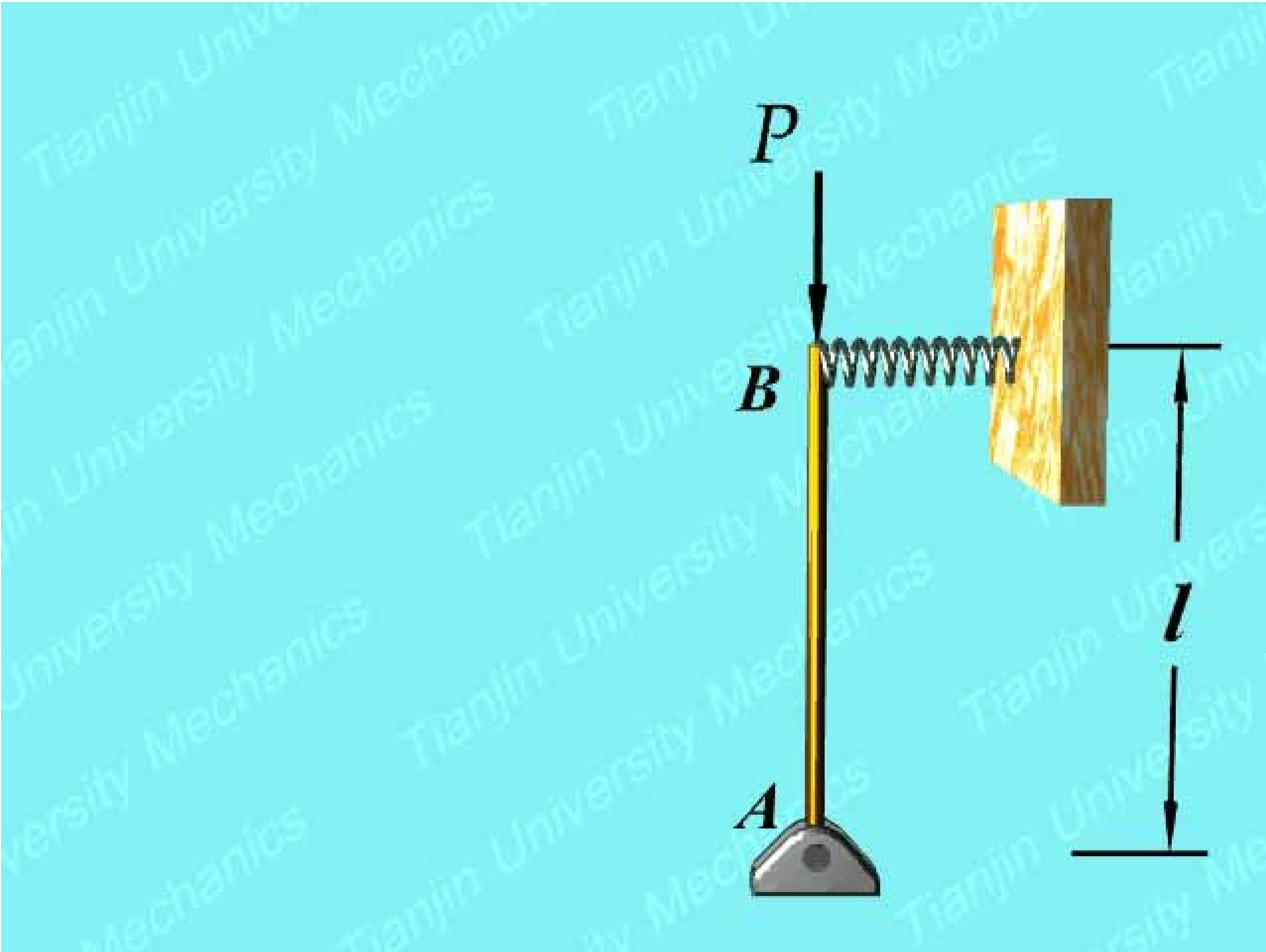
二、稳定平衡和不稳定平衡

1. 稳定平衡



2. 不稳定平衡



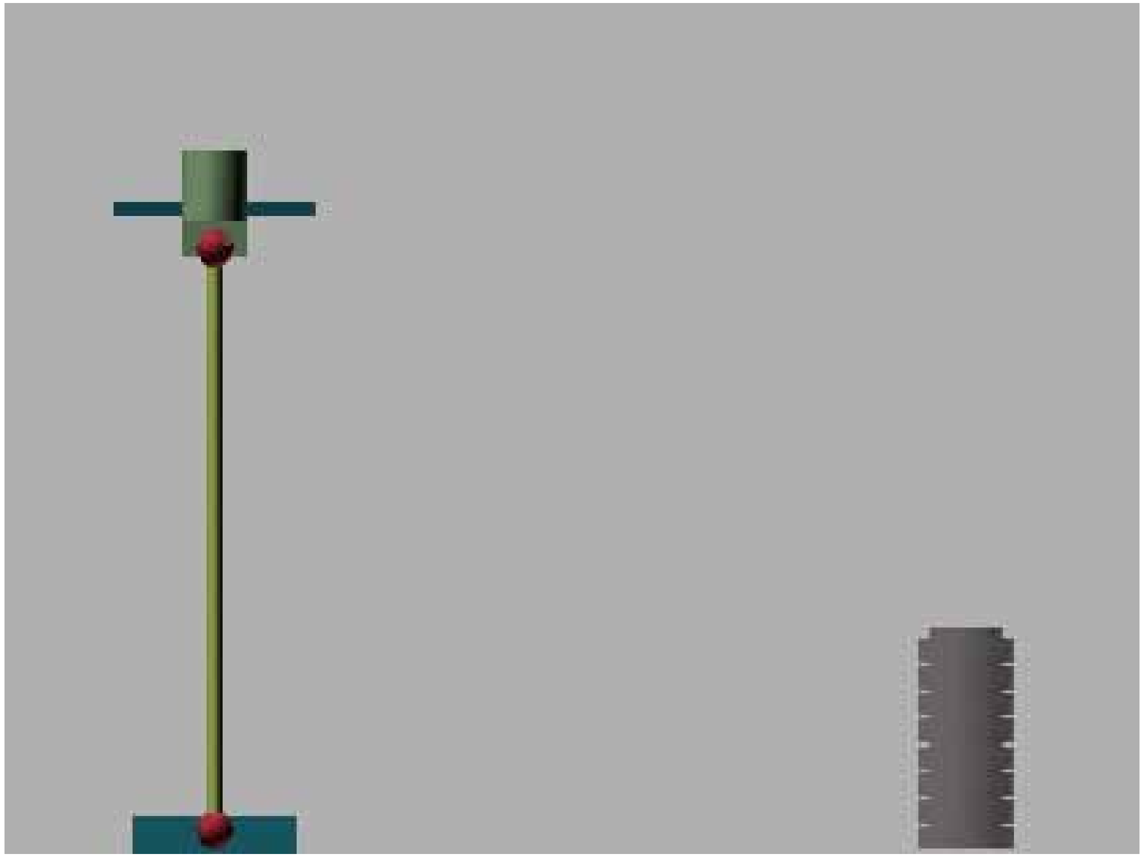


杆件失稳！

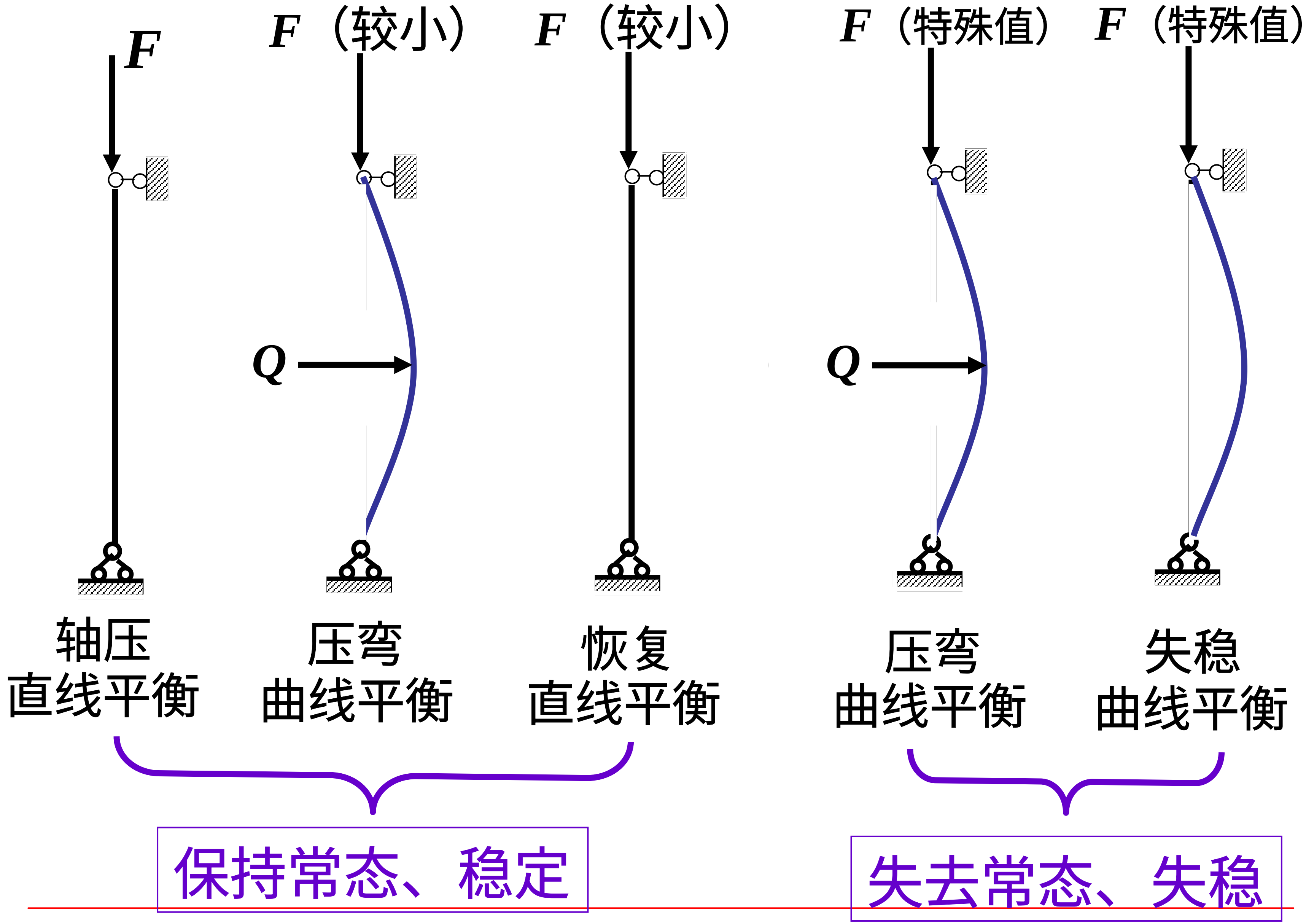
三、压杆失稳与临界压力 ：

1.理想压杆：材料绝对理想；轴线绝对直；压力绝对沿轴线作用。

2.压杆的稳定平衡与不稳定平衡：



稳定平衡和非稳定平衡



F
F（较小）
F（较小）
F（特殊值）
F（特殊值）
Q
Q
轴压
直线平衡
压弯
曲线平衡
恢复
直线平衡
压弯
曲线平衡
失稳
曲线平衡
保持常态、稳定
失去常态、失稳

压杆失稳的现象：

1. 轴向压力较小时，杆件能保持稳定的直线平衡状态；

2. 轴向压力增大到某一特殊值时，直线不再是杆件唯一的平衡状态；

稳定：（Stable） 理想中心压杆能够保持稳定的（唯一的）直线平衡状态；

失稳：（Unstable） 理想中心压杆丧失稳定的（唯一的）直线平衡状态；

临界力（Critical force） ⇐ 压杆失稳时，两端轴向压力的特殊值

§9-2 细长中心受压直杆临界力的欧拉公式

思路：假设压杆在某个压力F_{cr}作用下在曲线状态平衡，然后设法去求挠曲函数。若：

1）求得的挠曲函数≡0，说明只有直线平衡状态；

2）求得不为零的挠曲函数，说明压杆的确能够在曲线状态下平衡，即出现失稳现象。

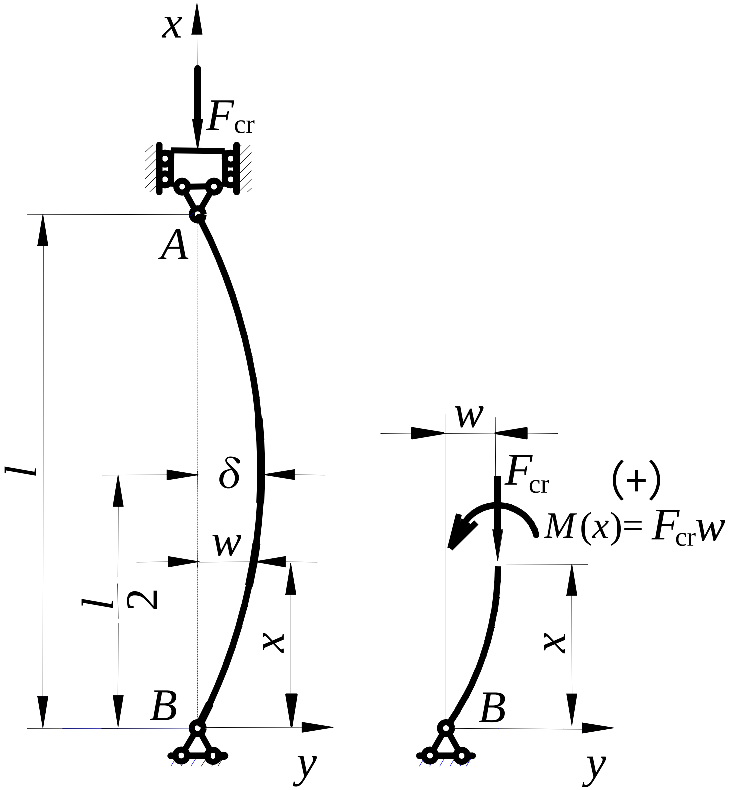
以图示两端铰支压杆为例： 弯矩方程 $M(x)=F_{cr}w$

挠曲线近似微分方程 $EIw''=-M(x)=-F_{cr}w$

令 $\dfrac{F_{cr}}{EI}=k^2$

$$w''+k^2w=0$$

$$w=A\sin kx+B\cos kx$$



(a) (b)

边界条件：当x=0时，w= 0。

$$0=A\times 0+B\cos kx$$

得：B=0，

则有 $w=A\sin kx$

$$w = A\sin kx$$

上边界条件为：当$x=l$时， $w=0$。

得 $A\sin kl = 0$

要使上式成立，

1）$A=0$ ⟹ $w=0$；

代表了压杆的直线平衡状态。

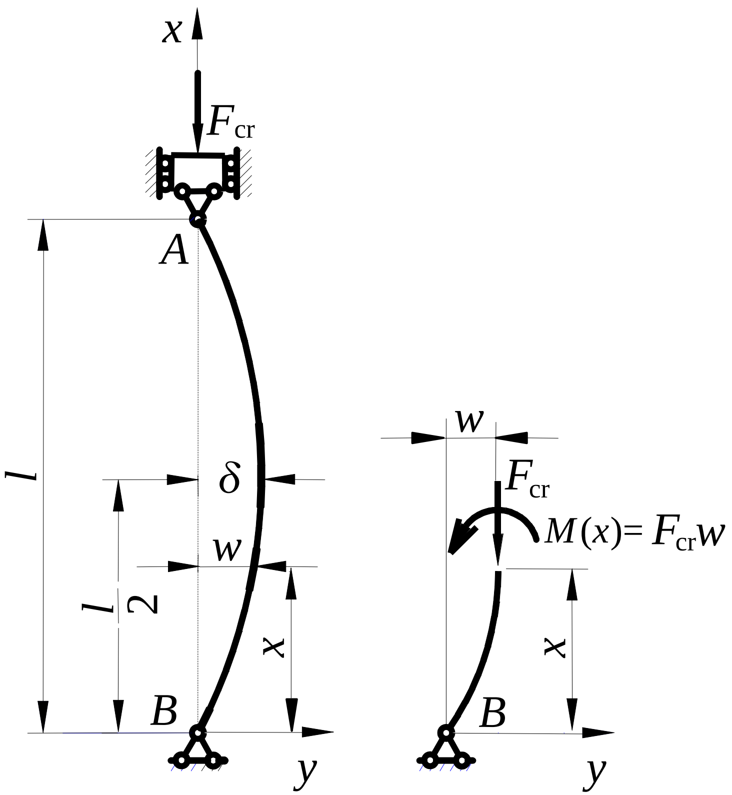
2） $\sin kl = 0$

此时***A***可以不为零。

⇓

$$w = A\sin kx \neq 0$$

失稳!!!



(a) (b)

失稳的条件是： $\sin kl = 0$

$$kl = n\pi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$$

而 $\dfrac{F_{\mathrm{cr}}}{EI} = k^2$ 即 $\sqrt{\dfrac{F_{\mathrm{cr}}}{EI}}\, l = n\pi$

解得： $F_{\mathrm{cr}} = \dfrac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$

取*n=1* $F_{\mathrm{cr}} = F_{\mathrm{cr\,min}} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$

理想中心压杆的欧拉临界力

$$F_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

在确定的约束条件下，欧拉临界力F_{cr}：

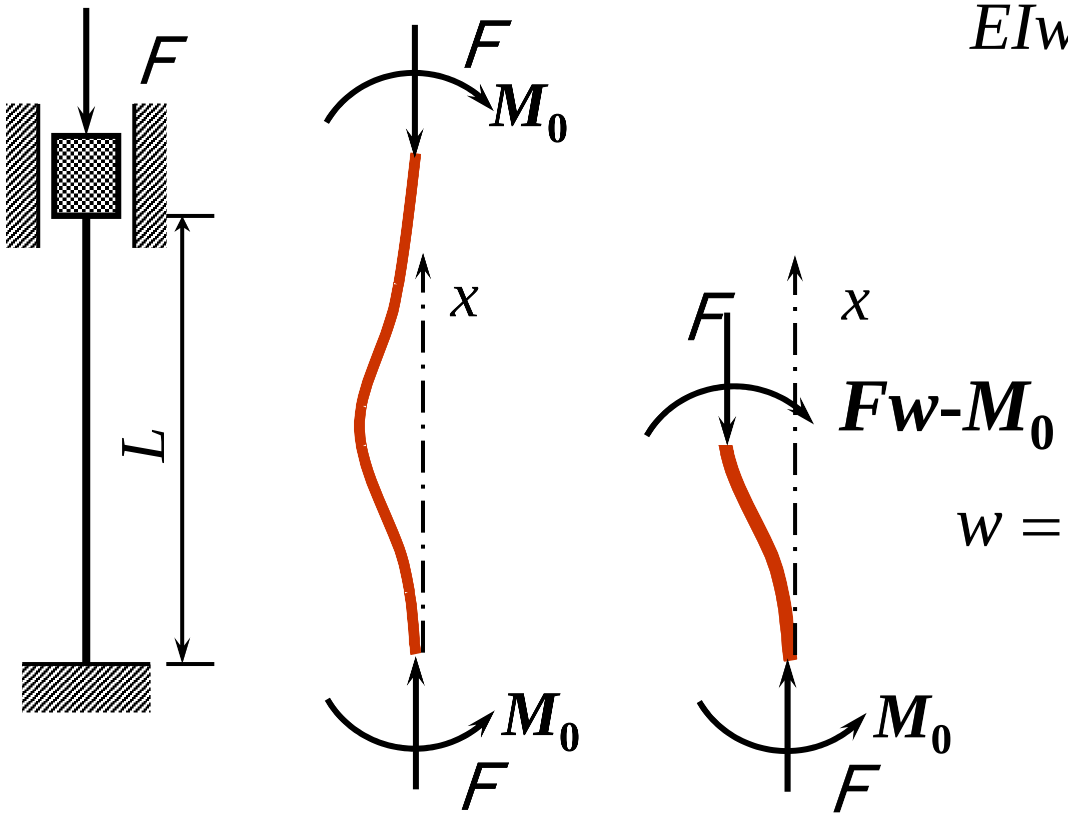
1）仅与材料（E）、长度(l)和截面（I）有关，材料的E越大，截面越粗，杆件越短，临界力F_{cr}越高；

2）是压杆的自身的一种力学性质指标，反映压杆承载能力的强弱，临界力F_{cr}越高，稳定性越好，承载能力越强；

3）与外部轴向压力的大小无关。

§9-3　不同杆端约束下细长压杆临界力的欧拉公式 · 压杆的长度系数

例9-1 试由挠曲线近似微分方程，导出下述两种细长压杆的临界力公式。



解：变形如图，其挠曲线近似微分方程为：

$$EIw'' = -M(x) = -Fw + M_o$$

$$令：k^2 = \frac{F}{EI}$$

$$w'' + k^2 w = k^2 \frac{M_o}{F}$$

$$w = c\cos kx + d\sin kx + M_o / F$$

边界条件为：

$$x = 0,\ \ w = w' = 0;$$

$$x = L,\ \ w = w' = 0$$

$$w = c\cos kx + d\sin kx + M_o / F \qquad (1)$$

(1)式两边对x求导： $$w' = -ck\sin kx + dk\cos kx \qquad (2)$$

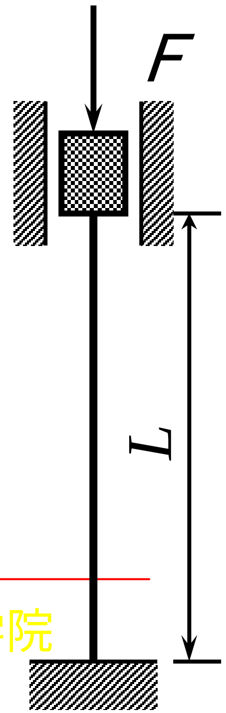
根据边界条件:

a. 由 x=0时 w'=0 代入(2)式， 有 d=0

b. 由 x=0时 w=0 代入(1)式，有 $c+M_o/F=0$

c. 由 x=L时 w=0 代入(1)式，有 $c\cos kL + M_o / F = 0$

d. 由 x=L时 w'=0代入(2)式，有 $ck\sin kL = 0$



可求得：

$$c = -\frac{M_o}{F}, \qquad d = 0,$$

$$kL = 2n\pi \quad 并 \quad kL = n\pi$$

由 $kL = 2n\pi$ 并 $kL = n\pi$

$\therefore$ $kL=2n\pi$ $n = 0,\pm1,\pm2.....$

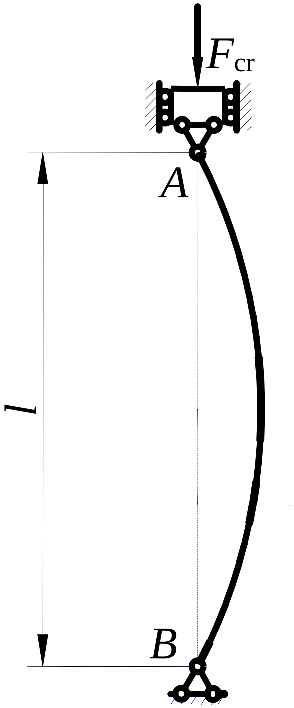
为求最小临界力，“ k ”应取除零以外的最小值，即取：

$$kL=2\pi$$

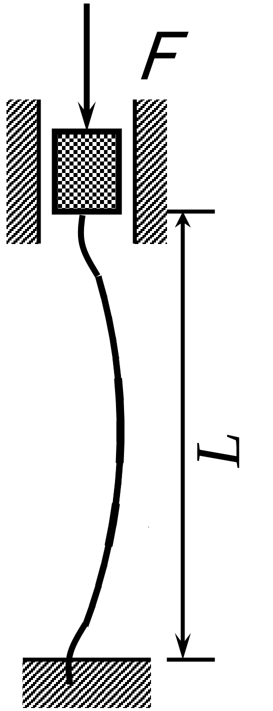
而： $k^2 = \frac{F}{EI}$

所以，临界力为： $F_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2}$

——两端固定细长压杆的欧拉公式



$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



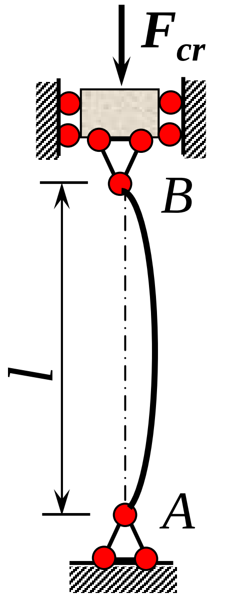
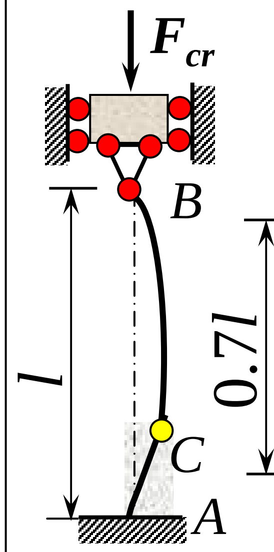
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}$$

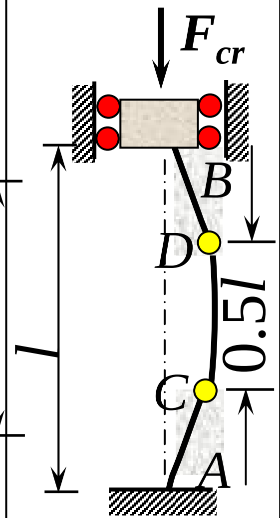
细长压杆临界力的欧拉公式的统一形式 $$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

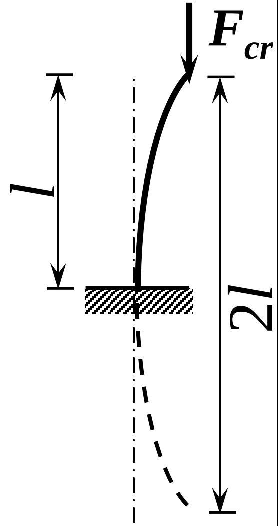
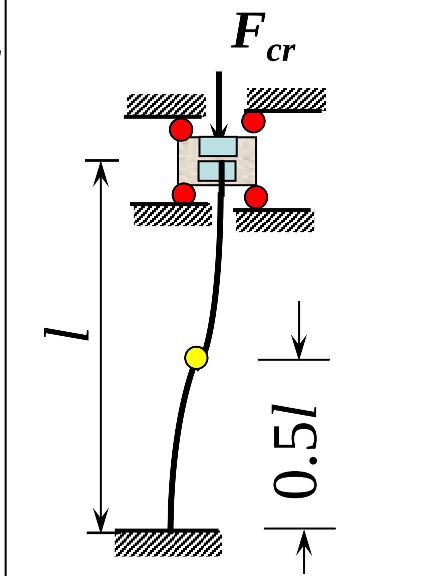
其中，μ—压杆长度系数

μl—压杆的相当长度。

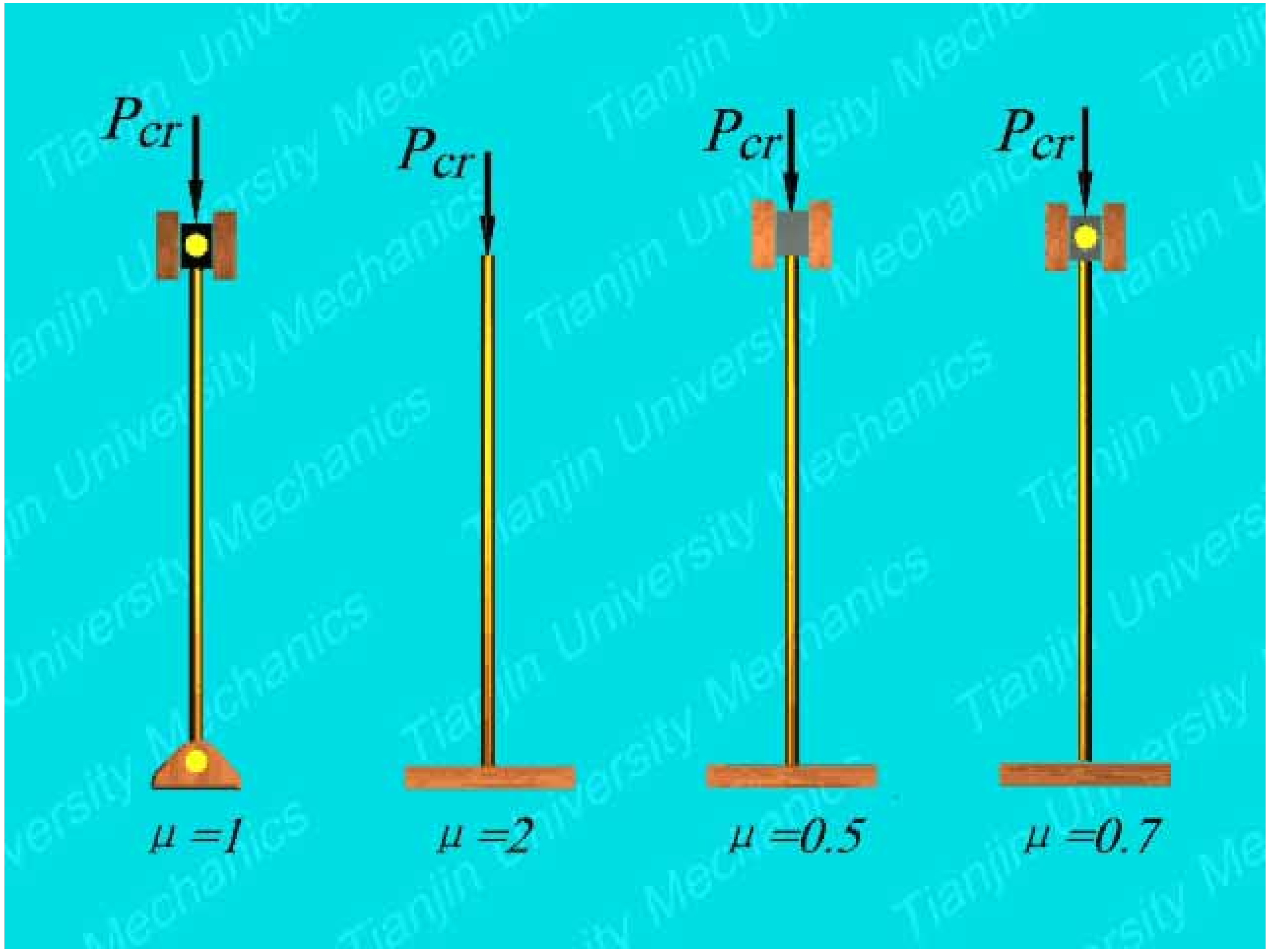
各种支承约束条件下等截面细长压杆临界力的欧拉公式

<table>
<tr><td>支承情况</td><td>两端铰支</td><td>一端固定
另端铰支</td><td>两端固定</td><td>一端固定
另端自由</td><td>两端固定但可沿
横向相对移动</td></tr>
<tr><td>失稳时挠曲线形状</td>
<td>
</td>
<td>

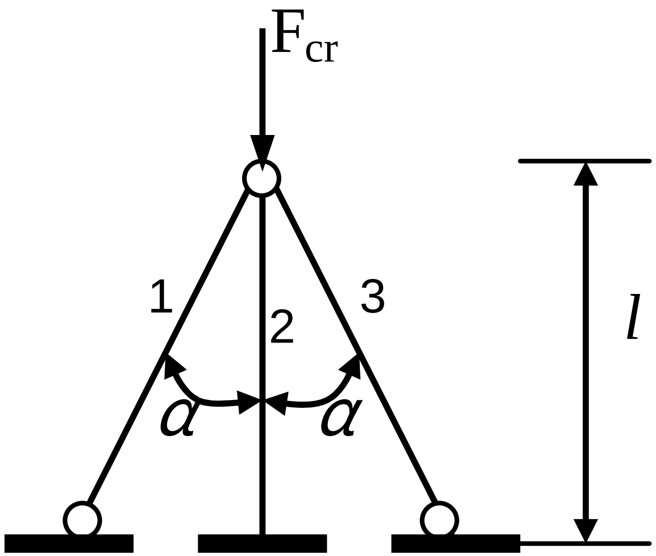
C— 挠曲线拐点</td>
<td>

C、D— 挠曲线拐点</td>
<td>
</td>
<td>

C— 挠曲线拐点</td></tr>
<tr><td>临界力F_{cr}
欧拉公式</td><td>$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$</td><td>$F_{cr}\approx\frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$</td><td>$F_{cr}\approx\frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$</td><td>$F_{cr}\approx\frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$</td><td>$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$</td></tr>
<tr><td>长度系数 μ</td><td>$\mu=1$</td><td>$\mu\approx0.7$</td><td>$\mu=0.5$</td><td>$\mu=2$</td><td>$\mu=1$</td></tr>
</table>


P_{cr}
P_{cr}
P_{cr}
P_{cr}
$\mu=1$
$\mu=2$
$\mu=0.5$
$\mu=0.7$

例**9-2**　图示结构，各杆的EI相同，均为细长压杆，求临界力F_{cr}。



解：　2杆为一端固定一端铰接

$$F_{2cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}\approx\frac{2\pi^2 EI}{l^2}$$

1杆和3杆都是两端铰接，长度为

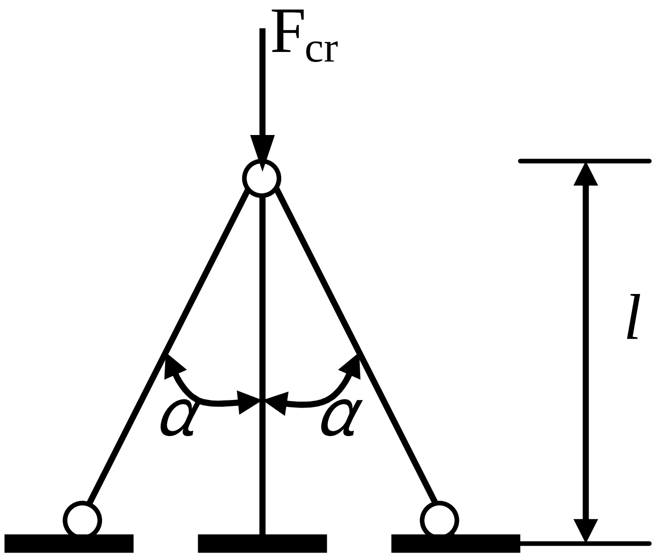
$l/\cos\alpha$

$$F_{1cr}=F_{3cr}=\frac{\pi^2 EI}{(l/\cos\alpha)^2}$$

$$=\frac{\pi^2 EI}{l^2}\cos^2\alpha$$

$$F_{2cr} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$$

$$F_{1cr} = F_{3cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}\cos^2\alpha$$

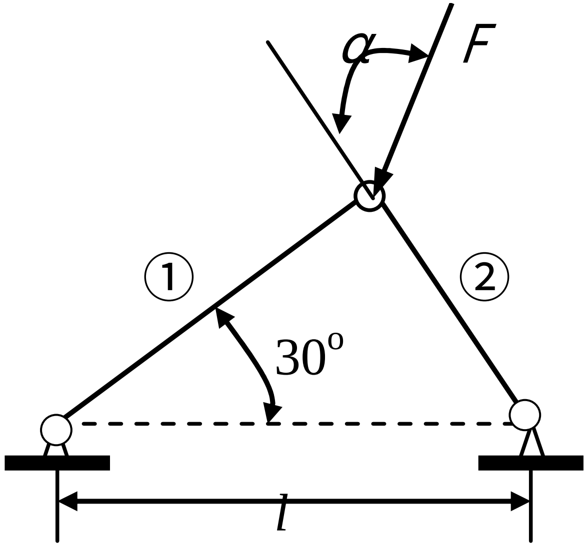


构架能承受的临界压力

$$F_{cr} = 2F_{1cr}\cos\alpha + F_{2cr}$$

$$= \frac{2\pi^2 EI}{l^2}(1+\cos^3\alpha)$$

例9-3 图示结构，各杆的EI相同，均为细长压杆，试求 α=？F最大。



解：两杆都是两端铰支细长压杆

$$F_{1cr}=\frac{\pi^2EI}{(l\cos 30^o)^2}=\frac{4\pi^2EI}{3l^2},\quad F_{2cr}=\frac{\pi^2EI}{(l/2)^2}$$

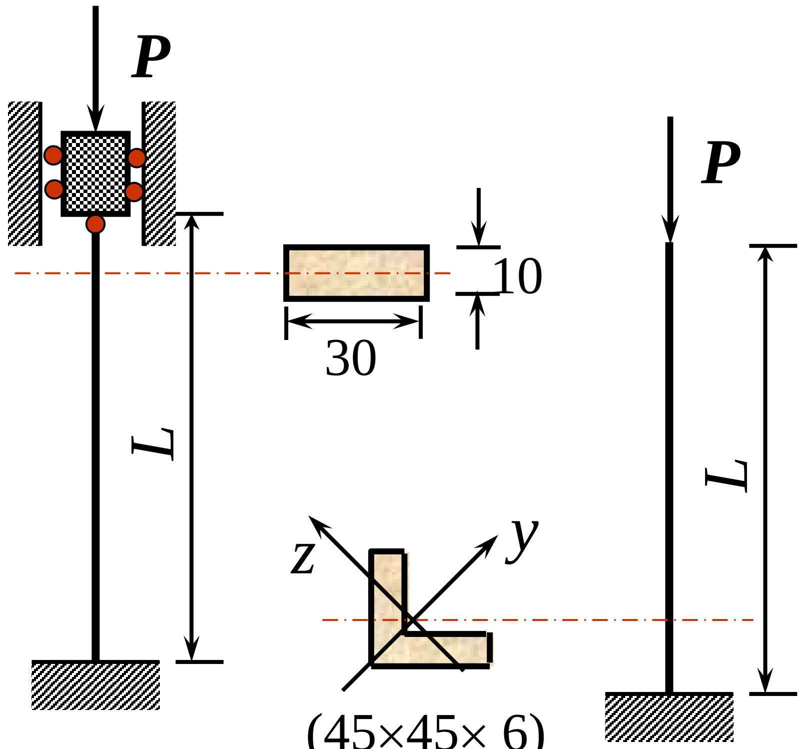
要使F最大，应使两杆都达到临界压力

$$F_{cr}\sin\alpha=F_{1cr}=\frac{4\pi^2EI}{3l^2}\qquad F_{cr}\cos\alpha=F_{2cr}=\frac{4\pi^2EI}{l^2}$$

$$F_{cr}=\frac{4\pi^2EI}{3l^2\sin\alpha}=\frac{4\pi^2EI}{l^2\cos\alpha},\quad tg\alpha=\frac{1}{3},\quad \alpha=18.43^o$$

例3 求下列细长压杆的杆长L=0.5m，求临界力。

（a）矩形截面　　(b)等边角钢截面



图(a)　　图(b)

解:图(a)

$$I_{\min}=\frac{50\times10^3}{12}\times10^{-12}=4.17\times10^{-9}\,\mathrm{m}^4$$

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 I_{\min}E}{(\mu_1 l)^2}=\frac{\pi^2\times4.17\times200}{(0.7\times0.5)^2}=67.14\mathrm{kN}$$

图(b)

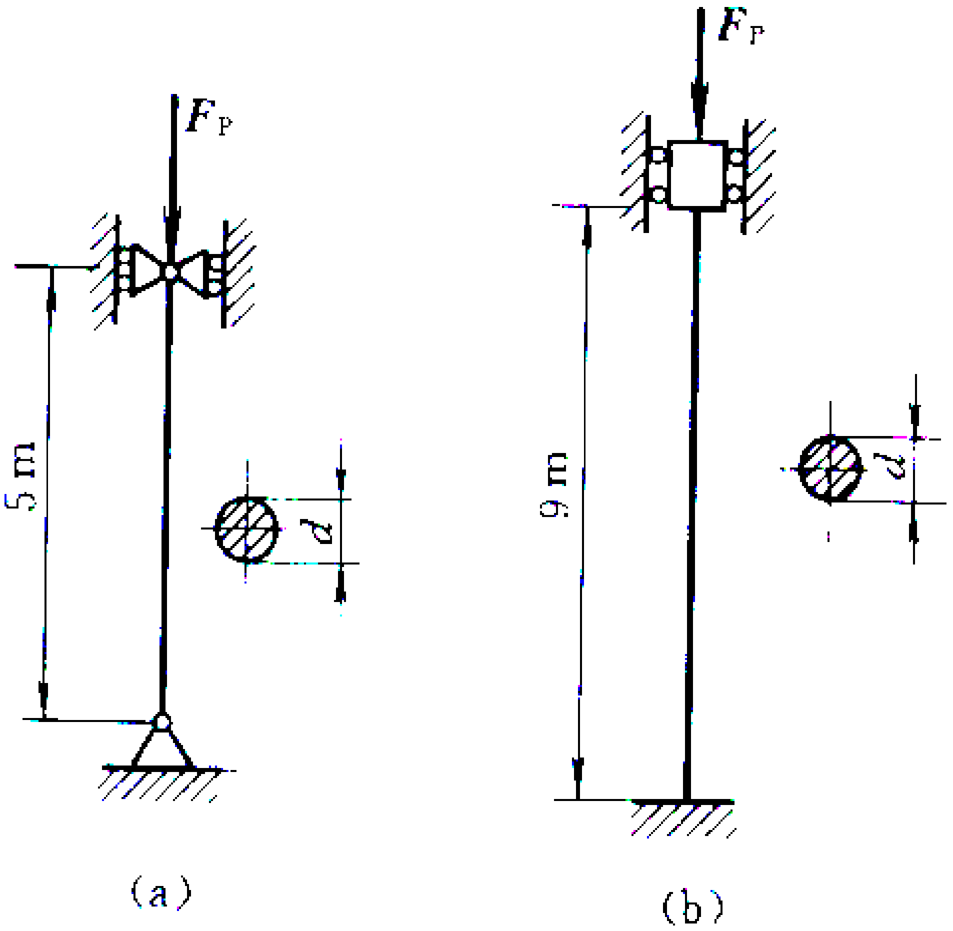
$$I_{\min}=I_z=3.89\times10^{-8}\,\mathrm{m}^4$$

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 I_{\min}E}{(\mu_2 l)^2}=\frac{\pi^2\times0.389\times200}{(2\times0.5)^2}=76.8\mathrm{kN}$$

例**9-1** 图中所示细长压杆，其直径为d，材料都是Q235钢，但二者的长度和约束各不相同。试：

1.分析: 哪一根压杆的临界载荷比较大；

2.已知： d =160 mm、 E =206 GPa ,求：二杆的临界载荷



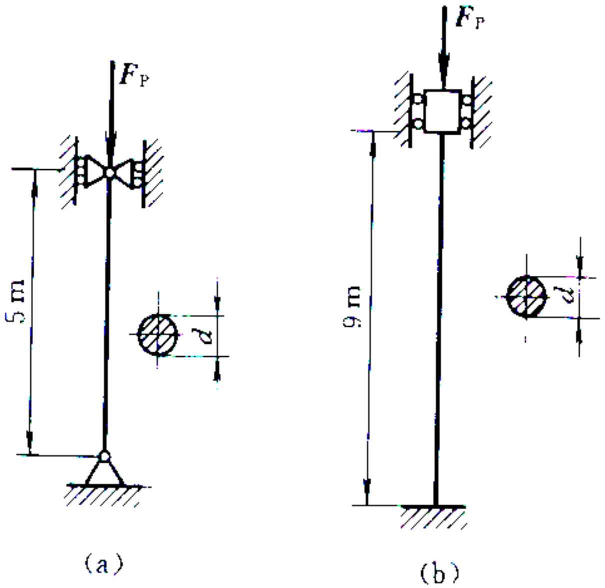
解 ：(1)由 $F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

对两根材料和截面都相同的压杆，要比较临界载荷，只需比较其 μl

(a)杆: 两端绞支， μ =1 ,l = 5m, $\mu l = 5m$

(b)杆: 两端固定， μ =0.5 ,l = 9m, $\mu l = 4.5m$

B杆的临界载荷比杆的大



(2) 已知： d =160 mm、 E =206 GPa

杆的惯性矩 $$I=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi\times 0.16^4}{64}=3.2\times 10^{-5}m^4$$

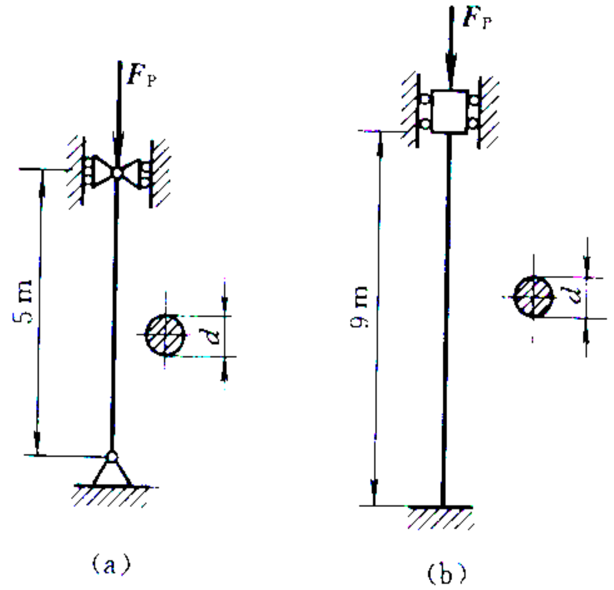
a杆 $$F_{acr}=\frac{\pi^2 EI}{(l_a)^2}=\frac{\pi^2\times 206\times 10^9\times 3.2\times 10^{-5}}{5^2}$$

$$=260.2\times 10^4 N=2602kN$$

b杆

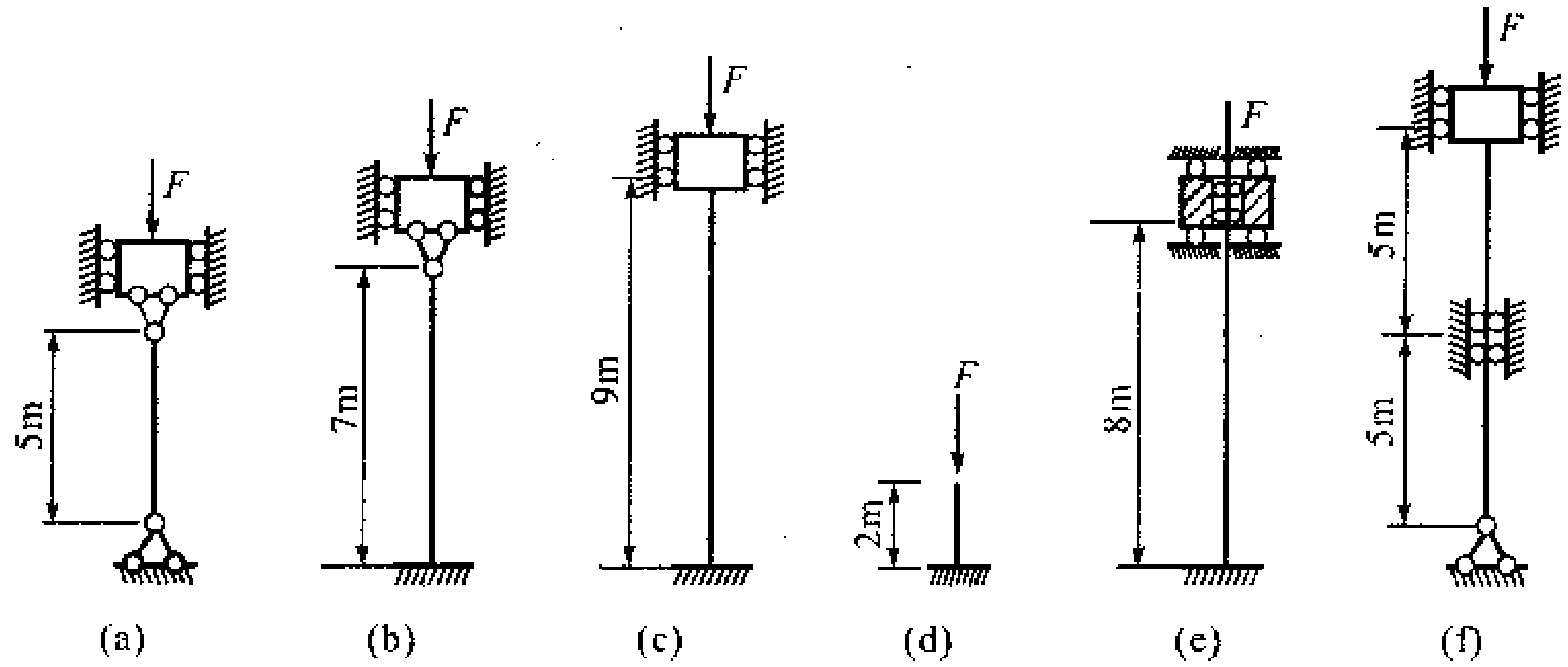
$$F_{bcr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l_b)^2}=\frac{\pi^2\times 206\times 10^9\times 3.2\times 10^{-5}}{(0.5\times 9)^2}$$

$$=321.3\times 10^4=3214kN$$



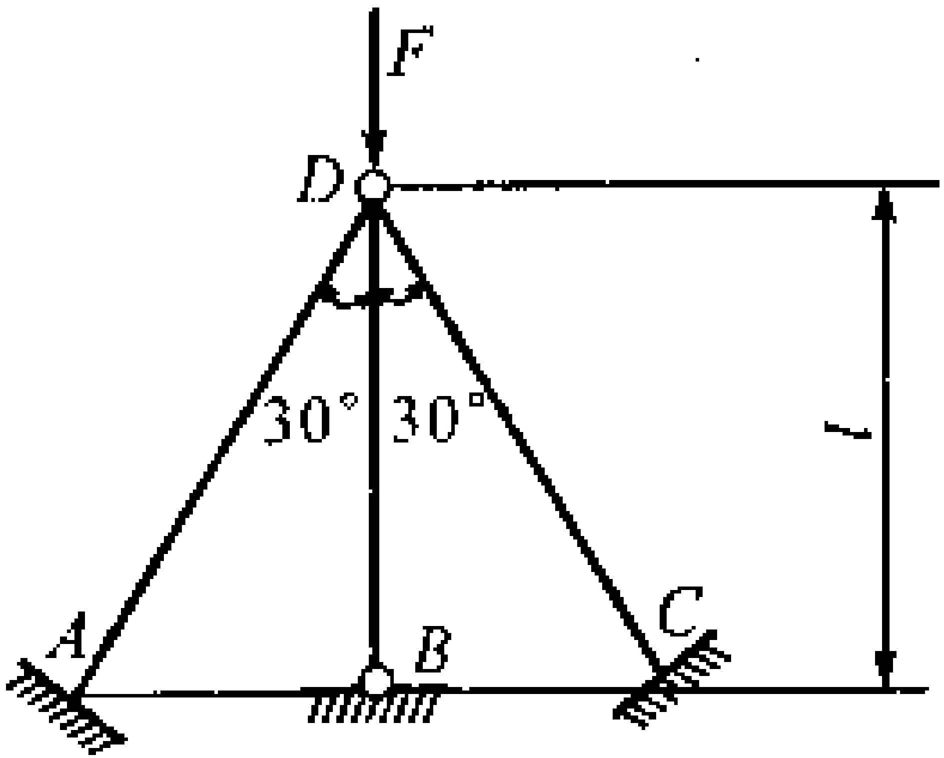
课外作业

9—2　习题9—2图示各杆材料和截面均相同，试问杆能承受的压力哪根最大，哪根最小(习题9—2图(f)所示杆在中间支承处不能转动)？



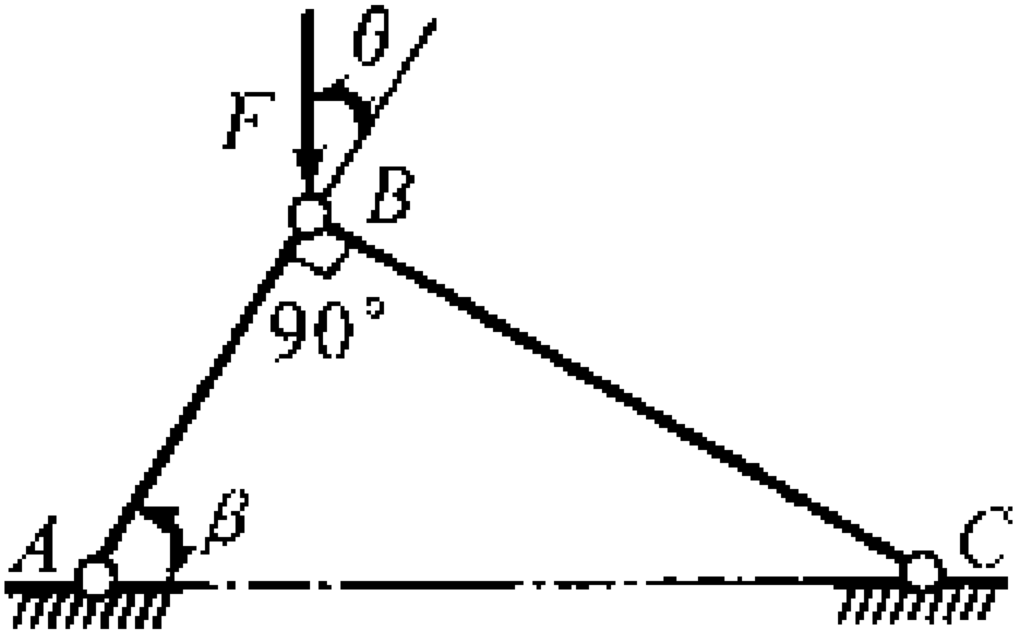
课外作业

9－7　习题9－7图示结构 $ABCD$ 由三根直径均为 d 的圆截面钢杆组成，在 B 点铰支，而在 A 点和 C 点固定，D 为铰接点，$l/d=10\pi$。若结构由于杆件在平面 $ABCD$ 内弹性失稳而丧失承载能力，试确定作用于结点 D 处的荷载 F 的临界值。



课外作业

9—8　习题9—8图示铰接杆系ABC由两根具有相同截面和同样材料的细长杆所组成。若由于杆件在平面ABC内失稳而引起毁坏，试确定荷载F为最大时的θ角$\left(假设 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$。



作业：**9-2，9-7，9-8**

再 见 ！