

弯曲习题课

弯曲问题 习题课

1、弯曲的概念

2、弯曲内力

剪力值= 截面左侧（或右侧）所有外力的代数和

左上右下为正

弯矩值= 截面左侧（或右侧）所有外力对该截面形心的力矩代数和

左顺右逆为正

作剪力图、弯矩图

剪力、弯矩与外力间的关系

外力	无外力段	均布载荷段		集中力	集中力偶
	$q=0$	$q>0$	$q<0$	F	m
F_S 图特征	水平直线	斜直线		自左向右突变	无变化
	$F_S > 0$	$F_S < 0$	增函数 降函数		
M 图特征	斜直线	曲线		自左向右折角	自左向右突变
	增函数 降函数	坟状 盆状		折向与 F 反向	与 m 反 $M_1 - M_2 = m$

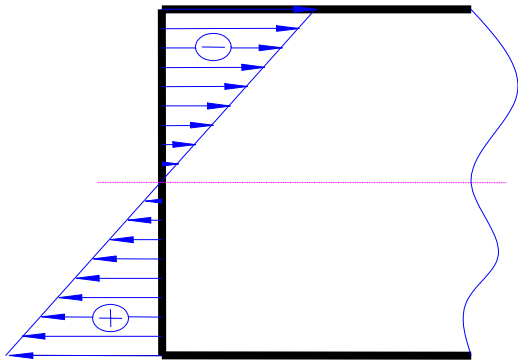
利用微分关系直接绘制剪力图和弯矩图的步骤：

- (1) 求支座反力；
- (2) 分段确定剪力图和弯矩图的形状；
- (3) 计算控制截面内力值，根据微分关系绘剪力图和弯矩图；
- (4) 确定最大剪力和最大弯矩

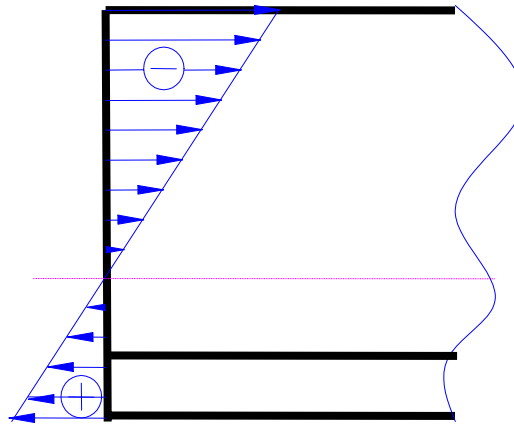
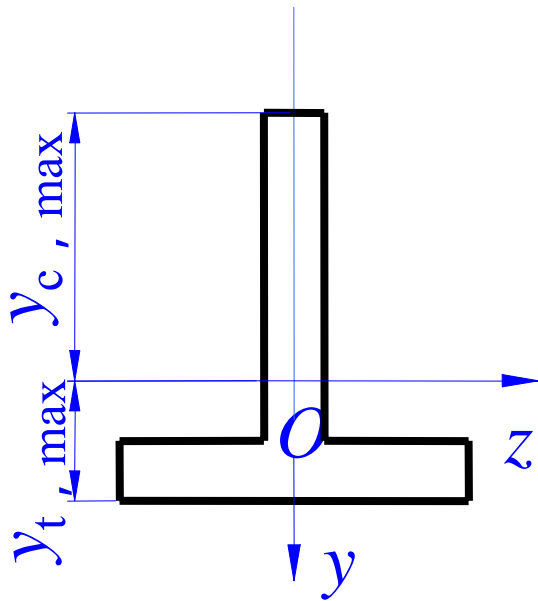
3、弯曲应力与强度条件

(1) 弯曲正应力

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$



$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$



$$\sigma_{t, \max} = \frac{My_{t, \max}}{I_z}$$

$$\sigma_{c, \max} = \frac{My_{c, \max}}{I_z}$$

(2) 梁的正应力强度条件

$$\frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

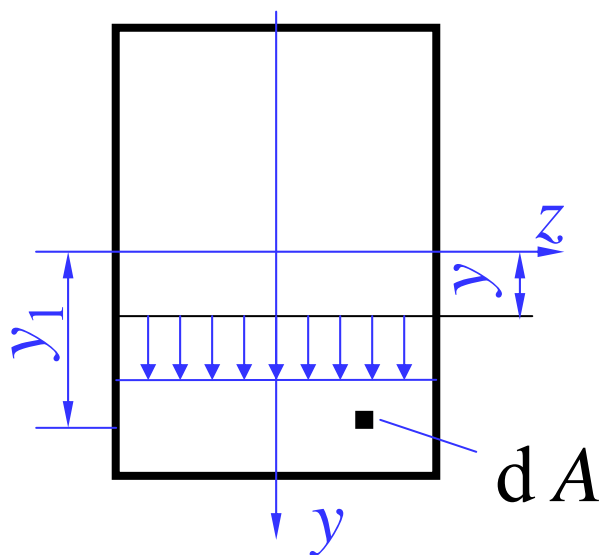
$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_{\max} y_{t,\max}}{I_z} \leq [\sigma_t] \quad \sigma_{c,\max} = \frac{M_{\max} y_{c,\max}}{I_z} \leq [\sigma_c]$$

(3) 梁的切应力及切应力强度条件

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

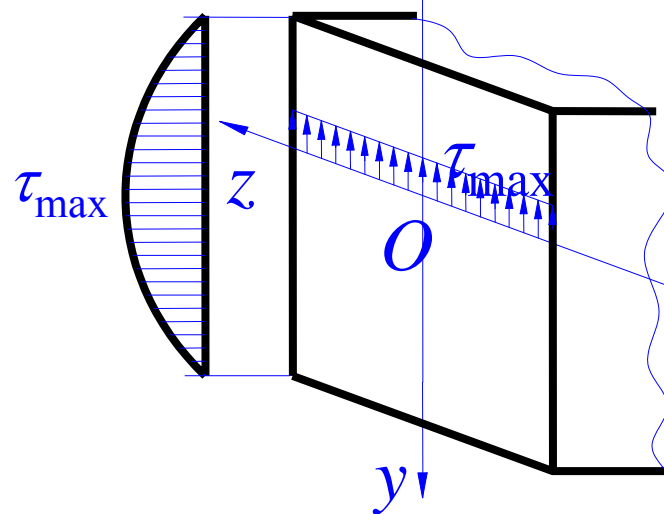
$$\frac{F_{S,\max} S_{z,\max}^*}{I_z b} \leq [\tau]$$

矩形横截面上弯曲切应力的变化规律



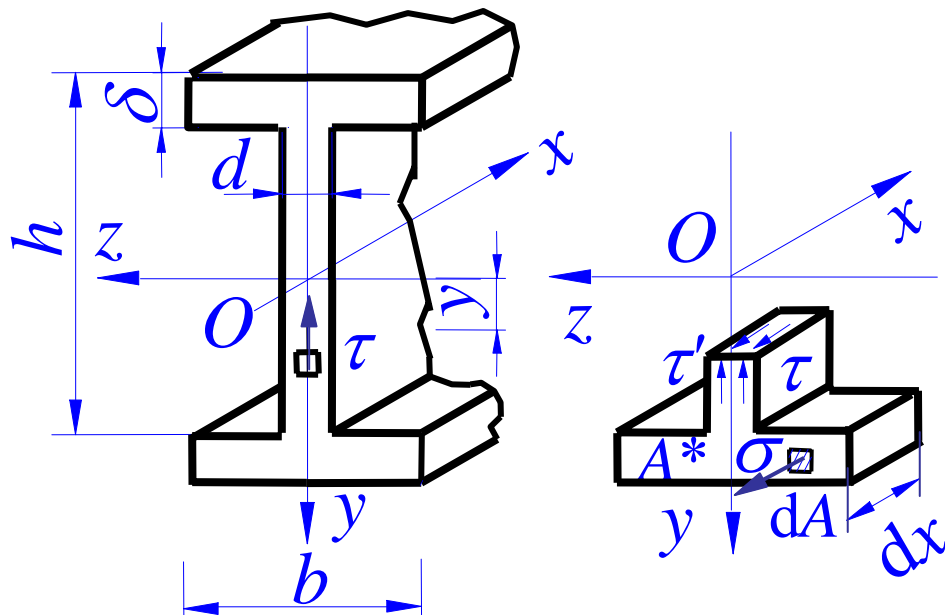
$$\tau = \frac{F_S}{I_z b} \times \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{F_S}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

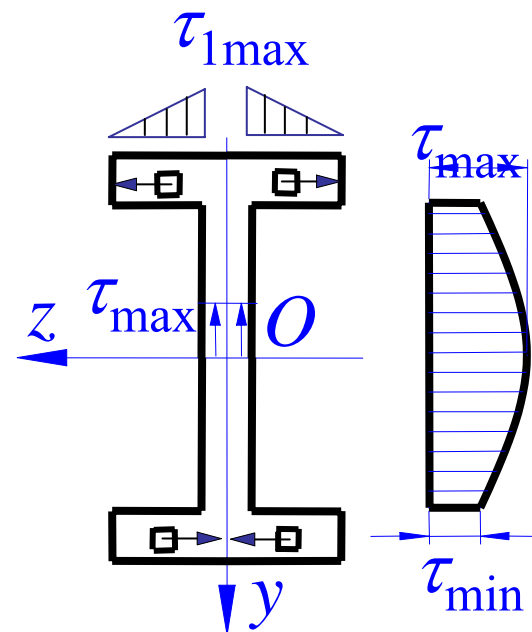


$$\tau_{\max} = \frac{F_S h^2}{8I_z} = \frac{F_S h^2}{8 \times (bh^3/12)} = \frac{3}{2} \times \frac{F_S}{bh} = \frac{3F_S}{2A}$$

工字形截面梁



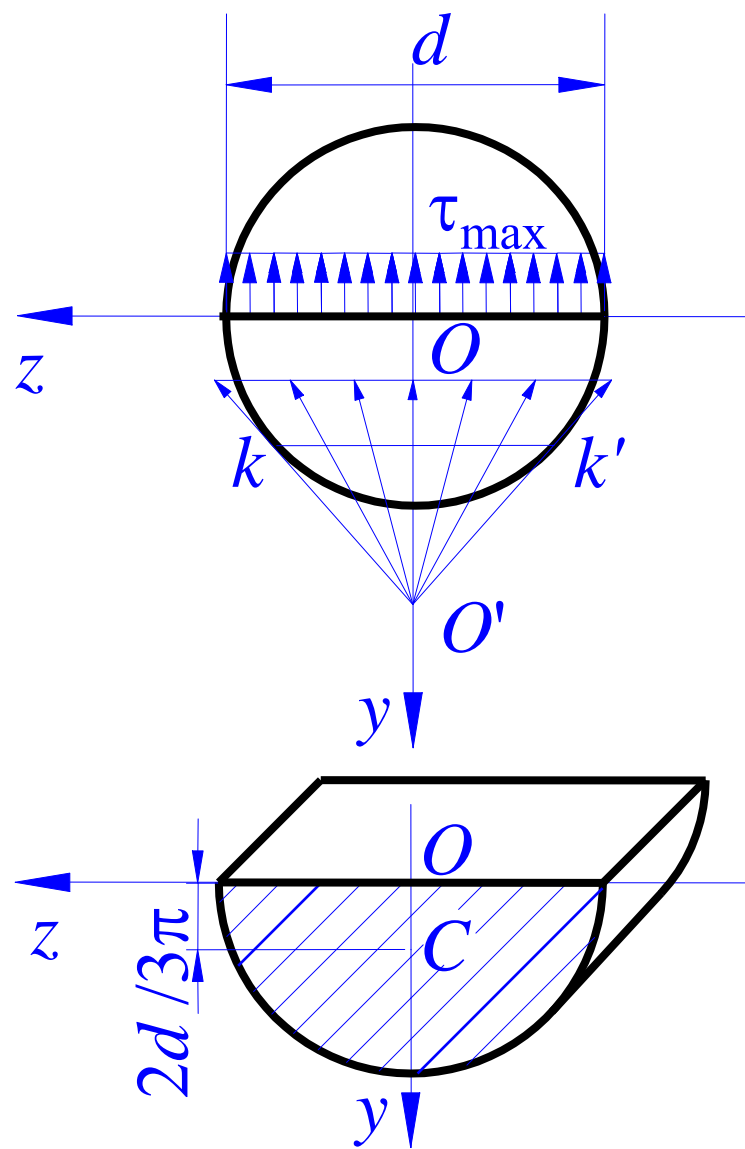
$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z d}$$



四、圆截面梁

最大切应力 τ_{\max} 在中性轴 z 处

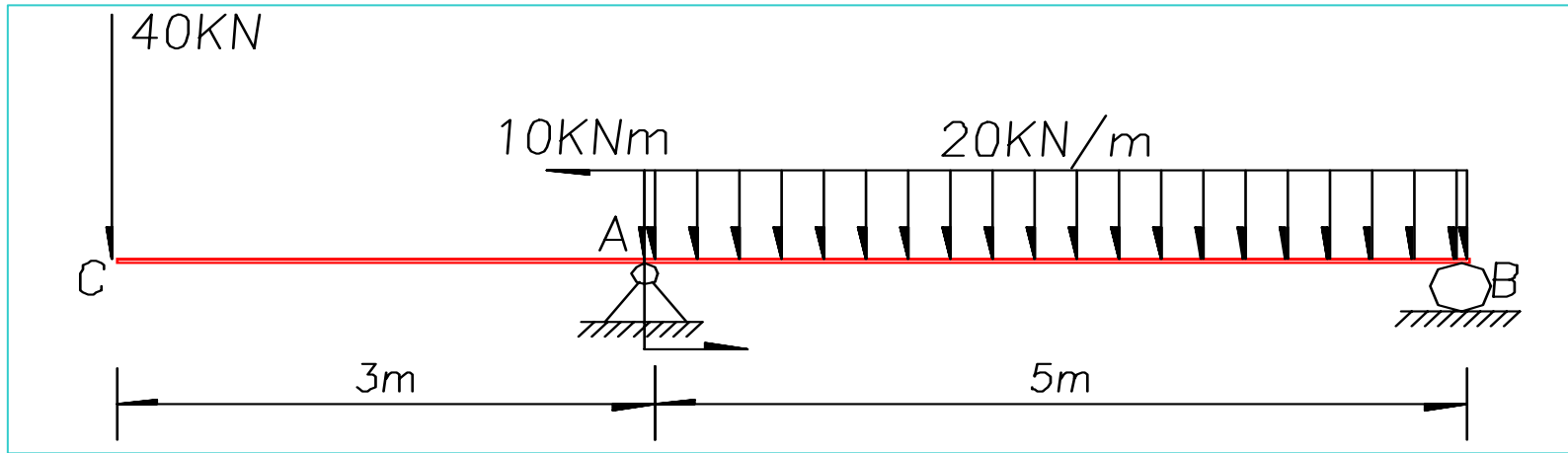
$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{F_S S_z^*}{I_z d} \\ &= \frac{F_S \left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi d^2}{4} \right) \times \frac{2d}{3\pi} \right]}{\frac{\pi d^4}{64} \times d} \\ &= \frac{4F_S}{3 \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right)} = \frac{4F_S}{3A}\end{aligned}$$



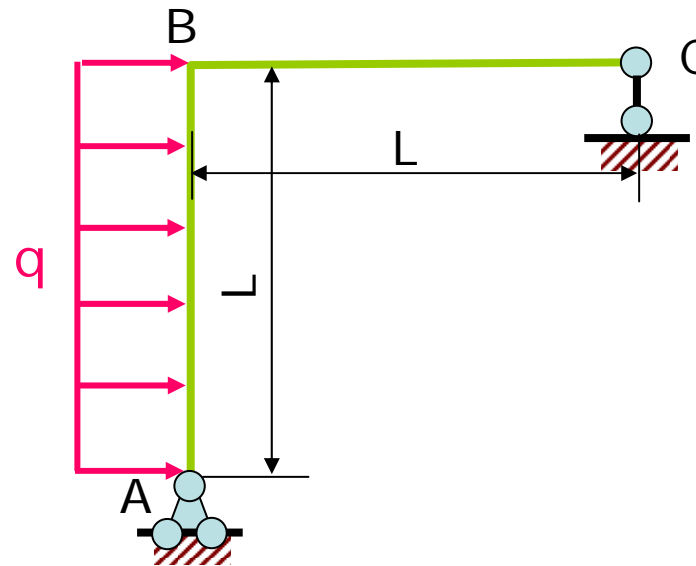
课堂练习

- 1、独立完成。
- 2、限定时间作题。
- 3、课堂上核对答案。

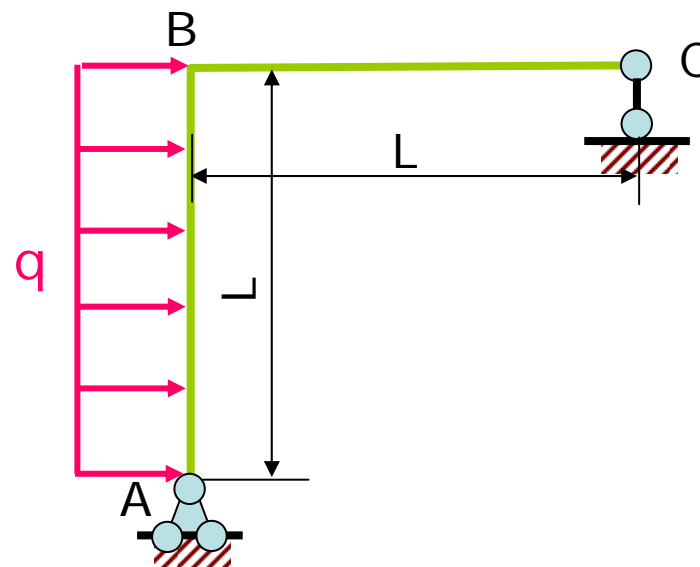
1. 作剪力、弯矩图



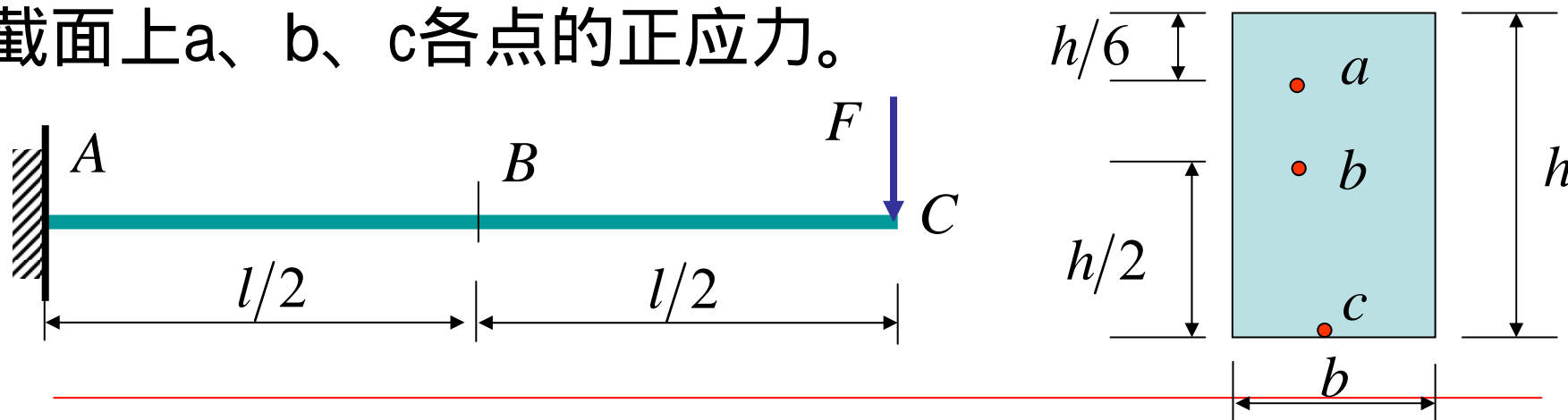
2. 做图示刚架的内力图



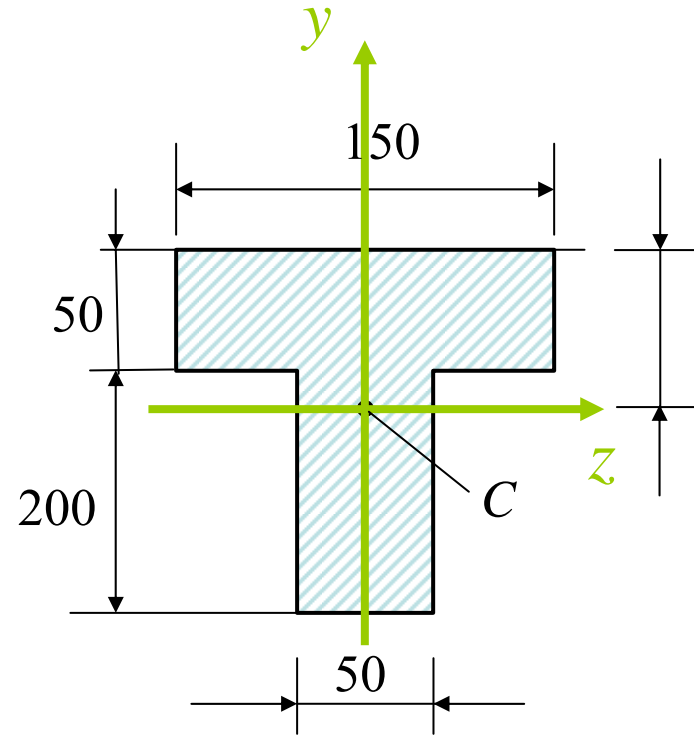
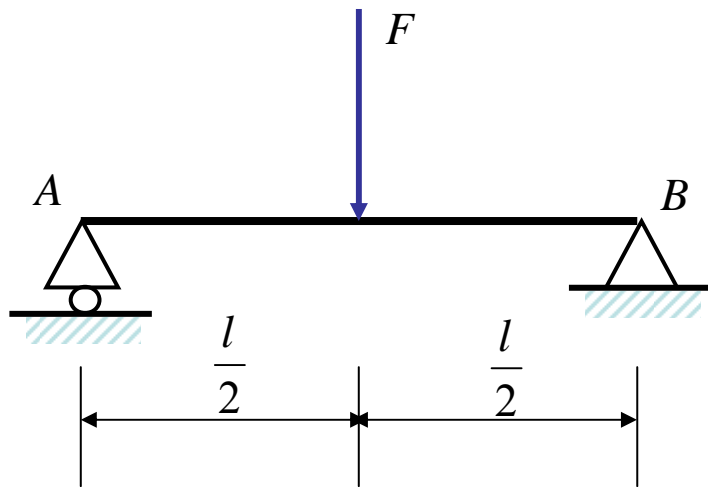
2、做图示刚架的内力图



3、长为 l 的矩形截面悬臂梁，在自由端作用一集中力 F ，已知 $b = 120\text{mm}$ ， $h = 180\text{mm}$ 、 $l = 2\text{m}$ ， $F = 1.6\text{kN}$ ，试求B截面上a、b、c各点的正应力。

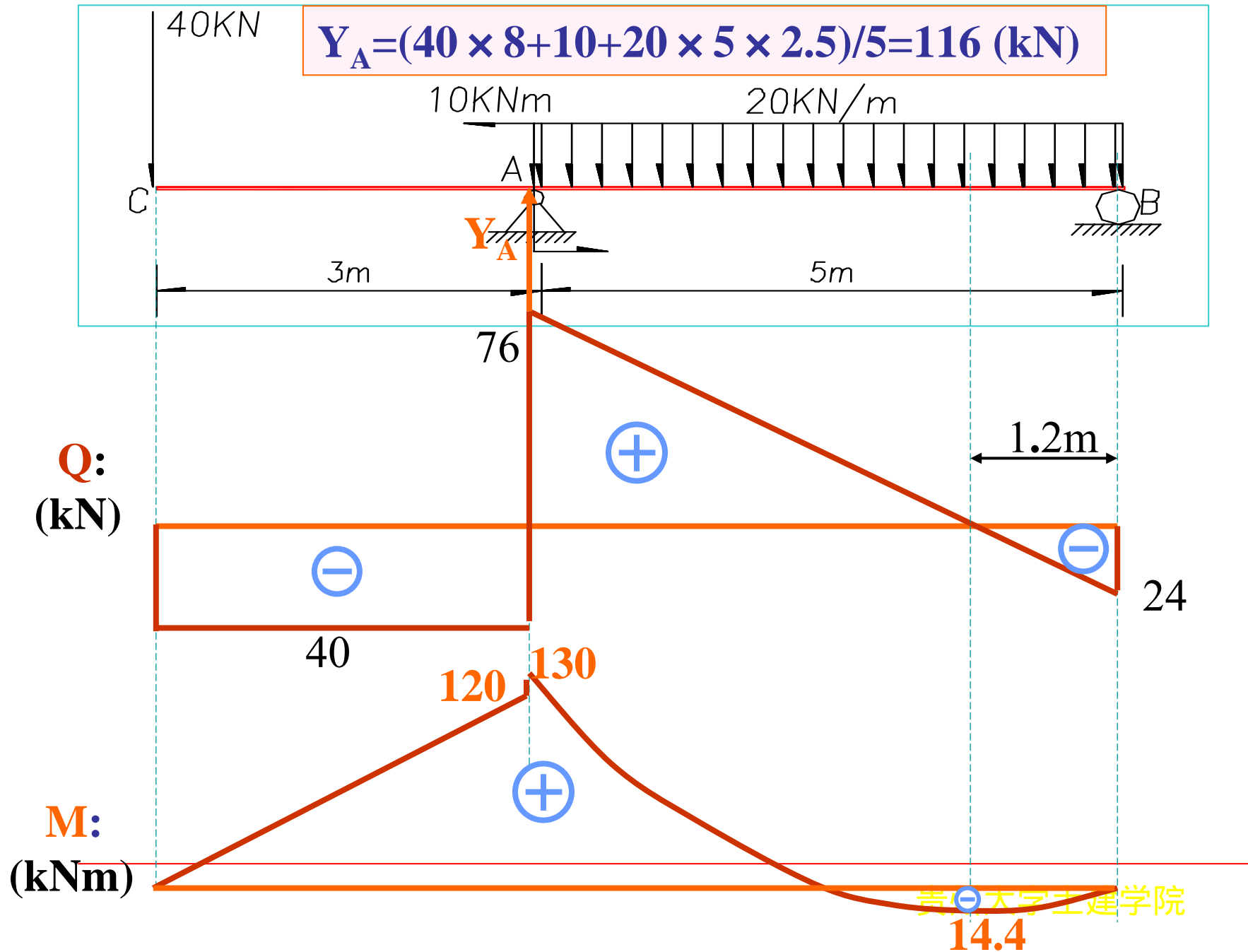


4、 图示T形截面简支梁在中点承受集中力 $F = 32\text{kN}$ ，梁的长度 $L = 2\text{m}$ 。T形截面的形心坐标 $y_c = 96.4\text{mm}$ ，横截面对于 z 轴的惯性矩 $I_z = 1.02 \times 10^8\text{mm}^4$ 。求最大拉应力和最大压应力和最大切应力。

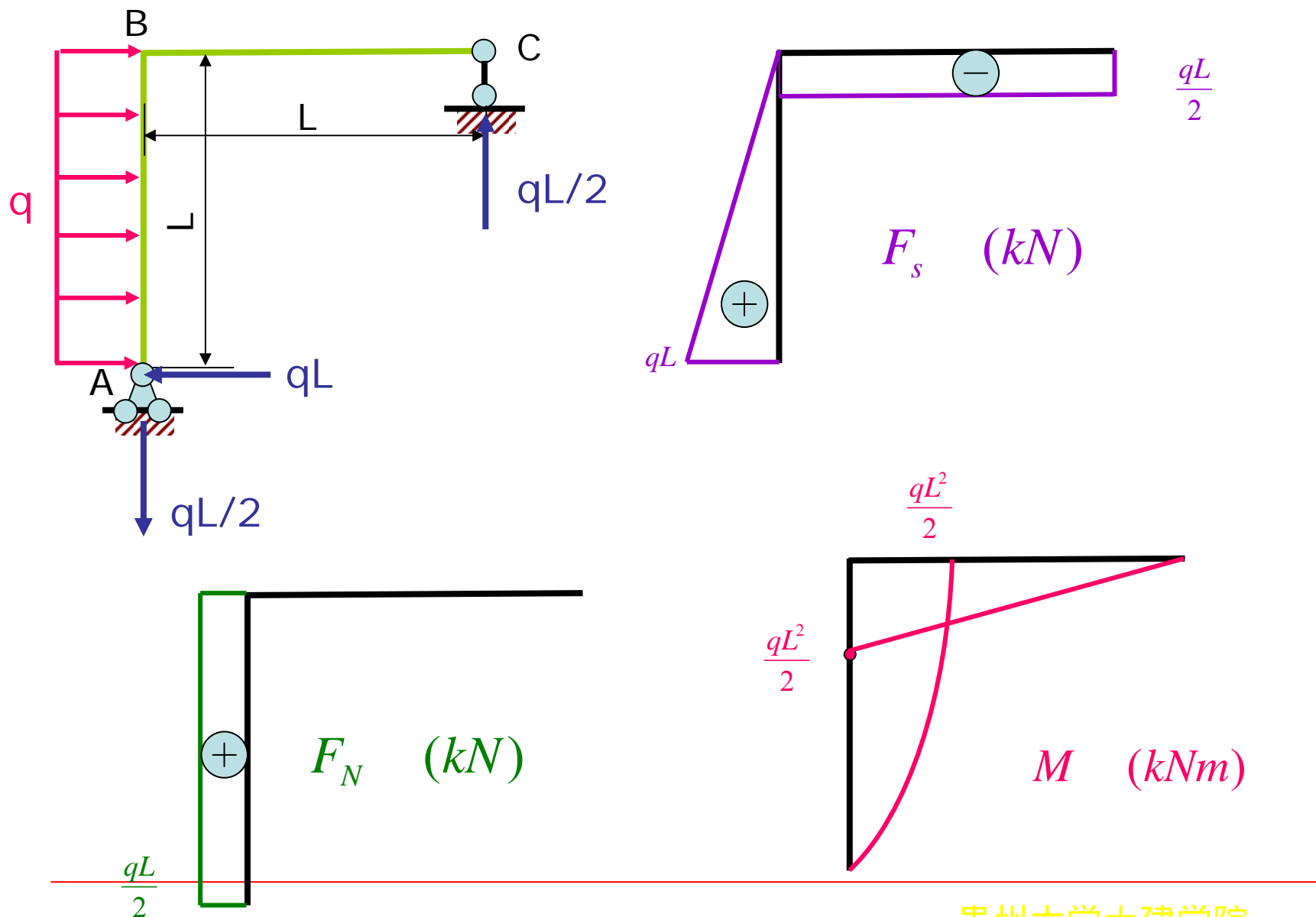


请对答案

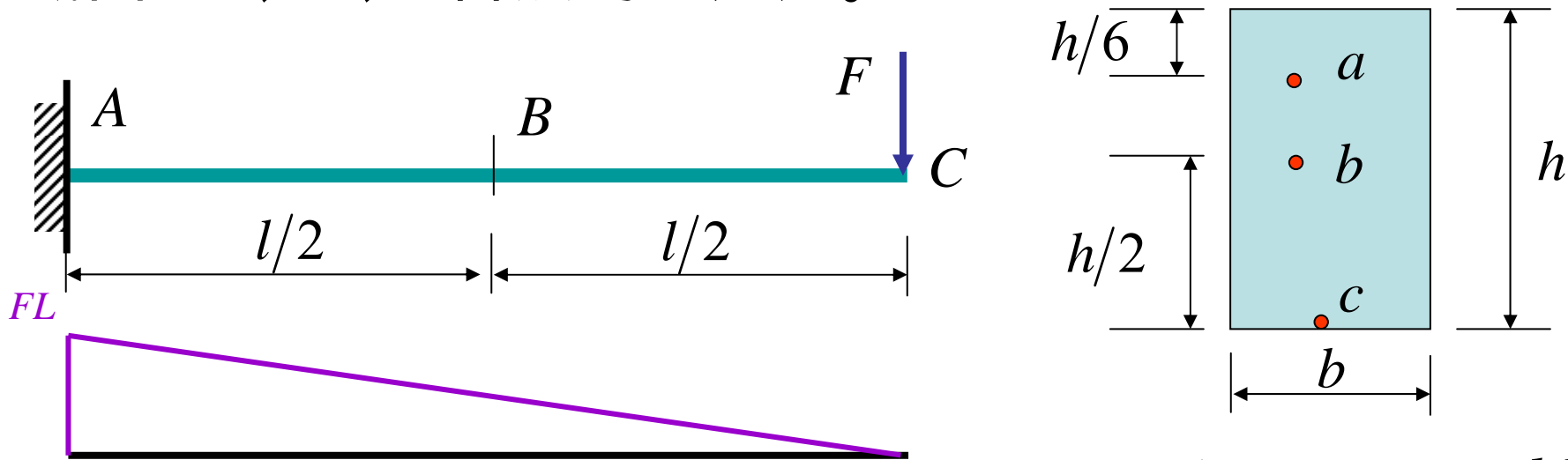
1. 作剪力、弯矩图



2、求做图示刚架的内力图



3、长为 l 的矩形截面悬臂梁，在自由端作用一集中力 F ，已知 $b = 120\text{mm}$ ， $h = 180\text{mm}$ 、 $l = 2\text{m}$ ， $F = 1.6\text{kN}$ ，试求B截面上a、b、c各点的正应力。



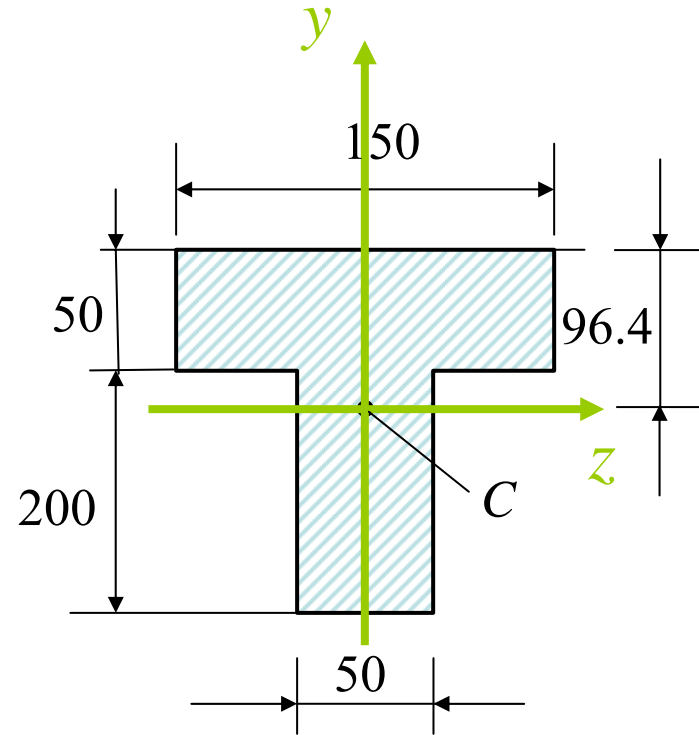
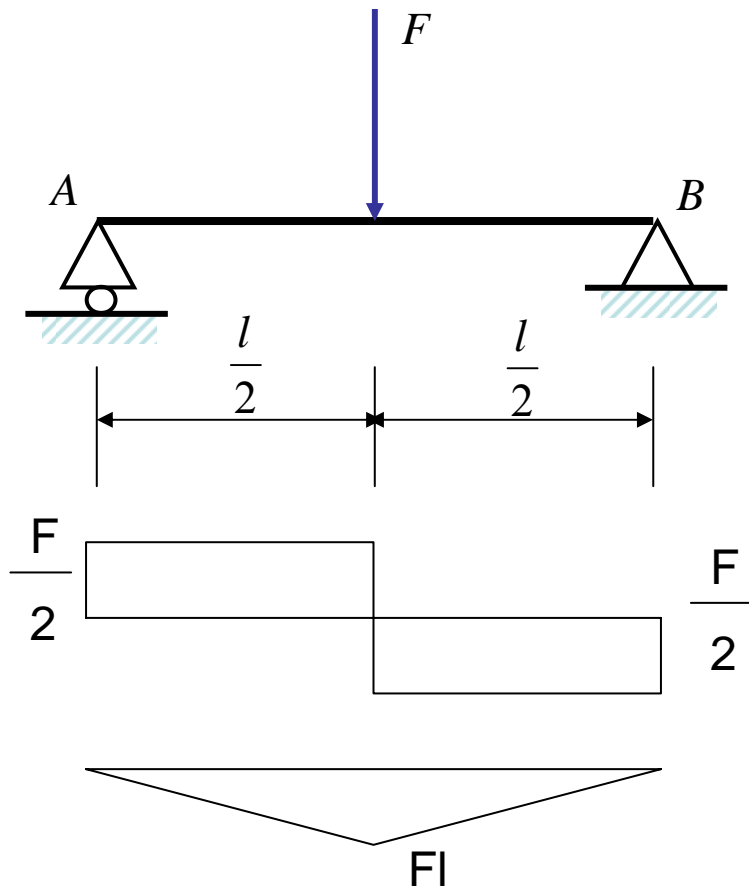
$$\sigma_a = \frac{M_B y_a}{I_Z} = \frac{\frac{1}{2} FL \frac{h}{3}}{\frac{bh^3}{12}} = 1.65\text{MPa}$$

$$\sigma_b = 0$$

$$\sigma_c = \frac{M_B y_c}{I_Z} = \frac{\frac{1}{2} FL \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = 2.47\text{MPa} \quad (\text{压})$$

$$M_B = \frac{1}{2} FL \quad I_Z = \frac{bh^3}{12}$$

4、 图示T形截面简支梁在中点承受集中力 $F = 32\text{kN}$ ，梁的长度 $L = 2\text{m}$ 。T形截面的形心坐标 $y_c = 96.4\text{mm}$ ，横截面对于z轴的惯性矩 $I_z = 1.02 \times 10^8\text{mm}^4$ 。求弯矩最大截面上的最大拉应力和最大压应力。



1) 作内力图 $F_{s\max} = \frac{F}{2} = 16\text{kN}$
 $M_{\max} = \frac{FL}{4} = 16\text{kNm}$

$$F_{s\max} = \frac{F}{2} = 16kN$$

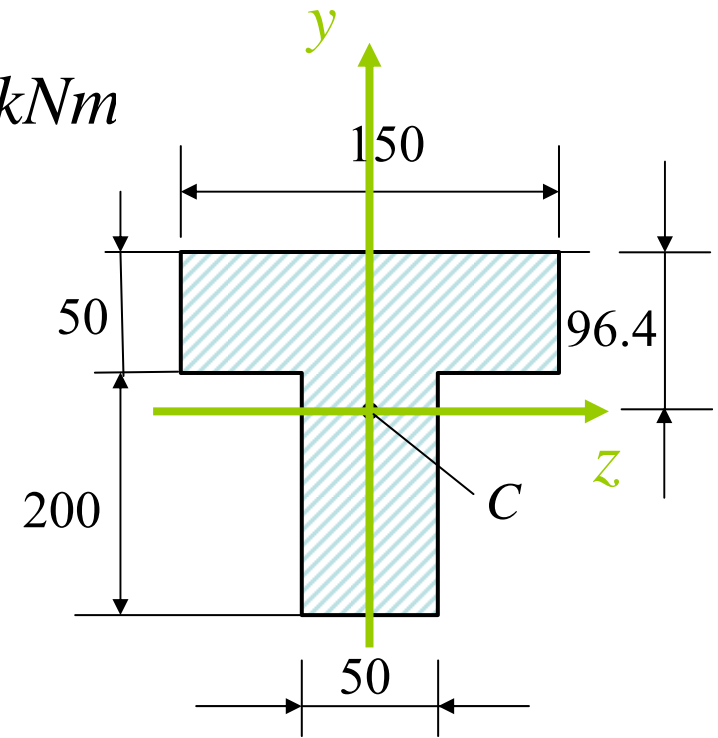
$$M_{\max} = \frac{FL}{4} = 16kNm$$

2) 截面的几何量

$$y_c = \frac{50 \times 150 \times 25 + 50 \times 200 \times 150}{50 \times 150 + 50 \times 200} = 96.4mm$$

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{150 \times 50^3}{12} + 150 \times 50 \times 71.4^2 \\ &+ \frac{50 \times 200^3}{12} + 50 \times 200 \times 53.6^2 \\ &= 1562500 + 38234700 + 333333333 + 28729600 \\ &= 1018601333mm^4 = 1.02 \times 10^{-4} m^4 \end{aligned}$$

$$S_{z\max}^* = 153.6 \times 50 \times 76.8 = 589824mm^3 = 0.59 \times 10^{-3} m^3$$



3)求应力

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{My_{\max}^+}{I_z} = 24.09MPa$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{My_{\max}^-}{I_z} = 15.12MPa$$

$$\tau_{\max} = \frac{F_{s\max} \cdot S_{z\max}^*}{I_z b} = 1.8MPa$$

思考题

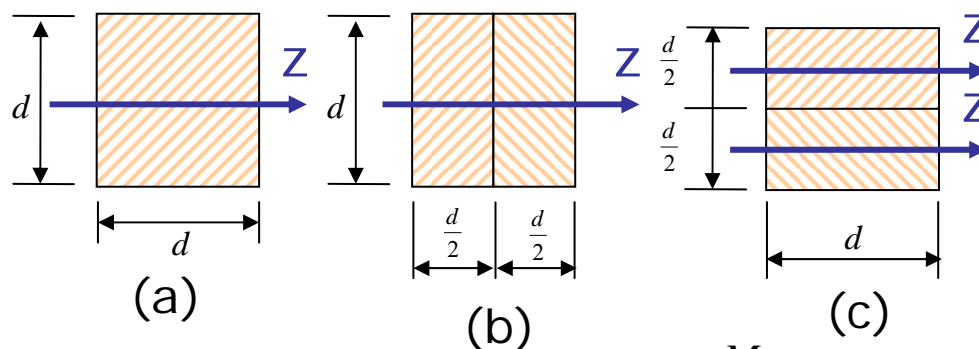
1、承受相同弯矩 M_z 的三根直梁，其截面组成方式如图所示。图（a）的截面为一整体；图（b）的截面由两矩形截面并列而成（未粘接）；图（c）的截面有两矩形截面上下叠合而成（未粘接）。三根梁中的最大正应力分别为 $\sigma_{\max}(a)$ 、 $\sigma_{\max}(b)$ 、 $\sigma_{\max}(c)$ 。关于三者之间的关系有四种答案，试判断哪一种是正确的。

(A) $\sigma_{\max}(a) < \sigma_{\max}(b) < \sigma_{\max}(c)$;

(B) $\sigma_{\max}(a) = \sigma_{\max}(b) < \sigma_{\max}(c)$;

(C) $\sigma_{\max}(a) < \sigma_{\max}(b) = \sigma_{\max}(c)$;

(D) $\sigma_{\max}(a) = \sigma_{\max}(b) = \sigma_{\max}(c)$ 。



$$\sigma_{\max}(a) = \frac{M_z}{\frac{d^3}{6}} = \frac{6M_z}{d^3} \quad \sigma_{\max}(b) = \frac{\frac{M_z}{2}}{\frac{d}{2} \cdot d^2} = \frac{6M_z}{d^3}$$

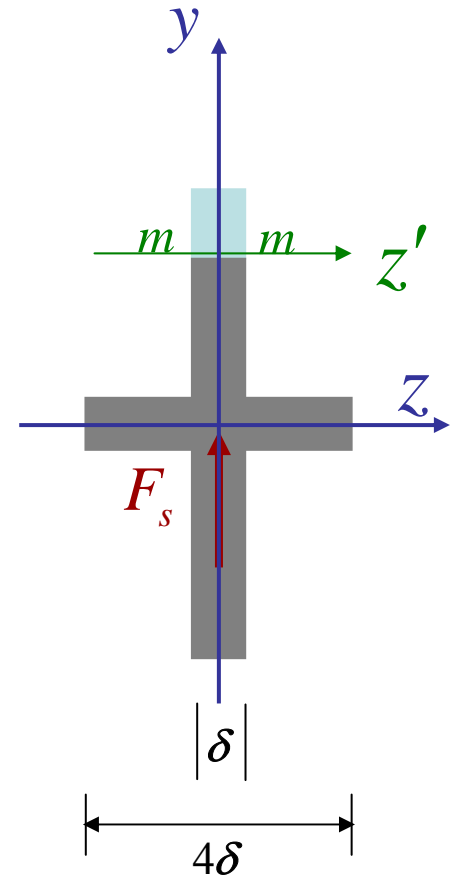
$$\sigma_{\max}(c) = \frac{\frac{M_z}{2}}{d \left(\frac{d}{2} \right)^2} = \frac{12M_z}{d^3}$$

B

2.在图示十字形截面上,剪力为 F_s ,欲求m--m线上的

切应力,则公式中 $\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$, D .

- A、 S_z^* 为截面的阴影部分对 z' 轴的静矩 , $b = 4\delta$;
- B、 S_z^* 为截面的阴影部分对 z' 轴的静矩 , $b = \delta$;
- C、 S_z^* 为截面的阴影部分对 z 轴的静矩 , $b = 4\delta$;
- D、 S_z^* 为截面的阴影部分对 z 轴的静矩 , $b = \delta$;



3. T形截面铸铁材料悬臂梁受力如图，轴Z为中性轴，横截面合理布置的方案应为 **A**。

